ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

**О. А. ЖӘУТІКОВ**

# МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ КУРСЫ

*ОҚУЛЫҚ*

Алматы, 2014

ӘОЖ 517 (075.8)
КБЖ 22.161 я 73
Ж 37

*Қазақ КСР Ағарту министрлігі бекіткен*

*Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі бекіткен*

Ж 37 **Жәутіков О.А.**
**Математикалық анализ курсы.** Оқулық/ Жәутіков О.А. Екінші басылым; Қазақстан Республикасы Жоғары оқу орындарының қауымдастығы. – Алматы: «Экономик» баспасы, 2014. – 832 бет.

ISBN 978-601-225-671-0

Кітаптың қамтитын мәселелері: анализге кіріспе, дифференциалдық есептеу, интегралдық есептеу, қатарлар теориясы, көп айнымалылар функциялары, еселік интегралдар мен қисық сызықты интегралдар теориясы және өріс теориясының элементтері.

Есеп шығара білу – маңызды істердің бірі. Міне осы мәселеге үлкен мән беріп, ұсынылып отырған кітапта бірталай есептердің шығару жолы көрсетілді. Бұлардың ішінде едәуір қиындары да, орта қиындықпен шығатындары да бар. Оқушылар өз беттерімен шығарып жаттығу үшін әрбір тараудың аяғында жаттығулар (есептер) келтірдік.

Ұсынылып отырған оқулық сырттан оқушыларға да пайдалы.

ӘОЖ 517 (075.8)
КБЖ 22.161 я 73

ISBN 978-601-225-671-0

# АЛҒЫ СӨЗ

Қазақстандағы педагогикалық институттардың және Қазақ университетінің физика-математика факультеттерінде қазақ бөлімдері ашылғалы көп уақыт болды. Сырттан оқитын оқушыларды қоса есептегенде, бұл бөлімдердің мыңдаған студенттері жоғары математикадан оқылатын лекцияларды қазақ тілінде тыңдап жүр.

Айтылып отырған бөлімдердің көптен бері өмір сүріп келе жатқанына қарамастан, амал не, математика пәнінен тиісті оқулық немесе оқу құралы қазақ тілінде әлі күнге дейін жоқ. Сол себептен қазақ бөлімдерінде оқитын студенттер елеулі қиыншылықтарға кездесуде.

Сөз жоқ, математика пәнінен оқулықтың немесе оқу құралының ана тілінде болуын мыңдаған қазақ оқушылары талап етеді. Бұлардың осы талаптарының бір бөлігін болса да қанағаттандыруды көздеп, автор жоғары математиканың бір саласы – математикалық анализ курсын оқушылар жұртшылығының алдына ұсынып отыр. Бұл кітаптың негізіне салынған – автордың көп жылдар бойы Абай атындағы Қазақ педагогикалық институтының және С. М. Киров атындағы Қазақ университетінің физика-математика факультеттерінде математикалық анализден оқыған лекциялары.

Кітаптың қамтитын мәселелері: анализге кіріспе, дифференциалдық есептеу, интегралдық есептеу, қатарлар теориясы, көп айнымалылар функциялары, еселік интегралдар мен қисық сызықты интегралдар теориясы және өріс теориясының элементтері. Материалдың орналасу тәртібі мен баяндалу жағынан бұл курстың орыс тіліндегі оқулықтардан едәуір айырмашылығы бар. Мұнда алдымен республикамыздың орта мектептерінен келетін жастардың математикалық дайындығының көлемі мен оқу жоспарындағы анализге бөлінетін уақыт мөлшері еске алынды. Сонымен қатар, мүмкіндігінше, сырттан оқитын оқушылардың, орта мектептер мұғалімдерінің, математикалық анализ оқылатын техникалық жоғары оқу орындары студенттерінің де мүдделері көзделді. Кітапты жазғанда автор математикалық анализді оқытудағы өзінің көп жылдық тәжрибесіне сүйенді.

Орта мектепте оқылатын математика мен жоғары мектепте жүретін математиканың айырмашылығы жер мен көктей. Сондықтан да математикалық анализ, жоғары мектептерде өтетін басқа пәндерге қарағанда, оқушыларға қиын соғатынын тәжірибе көрсетті (әсіресе, бұл пәннің бас жағы). Мұнда оқушылар бұрын естімеген түрлі ұғымдармен, теоремалармен тұңғыш рет кездеседі. Бұл ұғымдарды анықтау, теоремаларды дәлелдеу принциптері де оқушыларға бұрыннан азды-көпті таныс мәселе емес.

Математикалық анализ курсының осы ерекшеліктерін еске ала отырып, кітаптың оқушыларға түсінікті болуы жағын көздедік. Осы мақсатпен қарастырылған теориялық қиын мәселелерді геометриялық сызбамен, фигуралармен елестеттік және абстракт ұғымдарды көкейге қондыратын, теоремалардың іс жүзінде қалай қолданылатынын көрсететін бірталай есептер мен мысалдардың шешулерін келтірдік. Әрине, математикалык анализ курсын тұңғыш рет тыңдаушыны тура жолмен бұл ғылымның мәнісіне бірден жеткізетін оқу құралын жасау немесе сондай кітапты көрсету өте қиын жұмыс.

Есеп шығара білу – маңызды істердің бірі. Міне осы мәселеге үлкен мән беріп, ұсынылып отырған кітапта бірталай есептердің шығару жолы көрсетілді. Бұлардың ішінде едәуір қиындары да, орта қиындықпен шығатындары да бар. Оқушылар өз беттерімен шығарып жаттығу үшін әрбір тараудың аяғында жаттығулар (есептер) келтірдік.

Ұсынылып отырған оқулық сырттан оқушыларға да пайдалы.

Нақты сандар мен шектер теориясы анализдің фундаменті болып табылатындықтан және бұл кіріспе бөлім оқушыларға өзге тараулардан гөрі қиынырақ тиетіндіктен, оған көбірек тоқталып, айрықша көңіл бөлдік. Алайда материалды шексіз оңайлата беруге болмайды. Баяндалатын мәселелердің ғылыми қаталдығы мен дәлдігі толық сақталу керек, материалдың ішкі өзегіне нұқсан келмеу керек.

Кітаптағы баяндалған мәселелердің мәнісіне жете түсіну үшін, оны қадағалап оқумен бірге жаттығулардағы келтірілген есептерді шығару керек. Математикадан есеп шығару оқушының ой-өрісін кеңітеді.

Практикалық қолданылу мәселелеріне көңіл бөлмей, математикалық анализдің тек теориялық мәселелерімен ғана шұғылдансақ, онда бұл пәнді меңгеруде біз құрғақ жеміссіздікке душар болған болар едік. Математикалық анализ бен жаратылыстану ғылымдары (физика, механика, астрономия т. т.) бір-бірімен тығыз байланысты. Осы байланысты көрсету мақсатымен, аз да болса, физикалық есептер келтірдік.

Бұл кітап жоғары математикадан қазақ тілінде жазылатын оқулықтардың төл басы болып отыр. Сондықтан оның кемшіліктері де болуы мүмкін. Ондай кемшіліктердің жөнделуіне, кітаптың жақсаруына ат салысып, пікір айтатын жолдастарға автор алғыс айтады.

Бұл енбектің жарыққа шығуы жоғары мектептердің оқушыларына, орта мектептердің мұғалімдеріне пайда келтірер деп ойлаймыз.

Кітаптың қолжазбасын түгел оқып шығып, құнды ескертпелер мен кеңестер берген М.Я. Ятаев, М.Ө. Искаков жолдастарға; кітаптың талқылауына белсенді түрде қатынасып, маңызды пікірлер айтқан И.Д. Молюков, Б.М. Оразбаев, А.Қ. Беделбаев, М.П. Гуляев, О. Хаймолдин, кітаптағы есептердің шығарылуының дұрыстығын тексеріп, формулаларын толтырып, қолқабыстарын тигізген Қазақ ССР Ғылым академиясының Математика мен механика секторының кіші ғылыми қызметкерлері А. Ходжанов, А. Қазанғапов, Г.К. Рожок; аспиранттары Т. Балабаев, Ж. Наурызбаев жолдастарға шын жүрегінен алғыс айтуды автор өзінің борышы деп санайды.

*О. А. Жәутіков.*

## *Бірінші бөлім*
## АНАЛИЗГЕ КІРІСПЕ

## I ТАРАУ
## АНАЛИЗ НЕГІЗІНЕ ЖАТАТЫН БАСТЫ ҰҒЫМДАР

### §1. Жиын ұғымы

Қазіргі уақыттағы математикада үлкен роль атқаратын ұғымның бірі – жиын ұғымы.

Жиын ұғымына анықтама беруге болмайды, былайша айтқанда, жиын ұғымы, басқа жай ұғымдар арқылы анықтауға келмейтін, ең алғашқы ұғымдардың бірі болып табылады. Сондықтан жиынның мағынасын түсіндіретін мысалдар келтірейік. Жиын деген сөзден белгілі бір қасиеттерге ие болып, белгілі бір заңмен біріккен әр алуан заттарды (объектілерді) түсінуге болады. Мысалы, кітаптың бетіндегі барлық әріптердің жиыны, берілген теңдеудің барлық түбірлерінің жиыны, барлық оң сандардың жиыны, барлық көпмүшелердің жиыны, шеңбердің бойында жатқан барлық нүктелердің жиыны, сутегінің барлық атомдарының жиыны т. т. туралы айтуға болады.

Жиынды құратын заттардың әрқайсысын оның элементі деп атайды. Мысалы, нәрселерді санау процесі бізді натурал сандар 1, 2, 3,... жиынының ұғымына келтіреді. Егер $x$ M жиынның элементі болса, біз оны былай жазып көрсетеміз: $x \varepsilon$ M; егер элемент у M жиынына жатпайтын болса, оны біз былай белгілейміз: у $\bar{\varepsilon}$ M тек А жиынының элементтеріне ғана тән Т қасиет белгілі болса, А жиыны берілді дейміз.

Егер А жиынынын барлық элементтері В жиынынын да элементтері болатын болса, онда А жиынын В жиынының бөлігі дейді, біз мұны мынадай символмен

$$A \subset B$$

жазып көрсетеміз. Мәселен, N барлық натурал сандар жиыны болса, ал M барлық жұп сандар жиыны болса. онда M жиыны N жиынының бір бөлігі болады, яғни $M \subset N$.

Сонымен, жиынның элементтері тіпті әралуан заттар: әріптер, атомдар, сандар, нүктелер, бұрыштар т. т. болатындығы келтірілген мысалдардан көрініп тұр. Міне, бұл арадан жиындар теориясының өте-мөте кеңдігі, оның ғылымның (математика, механика, физика т. т.) көптеген салаларында қолданылатындығы өзінен-өзі айқын.

Жиынның ешбір элементі болмауы да мүмкін, мұндай жиынды құр жиын деп атайды. Мәселен, $x^2+1=0$ теңдеудің барлық нақты түбірлерінің жиыны – құр жиын.

Біздің келтірген мысалдарымыздағы жиындар өздерінің элементтерінің мөлшері жөнінде бәрі бірдей правода емес. Мәселен, кітаптың берілген бетіндегі әріптердің саны шектеулі, өйткені оларды бірден санап, қанша екенін білуге болады; сутегінің барлық атомдарының саны да шектеулі, өйткені оларды бірден санап білмегенмен, атомдардың санынан асып кететін санды әрқашан да жазып көрсетуге болады. Сонымен, әріптердің жиыны мен атомдардың жиыны шектеулі жиын болды. Ал енді шеңбердің бойында жатқан нүктелердің, барлық рационал сандардың, түзудің бойында жатқан нүктелердің жиындары – шексіз жиындар.

Шексіз жиын деп қандай жиынды айту керек, бұған тоқталмай, берілген шексіз жиындардың қайсысының элементтері көп, соны тексеру жолына көшейік. Мысалы, жұп сандар мен бүтін сандардың қайсысы көп? Түзу кесіндісінің бойында жатқан нүктелер мен квадрат ауданында жатқан нүктелердің қайсысының «саны» артық? Осы мәселелерге жауап беру үшін мынадай бір жай мысалды қарайық: Бір үлкен аудиторияның ішінде бірнеше орындықтар бар; лекция тыңдауға келген студенттердің саны артық па, әлде аудиториядағы орындықтардың саны артық па? Әрине, біз мұны тексеру үшін аудиториядағы орындықтарды, сонан соң коридорда күтіп тұрған студенттерді санаған болар едік. Бұл мәселені өйтпей-ақ та шешуге болады: егер аудиториядағы әрбір орындыққа тек бір ғана студент отыратын болса, керісінше, бір студентке тек бір-ақ қана орындық сәйкес келсе және мұндай операцияның нәтижесінде бос тұрған орындық болмаса, ал сыртта орынсыз қалған студент болмаса, онда аудиториядағы орындықтар мен студенттердің саны бірдей болғаны. Міне, осылай пар-парымен үйлестіру принципін өзара бірмәнді сәйкестік деп атайды. *Сонымен, егер шекті екі жиынның элементтерінің саны бірдей болса, онда олардың элементтерінің арасында өзара бірмәнді сәйкестікті тағайындауға болатын болды.*

Жұп сандар мен натурал сандардың мөлшерін салыстыру үшін оларды былай жазайық:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18,...

Бұл жазудан біз мынаны байқаймыз: жоғарғы қатардағы әрбір бүтін сан өзінің астында тұрған төменгі қатардың бір ғана жұп санымен үйлеседі, жоғарғы қатардағы және төменгі қатардағы сандардан ешбір парсыз қалып қоятын сандар да сонша болады. Мұндағы таңқаларлық іс мынау: төменгі қатардағы жұп сандар жоғарғы қатардағы натурал сандардың бір бөлігі, сөйтседағы екеуінің мөлшері бірдей. Мұнда бір ескере кететін жағдай мынау: жоғарыда келтірілген шексіз екі жиынның элементтерін пар-парымен үйлестіргенде қалай болса солай үйлестірмейміз (мұны тек шекті жиындарға ғана жасауға болады, мәселен, қай студент орындыққа отырады, оның бәрі бір), мәселен, төменгі қатардағы 2 жоғары қатардағы 2 мен, төменгі қатардағы 4 жоғары қатардағы 6 мен, сонан әрі қарай үйлессін десек, онда жоғары қатардағы тақ сандар парсыз қалып қояды. Міне, сондықтан қалай болса солай үйлестіруден бой тарту керек, яғни бір белгілі ретпен үйлестіру керек.

Егер берілген A мен B екі жиынның элементтерінің арасында өзара бірмәнді сәйкестік болса, онда мұндай жиындарды бір-біріне баламалы (эквивалент) жиындар деп атайды.

Егер екі жиын бір-бірімен баламалы болса, онда мұндай жиындардың элементтерінің саны бірдей болғаны.

Барлық натурал сандар жиынына баламалы (эквивалент) жиынды саналатын жиын деп атайды, былайша айтқанда, саналатын жиын деп элементтерін номерлеп мынадай

$$a_1,\ \ a_2,\dots\ \ a_n,\dots$$

шексіз тізбек түрінде жазуға болатын жиынды айтады.

Егер жиынның элементтеренің саны барлық натуралдардың санынан артық болса, ондай жиын саналатын жиын болмайды, сондықтан мұндай жиынды саналынбайтын жиын деп атайды. Мәселен, шеңбердің бойында, квадраттың ауданында жатқан нүктелердің, ұзындығы қандай болса да түзудің кесінділерінің барлық нүктелерінің жиындары саналынбайтын жиындарға мысал болып табылады.

## §2 Рационал сандар

Адамзат мәдениетінің тууымен және оның дамуымен сан ұғымындай біте қайнасқан басқа ұғымды көрсету немесе айту, сірә, қиын болар. Егер адамзаттың қолдануынан осы ұғымды алып тастасақ, не болар еді? Сөз жоқ, одан оның рухани өмірі, тәжірибелік қайраты әлсіз болған болар еді. Ол уақытта есеп-қисап жұмысын жүргізу, еңбек нәтижелерін қорыту жалпы алғанда, өлшеулер жүргізу мүмкіндіктері мүлде болмас еді.

Сонымен, адамзаттың тұрмысында сан ұғымы – ең керекті, ең маңызды, ең қажетті ұғымдардың бірі.

Математика ғылымының негізгі құралы – натурал сандар:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots$$

Бұлардың негізгі құрал деп аталу себебі басқа сандар, мәселен, рационал, иррационал сандар (олар туралы сөз кейін болады) натурал сандардың туындысы болып табылады. Басқаша айтқанда, натурал сандар математика ғылымының мықты фундаменті (іргесі) болады.

Натурал сандар жеке нәрселерді санаудың нәтижесімен пайда болған. Олай болса, нәрселерді санау, яғни олардың мөлшерлерін сипаттау, математикадағы ең бірінші амал болатын болды.

Натурал сандар, саналатын объектілердің (нәрселердің) жеке өзіне тән түрлі қасиеттермен байланысты емес.

Тәжірибе мен теориялық мұқтаждығын, талабын толық қанағаттандыратындай күшті құрал жасау үшін, натурал сандармен байланыстыра отырып, жалпы сан ұғымын кеңіту керек. Натурал сандар шектеулі жиындар құратын объектілерді санаудың нәтижесінде пайда болады деп біз айтып кеттік. Күнделікті жұмыста бір-бірінен жеке бөлініп тұрған объектілерді санау ғана емес, мәселен, ұзындық, аудан, көлем, салмақ, уақыт т.т. сияқты шамаларды өлшеуге тура келеді. Екінші жағынан натурал сандарға қосу, азайту, көбейту және бөлу амалдарын жүргізуге тура келеді. Осы айтылған амалдардың жүргізілу нәтижесінде мынадай қортындыға келеміз: біріншіден, натурал сандар шексіз (бұлардың ішінде ең үлкені жоқ), екіншіден, ноль, теріс және бөлшек сандар сияқты жаңа сандарды енгізіп, сандар ұғымын кеңітіп толықтыру керек. Қысқасын айтқанда, шамаларды өлшеу проблемасын санау проблемасына келтіру керек. Ол үшін біз алдымен метр, дециметр, сантиметр, килограмм, грамм, сағат минут, секунд сияқты өлшеу бірлігін еркімізше сайлап аламыз да, сонан соң өлшенетін шамада сайланып алынған бірлік неше рет болатынын есептейміз. Өлшенетін шамада сайланып алынған бірлік бүтін сан рет болуы да, болмауы да мүмкін. Жалпы алғанда, сайланып алынған бірлікпен қандай болсын өлшенетін шама абсолют дәл өлшенбейді, яғни шама бірлікпен еселі болмайды. Бұл жағдайда бастапқы бірлікті бірдей $q$ бірлікке бөліп, жаңа өлшеу бірлігін табамыз. Міселен, бастапқы бірлік 1 метр болса, оны 10-ға бөліп, дициметр бірлігін, жүзге бөліп сантиметр бірлігін табамыз.

Бастапқы бірлікті тең етіп $q$ бөлікке бөлгенен шығатын бірлік мынадай $\frac{1}{q}$ символмен белгіленеді. Егер өлшенетін шама жаңағы бірліктей $p$ есе болса, онда бұл шаманың өлшемі $\frac{p}{q}$ болады. Мұндай символды математикада бөлшек немесе қатынас деп атайды. Егер $p$ мен $q$ ортақ бөлгіші жоқ натурал сандар болса, онда $\frac{p}{q}$ символды рационал сан деп атайды.

Барлық оң, теріс бүтін сандардың, барлық оң, теріс бөлшек сандардың, нольдің жиынын рационал сандар жиыны деп атайды. Барлық рационал сандар жиынын былай белгілейді:

$$R\ \left\{\frac{p}{q}\right\},$$

мұндағы $p$ мен $q$ – өзара жай сандар.

Рационал сандарға жүргізілетін амалдар және олардың қасиеттері оқушыларға белгілі деп есептейміз, дегенмен рационал сандар жиынға тән келесі қасиеттерді айтып кетуге тура келеді.

1. Егер $a$ мен $b$ берілген түрлі рационал сандар болса, онда бұлардың арасында мына қатынастар $a < b$, немесе $a > b$ болуы керек, және егер $a < b$, ал $b < c$ болса, онда сөзсіз $a < c$ болады. Рационал сандардың мұндай қасиетін реттілік қасиет дейді.

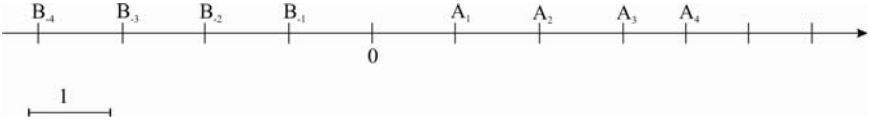
2. Егер $a$ мен $b$ сандары $(a < b)$ берілген түрлі рационал сандар болса, онда ол екеуінің арасында толып жатқан шексіз көп рационал сандар бар, мәселен, мына сандар:

$$c = \frac{a+b}{2}, \quad c_2 = \frac{a+c_1}{2}, \quad c_3 = \frac{a-\ c_2}{2}, \dots, c_n = \frac{a+c_n-1}{2}, \dots,$$

$a$ мен $b$-нің арасында жатады. Рационал сандардың мұндай қасиеттерін тығыздық қасиет дейді.

Бұл көрсетілген екі қасиеттен басқа рационал сандар жиыны төмендегі Архимед аксиомасын қанағаттандырады.

*Егер а мен b – кез келген оң рационал сандар болса, онда мына теңсіздікті nb > a қанағаттандыратын бүтін n саны әрқашан да табылады.*



1-чертеж.

Рационал сандарды түзудің нүктемелерін кескіндеуге болады. Түзу, оның кесіндісі, бұл кесіндінің ұзындығы деген мәселелер бізге белгілі деп ұйғарып, ұш-қиыры жоқ екі шеті де шексіздікке созылған бір түзуді қарайық. Осы түзудің жылжымай бір орнында тұратын нүктесін алып, оны *O* әрпімен белгілейік. Бұл нүктені бас нүкте деп атаймыз. *O* нүктесінің оң жағында жатқан түзудің бөлігіне оң бағыт, ал *O* нүктесінің сол жағындағы бөлігіне теріс бағыт беретін болып келісейік. Енді ұзындығы бірге тең кесінді алайық, әдетте мұндай кесіндіні масштаб (өлшем) деп атайды. (1-чертеж).

Бұдан кейін осы масштабты түзудің бойына *O* нүктесінен бастап, оңға және солға қарай өлшеп салайық; сонда мұның нәтижесінде түзу сызықтың бойында мынадай нүктелер табылады:

$$A_1, A_2, ..., A_n, ...$$

және

..., $B_{-n}$, $B_{-n+1}$, ..., $B_{-3}$, $B_{-2}$, $B_{-1}$. Бұл шыққан нүктелер мына сандардың $\pm 1, \pm 2, \pm 3 ... \pm n, ...$ геометриялық кескіні болады.

Егер масштабтың жартысын *O* нүктесінен тағы да оңға және солға қарай түзу бойына өлшеп салсақ, онда түзудің бойында мына сандарды

$$\pm\frac{1}{2}, \qquad \pm\frac{2}{2}, \ \pm\frac{3}{2}, ..., \pm\frac{n}{2}, ...,$$

кескіндейтін нүктелерді табамыз.

Ал, енді масштабтың $\frac{1}{m}$ бөлігін, *O* нүктесінің екі жағынан түзудің бойына өлшеп салсақ, онда *O* нүктесінің қашықтығы $\pm\frac{n}{m}$ сандармеу өрнектелетін нүктелер пайда болады. Міне, осы әдісті қолданып, бүкіл рационал сандарды кескіндейтін түзудің бойында жатқан нүктелерді табамыз. Бұл нүктелерді рационал нүктелер деп атайды. Ал, осы нүктелері сандар арқылы белгіленген түзуді сан осі деп атайды.

## §3. Иррационал сан ұғымы

1. Жоғарыда айтылған әдісті қолданып, түзудің бойына барлық рационал сандарды орналастырдық деп ұйғарайық. Сонда мынадай сұрақ туады: осы жолмен біз түзудің бойындағы барлық нүктелерді түгелдеп шықтық па?

Квадраттың диагоналы мен қабырғасы өлшемдес емес екендігі бізге элементар геометриядан белгілі. Дегенмен біз мұны дәлелдеп көрейік.

Егер квадраттың қабырғасы *a,* диагоналы $b$ болса, Пифагор теоремасы бойынша

$$b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,$$

бұл арадан

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2.$$

Ал рационал сандардың ішінде квадраты екіге тең сан жок. Мұны былай дәлелдейміз: «рационал сандардың ішінде квадраты екіге тең сан бар» деп, айтылып отырған пікірге қарсы ұйғарайық және ол сан $\frac{p}{q}$ болсын, мұнда $p$ мен $q$ - ортақ бөлгіші жоқ бүтін сандар, былайша айтқанда, $\frac{p}{q}$ қысқартылмайтын бөлшек. Сонымен, біздің қарсы ұйғаруымыз бойынша

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

немесе

$$p^2 = 2q^2$$

бұл арадан $p^2$ - жұп сан деген қорытындыға келеміз. Олай болса, $p$-нің өзі жұп сан. Сондықтан оны былай жазамыз: $p=2m$. Ендеше $4m^2 = 2q^2$ немесе $q^2=2m^2$. Соңғы теңдіктен q саны да жұп деген қорытынды жасауға болады. Сөйтіп $p$ де және q де жұп сандар болатын болды; демек, олардың ортақ бөлгіші бар, былайша айтқанда, $\frac{p}{q}$ қысқартылатын бөлшек.

Ал бұл біздің ұйғаруымызға қайшы келеді. Сонымен, рационал сандардың ішінде квадраты екіге тең сан бар деп ұйғару дұрыс болмай шықты. Олай болса, $\frac{b}{a}$ рационал сан емес.

Ендеше квадраттың диагоналы мен қабырғасы өлшемдес емес.

Егер қабырғасының ұзындығы алып отырған масштабқа тең квадраттың диагоналын *O* нүктесінен оңға және солға қарай түзудің бойына өлшеп салсақ, онда диагональдың ұшы түзудің бойындағы бағанағы белгіленген нүктелердің бірде-біреуіне сәйкес келмейді, яғни бағанағы нүктелерден тіпті басқа, бөтен нүкте келіп шығады. Сонымен, мына 1, 2 символға ешбір рационал сан сәйкес келмейді.

Сөйтіп, түзу сызықтың әрбір нүктесіне сәйкес рационал сан табыла бермейді және түзудің барлық нүктелерін кескіндеуге барлық рационал сандар жетпейді. Олай болса, сандар жиынын толықтырып, өрісін кеңіту керек. Ол үшін иррационал сандар ұғымын енгіземіз.

Иррационал сан деп қандай санды айтады? Міне, осы санның анықтамасын берейік. Иррационал санды анықтауда үш түрлі көзқарас бар; бұлардың барлығына бірдей тоқтамай, біреуін ғана қарастырамыз. Ол − иррационал санның Дедекиндше анықтамасы.

Барлық рационал сандар жиынын екі класқа бөлейік, біреуі *A* болсын, мұны төменгі немесе сол жақтағы класс дейміз; екіншісі *B* болсын, мұны жоғарғы немесе оң жақтағы класс дейміз. Бұл *A* мен *B* кластары төмендегі шарттарды қанағаттандыруы қажет: 1) әрбір рационал сан *A* мен *B*-ні біреуіне ғана жатуы керек: не А-ға, не *B*-ге; 2) *A* класына жататын әрбір рационал сан *B* класына жататын әрбір рационал саннан кем болуы керек Барлық рационал сандар жиынын осылай етіп екі класқа бөлуді рационал сандар жиынындағы қима деп атайды.

Бұлай етіп екі класқа бөлу − рационал сандар жиынында тіпті мүмкін нәрсе. Шынында, айталық *r* кез келген рационал сан болсын. *A* класына r-ден кіші барлық рационал сандарды, ал *B* класына *r* -ден үлкен барлық радионал сандарды, ал *B* класына *r*-ден үлкен барлық рационал сандарды жатқызайық. Сонда *r* бүкіл радионал сандардың жиынын, жоғарыда көрсетілген екі шартты толығымен қанағаттандыратын екі класқа бөледі.

*r* санын өзін не *A* класына, не *B* класына жатқызуға болады. Егер *r*-ді *A* класына жатқызсақ, онда ол *A* класының ішіндегі рационал сандардың ең үлкені болып табылады. Егер *r*-ді *B* класына жатқызсақ, онда ол *B* класын құратын рационал сандардың ішіндегі ең кішісі болып табылады.

Барлық рационал сандар жиынын осылай етіп екі класқа бөлгенде, төменгі *A* класын құрушы сандардың ішінде ең үлкені бар, ол *r*, онда *B* класын құратын сандардың ішінде ең кішісі жоқ немесе *B* класын құрушы сандардың ішінде ең кіші сан бар, ол *r*, бірақ онда *A* класында ең үлкен сан жоқ.

Тағы да бүкіл рационал сандар жиынын екі класқа бөлейік: біреуі *A,* екіншісі *B* болсын. Бұрынғыша *A* - төменгі класс, *B* - жоғарғы класс. *A* класына барлық теріс сандарды нольді және квадраты екіден кем он рационал сандарды жатқызалық та, *B* класына квадраты екіден артық он рационал сандарды жатқызалық.

Мысалы, 1,1 саны *A* класына жатады, өйткені $(1{,}1)^2 = 1{,}21 < 2$, ал 1,6 саны *B* класына жатады, себебі $(1{,}6)^2 = 2{,}56>2$.

Осылай етіп бүкіл рационал сандар жиынын екі класқа бөдуді ол жиындағы екінші типті қима дейді.

Осы қима жөнінде келесі теореманы дәлелдейік.

**Теорема.** *Бұл жолы A жиынын құратын рационал сандардың ішінде ең үлкені жоқ, B жиынын құратын рационал сандардың ішінде ең кішісі жоқ.*

*A* класын құратын рационал сандардың ішінде ең үлкен сан бар дел кері ұйғарайық және ол сан *a* болсын. Архимед аксиомасы бойынша

$$n(2-a^2) > 2a+1$$

теңсіздікті қанағаттандыратын үлкен *n* натурал саны әрқашан да табылады. Бұл теңсіздіктен

$$2-a^2 > \frac{2a}{n}+\frac{1}{n}$$

теңсіздігі шығады.

Егер кейінгі теңсіздік орындалатын болса, онда мына тенсіздік

$$2-a^2 > \frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}$$

сөзсіз орындалады. Бұл арадан

$$2 > a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} = \left(a + \frac{1}{n}\right)^2$$

немесе

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$$

$\left(a + \frac{1}{n}\right)$ санының квадраты 2-ден аз болғандықтан, бұл сан *A* класына жатады және *a* санынан артық. Олай болса, *A* класын құратын рационал сандардың ішінде ең үлкен сан бар, ол *a* деп теоремаға қарсы ұйғарғанымыз дұрыс болып шықпады. Міне осы қайшылық теореманың дұрыстығын дәлелдейді.

Енді теореманың *«B* класын құратын рационал сандардың ішінде ең кішісі жоқ» деген бөлімін дәлелдейік. Ол үшін алғашқыдай кері ұйғарайық: *B* класында ең кіші сан бар және ол *b* болсын. Тағы да Архимед аксиомасы бойынша

$$n(b^2 - 2) > 2b,$$

немесе

$b^2 - 2 > \frac{2b}{n}$ олай болса, $b^2 - 2 > \frac{2b}{n} - \frac{1}{n^2}$,

бұл арадан:

$$b^2 - \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} > 2 \text{ немесе } \left(b - \frac{1}{n}\right)^2 > 2.$$

Осы, кейінгі, теңсіздіктен біз мынаны байқаймыз: $b - \frac{1}{n}$ санының квадраты 2-ден артық, ендеше бұл сан *B* класына жатады. Ал $b - \frac{1}{n}$ саны *b*-ден кем, сондықтан *b* саны *B* класында ең кіші сан бола алмайды. Бұл да біздің ұйғаруымыздың дұрыс емес екендігін, теореманың дұрыстығын көрсетеді.

Жоғарыдағы айтылғандардан мынадай қорытындыға келуге болады.

Егер барлық рационал сандар жиынындағы қиманы алсақ, яғни бүкіл рационал сандарды екі класқа − төменгі класс *A*-ға және жоғарғы класс *B*-ге − бөлсек, төменгі кластың әрбір саны жоғарғы кластың әрбір санынан кем болып келсе, онда мынадай үш жағдай болуға мүмкін:

1) не төменгі *A* класында ең үлікен сан *r* бар, онда жоғарғы класта ең кіші сан болмайды;

2) не жоғарғы *B* класында ең кіші сан *r* бар, онда төменгі класта үлкен сан болмайды;

3) төменгі *А* класында ең үлкен сан, жоғарғы *В* класында ең кіші сан болмайды.

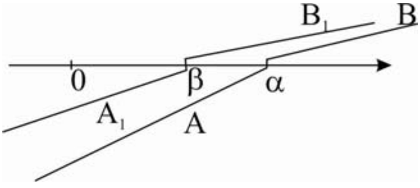
Егер 1 және 2-жағдайлар орындалса, онда рационал сандар жиынындағы қима *(А, В)* рационал *r* санын анықтайды, яғни бүкіл рационал сандар жиынын жоғарыдағыдай екі класқа бөлуші рациоиал *r* саны болды.

Егер 3-жағдай орындалса, онда қима (А, *В)* бір ғана иррационал санды анықтайды дейміз, яғни бүкіл рационал сандар жиынын жоғарыдағы көрсетілген екі класқа бөлуші рационал сан болмайды, иррационал сан болады. Біздің мысалға келтірген қима (А, *В)* мына $\sqrt{2}$ символға сәйкес келетін иррационал санды анықтайды. Сонымен, иррационал сан деп қандай санды айтады деген сұраққа былай жауап беруге болады: *иррационал сан деп бүкіл рационал сандар жиынындағы екінші типті қиманы анықтайтын санды айтады.*

Сонымен, рационал сандардағы олқылықты иррационал сандар енгізіп толтырамыз.

2. Иррационал сандарды өзара былайша салыстырамыз.

Егерде рационал сандар жиынындағы екі *(А, В)* және *($A_1$, В)* қималарының төменгі кластары ортақ сандардан құралса, яғни *А* класының әрбір саны $A_1$ класында жатса және $A_1$ класының әрбір саны *А* класында жатса, бұл екі қиманы бірдей дейміз. Бұл жағдайда осы қималардың анықтайтын сандары α мен β болса, оларды өзара тең (2-чертёж) дейміз де, былай жазамыз: α = β.



2-чертеж

Егер *А* класының ішінде $B_1$ класының сандары да болса, α-ны β-ден үлкен дейміз де, α>β деп жазамыз.

Егерде α - санын анықтаушы қиманың төменгі класында оң сандар болса, α-ны оң таңбалы сан дейді де, жоғарғы класында теріс сандар болса, α-ні теріс таңбалы сан деп атайды.

## §4. Нақты сандар жиыны

Барлық рационал және иррационал сандар бірігіп, нақты сандар жиынын құрады. Барлық нақты сандар жиынын *континуум* деп атайды.

Нақты сандар жиынының қасиеттеріне тоқтап өтейік.

1. *Нақты сандар жиыны − реттелген жиын, яғни егер* $\alpha<\beta$ *және* $\beta<\gamma$ *болса, онда* $\alpha<\gamma$ *болады.*

2. *Нақты сандар жиынын, рационал сандар жиынындай жаңа сандар қосып толықтыруға болмайды.* Бұл қасиетті нақты сандар жиынының үздіксіздігі дейді.

Соңғы қасиетті дәлелдеу үшін барлық нақты сандар жиынына қима жүргіземіз.

Барлық нақты сандар жиынын екі класқа бөлейік: Оның біреуін *Х* арқылы, екіншісін *У* арқылы белгілейік. Сонда әрбір нақты сан не *Х* класына, не *У* класына жататын болсын және *Х* класына жататын әрбір нақты сан *У* класына жататын әрбір нақты саннан кіші болсын.

2-қасиеттің орнына келесі теореманы дәлелдесек болады.

**Теорема** *Нақты сандар жиынындағы қима (Х, У) қандай болса да, төменгі Х класын құрушы нақты сандардың ішінде ең үлкен сан бар (онда У класындағы сандардың ішінде ең кішісі жоқ) немесе жоғарғы У класын құрушы нақты сандардың ішінде ең кішісі бар (онда Х класындағы нақты сандардың ішінде ең үлкені жоқ).*

Бұл теореманы нақты сандар жиынын үздіксіздігі турасындағы теорема деп атайды.

Тұжырымдалған теореманы былай дәлелдеуге болады. *Х* класын құрушы нақты сандардың ішіндегі барлық рационал сандар жиынын *А* арқылы, ал *У* класындағы барлық рационал сандар жиынын *В* арқылы белгілейік.

Сонда әрбір рационал сан не *А* класына, не *В* класына жатады және *А* класына жататын әрбір рационал сан *В* класына жататын әрбір рационал саннан кіші болады. Олай болса, *(А, В)* барлық рационал сандар жиынындағы қима болып табылады. Сондықтан бұл қима бір тиянақты *z* санын анықтайды. *z*- не рационал, не иррационал сан, қалай болған күннің өзінде ол бір нақты сан. Айтылып отырған *z* саны не *Х* класына, не *У* класына жатуы керек. Егер бұл сан *Х* класына жатса, онда ол осы класты құрушы сандардын ішіндегі ең үлкені болып табылады. Міне осыны дәлелдеу керек. Айталық, *z* саны *X* класындағы барлық сандардың ішіндегі ең үлкені болмасын. Онда *X* класындағы сандардың ішінен *z* санынан үлкен сан табылатын болады. Бұл сан *t* болсын. Сонымен, $t > z$. Осы *z* және *t* екі саннық арасында жатқан ең болмағанда бір рационал *r* саны табылады;

$$z < r < t$$

*r* саны *z* санынан артық болғандықтан, ол *r* саны *B* жиынына жатады. Ендеше *r* саны *У* класына жатады. Екінші жағынан *r* саны *X* класына жататын *t* санынан кіші, олай болса *r* саны *X* класына жатады. Сөйтіп, *r* саны бірдей екі класқа жататын болды. Ол мүмкін емес! Сонымен, «*X* класын құрушы сандардың ішіндегі ең үлкені *z* емес» деп ұйғару дұрыс болмайтын болды. Міне, осы қайшылық *X* класындағы сандардың ішінде ең үлкені *z* бар екенін дәлелдейді. Онда, әрине, *У* класын құрушы сандардың ішінде ең кішісі жоқ.

Егер *z* саны *У* класына жатса, онда ол осы кластағылардың ең кішісі болып табылады. Мұны да жаңағылардай делелдейміз.

2. Жоғарыдағы келтірілген теорема геометрия тілінде аксиома болып тұжырымдалады.

**Аксиома.** *Егер түзудің бойындағы барлық нүктелер екі класқа бөлінсе (олардың біреуі X, екіншісі У болсын), түзудің әрбір нүктесі не X класына, не У класына жатса және X класына жататын әрбір нүкте У класын құратын әрбір нүктенің сол жағында болса, онда не X класын құрушы нүктелердің ішінде ең оң жақтағы шеткі нүкте бар (бұл жағдайда У класында шеткі нүкте жоқ), не У класын құратын нүктелердің ішінде ең сол жақтағы шеткі нүкте бар (онда X класында шеткі нүкте жоқ).*

Бұл аксиоманы түзудің үздіксіздігі турасындағы Дедекинд аксиомасы дейді.

Жоғарыда дәлелденген теоремадан және Дедекинд аксиомасынан біз мынадай қорытындыға келеміз: рационал және иррационал сандардан басқа жаңа сандарды енгізіп, нақты сандар өрісін одан әрі кеңітуге болмайды. Қазіргі практикалық және теориялық мәселелердің санға келіп тірелетін барлық мұқтаждарын нақты сандар толық шешеді.

Әрбір рационал санға түзудің бір, тек бір ғана «рационал нүктесі» сәйкес келетінін және керісінше, түзудің әрбір «рационал нүктесіне» тек бір-ақ қана рационал сан сәйкес келетінін біз

2-параграфта айттық. Былайша айтқанда, бүкіл рационал сандар жиынымен, түзудің барлық «рационал нүктелері» жиынының арасында өзара бірмәнді сәйкестік тағайындалды және мұнда былай: егер рационал сан *a,* рационал *b* санынан кіші болса *(a<b),* оніда *a*-ға сәйкес келетін нүкте *b*-ге сәйкес келетін нүктенің сол жағында жатады және керісініше.

Жоғарыдағы келтірілген теоремаға және аксиомаға сүйеніп, бүкіл нақты сандар жиыны мен түзудің барлық нүктелері жиынының арасындағы өзара бірмәнді сәйкестікті тағайындауға болады, және мұнда былай: егер $z_1$, $z_2$ түрлі екі нақты сан болса және $z_1<z_2$, онда $z_1$ санға сәйкес келетін нүкте $z_2$ санға сәйкес келетін нүктенің сол жағында жатады. Сонымен, *бүкіл нақты сандар жиыны мен түзудің барлық нүктелерінің жиыны бір-бірімен парапар.*

Сондықтан нақты сандар жиынының орнына тузу нүктелерінің жиынын және керісінше, түзу нүктелері жиынының орнына нақты сандар жиынын қарастыруға болады.

Барлық нақты сандар жиынының үздіксіздігі жөніндегі теорема немесе түзудің үздіксіздігі жөніндегі аксиома математикалық анализдің фундаменті болып табылады.

## §5. Абсолют шама

Нақты *x* санның абсолют шамасын былай белгілейміз: $\backslash x\backslash$, Бұл шама мына шарттармен анықталады $|x| =x$, егер $x \geq o$ болса; $\backslash x\backslash = x$, егер $x<o$ болса.

$|x <a$ теңсіздігі - $a<x<a$ қос теңсіздікпен парапар. Шынында, егер $x>o$ болса, онда абсолют шаманың анықталу шарты бойынша $\backslash x\backslash = x$, сондықтан $x<a$. Екінші жағынан *x* оң сан болғандықтан, ол әрқашан да теріс саннан артық, яғни $x>-a$. Сонымен, $-a<x<a$.

$^1x|\leq a$ теңсіздігі $-a \leq x \leq a$ қос тенсіздікпен парапар. Бұл да жаңағыдай дәлелденеді.

Екі немесе бірнеше қосылғыштар қосындысының абсолют шамасы жеке қосылғыштардың абсолют шамалары қосындысынан кем, не оларға тең, яғни

$$|x+y+z\text{-}\cdots+u|\leq|x|+|y|+|z|-\cdots-|u|. \qquad (1)$$

Алдымен екі қосылғыш жағдайын қарайық. Бізге мына

$$|x+y|\leq|x|+|y| \qquad (2)$$

теңсіздіктің орындалатындығын дәлелдеу керек.

Егер $x+y\geq o$ болса, онда $x + y| = x + y$, ал $x \leq |x$ және $y \leq |y|$, сондықтан

$$x+y \leq |x| +|y|.$$

Егер $x+y<o$ болса, онда $|x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y)$, ал $-x\leq|x|$ және $-y \leq|\mathrm{y}|$, олай болса,

$$|x + y|\leq |x|+|y|.$$

Сонымен, (2) теңсіздіктің орындалатындығын дәлелдедік. Енді (1) теңсіздіктің дұрыстығын былай дәлелдеуге болады:

$$|x+y+z+\ldots+u|\leq|x|+|y+z+.|..+u|\leq x|+|y|+|z+\ldots+u|.$$

Сонан әрі қарай, ең ақырында, мынаған келеміз:

$$|x+y+z+\ldots+u|\leq|x|+|y|+|z|+\ldots|u|.$$

Айырманың абсолют шамасы азайғыш пен азайтқыштың абсолют шамаларының айырмасынан артық не оған тең, яғни

$$|x-y|\geq|x|-|y|.$$

Бұл теңсіздікті былай дәлелдеуге болады:

$$x = (x-y) + y,$$

бұл арадан

$$|x| = |(x - y) + y|<|x -y|+|y|$$

немесе

$$|x|-|y|\leq|x-y|.$$

Көбейтіндінің абсолют шамасы көбейткішердің абсолют шамаларының көбейтіндісіне тең, яғни

$$|xy|=|x|\cdot|y|.$$

Бөліндінің абсолют шамасы бөлінгіш пен бөлгіштің абсолют шамаларының бөліндісіне тең, яғни

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x}{y}\right|.$$

## § 6. Шектелген жиындар

Нақты сандардан тұратын бір $E$ жиынын қарайық.

Егер осы $E$ жиынын құратын нақты сандардың қайсысын алсақ та, оның шамасы бір $L$ санынан аспаса, онда, бұл жиынды жоғарғы жағынан немесе оң жағынан шектелген жиын деп атайды. Егер $E$ жиынын құратын нақты сандардың барлығы да бір $l$ санынан артық болса, онда бұл жиынды төменгі жағынан немесе сол жағынан шектелген жиын деп атайды.

$L$ санын және одан артық сандарды, $E$ жиынының *жоғарғы шекаралары* дейді, ал $l$ санын және барлық одан кіші сандарды $E$ жиынының *төменгі шекаралары* дейді.

Жоғарғы және төменгі жақтарынан шектелген жиынды *шектелген* немесе *шекараланған жиын* деп атайды. Осы ұғымға бірнеше мысалдар келтірейік.

1) $E$ жиыны келесі сандардан:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots,$$

тұратын болсын. Бұл жиын оң жағынан да, сол жағынан да шектелген, өйткені жиынды құрып тұрған сандардың қайсысын алсақ та, оның шамасы бірден аспайды және олардың барлығы да $\frac{1}{2}$-ден артық.

Келтірілген сандардан тұратын жиынның жоғарғы шекаралары 1 және бірден артық сандардың барлығы; ал төменгі шекаралары $\frac{1}{2}$ және $\frac{1}{2}$-ден кіші сандардың барлығы.

2) $E$ жиыны барлық натурал сандардан

1, 2, 3,..., n,...

тұрсын. Бұл жиын он жағынан шектелмеген, тек сол жағынан ғана шектелген. Сондықтан оны шектелген жиын деп айтуға болмайды. Бұл жиынның төменгі шекаралары − бір және бірден кем сандардың барлығы.

3) $E$ жиыны мына сандардан:

$$2, 1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \dots, 1 + \frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}, \dots$$

тұратын болсын.

Бұл жиын жоғарғы жағынан да, төменгі жағынан да шектелген. Жоғарғы шекаралары 2 және екіден артық сандардың барлығы; төменгі шекаралары $\frac{1}{2}$ және осы жартыдан кіші сандардың барлығы.

4) $E$ жиыны төменгі теңсіздіктерді

$$a \leq x \leq b$$

қанағаттандыратын барлық нақты $x$ сандардан тұрсын. Бұл жиын шектелген жиын, жоғарғы шекаралары $b$ және $b$-ден артық сандардың барлығы, ал төменгі шекаралары $a$ және $a$-кіші сандардың барлығы.

Жиынтық $E$ − шектелген жиын болсын.

*E жиынының жоғарғы шекараларының ең кішісін оның дәл жоғарғы шекаралығы немесе супремумы дейді және оны былай белгілейді: sup E.*

*E жиынның төменгі шекараларының ең үлкенін оның дәл төменгі шекаралығы немесе инфимумы дейді* және оны былай белгілейді:$inf\, E$.

Бірінші мысалда дәл жоғарғы шекаралық немесе $sup\,\mathrm{E} = 1$, ал дәл төменгі шекаралық немесе $\inf E = \frac{1}{2}$.

Екінші мысалда $supE = +\infty, infE = 1$.

Үшінші мысалда $supE = 2, infE = \frac{1}{2}$.

Төртінші мысалда $supE = b, infE = a$.

Бұл келтірілген мысалдардан біз мынаны байқаймыз: дәл жоғарғы және дәл төменгі шекаралықтар жиынның өзіне жатуы да және жатпауы да мүмкін.

Шектелген жиынның дәл шекаралықтары бола ма? Бұл сұраққа келесі теорема жауап болып табылады.

**Теорема**. *Егер $E|x|$ жиыны жоғары жағынан (төменгі жағынан) шектелсе, онда ол жиынның әрқашан да дәл жоғарғы (дәл төменгі)шекаралығы болады.*

Бұл теореманы дәлелдеу үшін екі жағдайды қарастыруға тура келеді:

а) $E$ жиынын құратын нақты $x$ сандардың ішінде ең үлкені болсын, оны $\bar{x}$ арқылы белгілейік. Онда $E$ жиынының барлық сандары мына $x \leq \bar{x}$ теңсіздікті қанағаттандырады, яғни $\bar{x}$ саны $E$ жиыны үшін жоғарғы шекаралық болып табылады.

Екінші жағынан $\bar{x}$ саны $E$ жиынының элементі, сондықтан бұл жиынның кез келген $L$ шекарасы үшін $\bar{x}$ саны мына $x \leq L$ теңсіздікті қанағаттандырады. Олай болса, $\bar{x}$ саны $-$ $E$ жиынының дәл жоғарғы шекаралығы.

б) $E$ жиынын құратын нақты $x$ сандардың ішінде ең үлкені жоқ болсын.

Барлық нақты сандар жиынына *(X, У)* қима жүргіземіз, Төменгі $X$ класына, $E$ жиынын құратын сандардан кіші және оларға тең барлық нақты сандардан жатқызайық, ал У класына $E$ жиынының барлық жоғарғы шекараларын жатқызамыз.

Сонымен, $X$ класына жататын нақты сандардың әрқайсысы, $y$ класына жататын нақты сандардың әрқайсысынан кіші болатын болды. Олай болса, *(X, y)* дедекиндтік қима, бұл қима бір нақты β санды анықтайды. Осы β саны *E* жиынының жоғарғы шекараларының ішіндегі ең кішісі болып табылатынына көз жеткізу қиын емес.

*E* жиынын құратын нақты *x* сандардың барлығы *X* класына жататын болғандықтан $x \leq \beta$. Ендеше β саны — *E* жиынының жоғарғы шекарасы. Ал β санын *У* класына жатқызуға болады, онда β сол кластағы ең кіші сан болып табылады; *У* класы *E* жиынының барлық жоғарғы шекараларынан тұрады, ендеше β − жоғарғы шекаралардың ең кішісі. Сондықтан анықтама бойынша $\beta = supE$.

Енді дәл жоғарғы шекаралықтардың қасиеттерін санап өтейік:

1) Егер $\beta$ саны *E {x}* жиынының дәл жоғарғы шекаралығы болса, онда $x \leq \beta$.

2) Алдын ала берілген оң ε саны қаншама аз болса да, *E* жиынын құратын сандардың ішінен мына $x > \beta - \varepsilon$ теңсіздікті қанағаттандыратын ең болмағанда бір нақты *x* санын табуға болады.

3) Егер $\alpha$ саны *E {x}* жиынының дәл төменгі шекаралығы болса, онда $x \geq \alpha$.

4) *E* жиынын құратын сандардың ішінен мына $x < \alpha - \varepsilon$ теңсіздікті қанағаттандыратын ең болмағанда бір *x* саны табылады, мұнда ε – кез келген оң құнарсыз аз сан.

## §7. Интервал мен сегмент

Математикалық анализде аяқ басқан сайын өте жиі кездесетін ұғымдар: интервал, сегмент және аймақ *(маңай)*.

*a* және *b* екі нақты санды қарайық, $a<b$ болсын.

*a* мен *b*-нің арасында жатқан барлық нақты сандар жиынын, яғни мына

$$a<x<b$$

теңсіздікті қанағаттандыратын барлық нақты *x* сандардың жиынын *интервал* деп атайды және оны былай белгілейді: $(a, b)$.

*a* санын интервалдың сол ұшы, *b* санын оның оң ұшы дейді, $b - a$ айырманы интервалдың ұзындығы дейді.

Геометрия жүзінде интервал $(a, b)$ түзудің бойындағы *a* мен *b*-ні кескіндейтін нүктелердің арасында жатқан барлық нүктелердің жиынына сәйкес келеді (3-чертёж).

3-чертеж

$a$ мен $b$ сандарынан және осы екі санның арасында жатқан барлық нақты сандардан тұратын жиынды *сегмент* немесе *кесінді* деп атайды (4-чертёж) және оны былай белгілейді: *[a b]*.

4-чертеж

Осы анықтама бойынша сегментті құратын нақты сандар келесі

$$a \leq x \leq b$$

теңсіздікті қанағаттандырады, Мұнда да $a$-ны сегменттің сол ұшы, $b$-ні оның оң ұшы дейді; $b-a$ айырманы сегменттің ұзындығы деп атайды.

Геометрия жүзінде сегмент *[a, b]* түзудің бойындағы ұштары $a$ нүктесі мен $b$ нүктесінде жатқан кесіндімен кескінделеді.

Интервал мен сегментті бір атпен *аралық* деп атайды.

Айталық, $x_0$ − берілген нақты сан, ал 0 – кез келген оң сан болсын, Центрі $x_0$ нүктесінде жатқан, ұзындығы 2δ-ға тең, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалды $x_0$ нүктесінің *аймағы* деп атайды.

Осы айтылғандарға бірнеше мысалдар келтірейік.

1) Мына $-1 < x < 1$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық нақты $x$ сандардың жиыны $(-1,\ 1)$ интервалын құрады және бұл интервалдың ұзындығы 2-ге тең.

2) Мына $o \leq x \leq \sqrt{2}$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық нақты $x$ сандардың жиыны $[0, \sqrt{2}]$ сегментті береді, бұл сегменттің ұзындығы $\sqrt{2}$-ге тең.

3) Бүкіл нақты сандардың жиыны шексіз $(-\infty, \perp \infty)$ интервалды құрады.

4) Берілген нақты $a$ саннан артық барлық нақты $x$ сандардың, яғни мына $x>a$ теңсіздікті қанағаттандыратын сандардың, жиыны мына *(a, ∞)* интервалды кескіндейді. Дәл осы сияқты, интервал *(−∞, b)* мынадай $x<b$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық нақты сандар жиынына сәйкес келеді.

5) Келесі $|x| \leq a$ тенсіздікті қанағаттандыратын барлық $x$ нақты сандардың жиыны *[−a, a]* сегментті кескіндейді.

6) Мына $|x - x_0| < h$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x$ нақты сандардың жиыны центрі $x_0$ нүктесінде, ұзындығы $2h$-қа тең, $(x_0 - h, x_0 + h)$ интервалды, яғни $x_0$ нүктесінің аймағын, кескіндейді.

***Жаттығулар***

1. Егер мына сандардың: 0,9; 0,99, 0,999; ... барлығы ***A*** класына, ал мына 1,1; 1,01; 1,001, ... сандардың барлығына ***B*** класына жатса, онда қима 1 санын анықтайтынын дәлелдеу керек.

2. Егер мына сандар: 0,3; 0,33; 0,333, ... ***A*** класына жатса, ал мына сандар 0,4; 0,34; 0,334, ... ***B*** класына жатса, онда қима рационал сан $\frac{1}{3}$-ді анықтайтынын дәлелдеу керек.

3 Иррационал $\sqrt{2}$ санын анықтайтын қима үшін ***A*** және ***B*** класына бір-бірінен айырмасы 0,1-ден кіші болатын сәйкес ***а*** және ***в*** рационал сандарын табу керек.

4. Иррационал $\sqrt{3}$ санын анықтайтын қима үшін ***A*** және ***B*** кластарынан бір-бірінен айырмасы 0,01-ден кіші болатын сәйкес ***а*** және ***в*** рационал сандарын табу керек.

5. $y + (-y) = 0$ екенін дәлелдеу керек.

# II ТАРАУ
# ШЕКТЕР ТЕОРИЯСЫ

## § 1. Айнымалы және тұрақты шамалар

Ғылымның өзінде болсын немесе күнделікті тәжірибелік істе болсын алуан түрлі шамалармен кездесіп отырамыз. Табиғаттың қандай болсын құбылысын сипаттайтын шамалар бірқалыыпты болып тұрмайды, олардың кейбіреулері көп өзгерістерде балғанда, кейбіреулері бір күйде болады. Мәселен, бір тығыз жабылған ыдыстың ішіндегі газды қыздырсақ, онда газдың көлемі мен молекулаларының саны өзгермейді, ал оның температурасы мен серпімділігі өзгереді, былайша айтқанда, ылғи үлкен мәндерді қабылдайды, яғни өсіп отырады.

Табиғат құбылысын сипаттайтын шамалардың барлығына тән қасиет мынау: олардың барлығында өлшену қабілеттілігі бар.

Оларды өлшеу нәтижесі әрқашан да бір дерексіз сан болады. Осы дерексіз санды *шаманың мәні* деп атайды.

Математика жаратылыстану ғылымының және техниканың күшті құралы екендігі үстіміздегі дәуірде әйгілі болып отыр.

Табиғат құбылыстарындағы және техникалық процестердегі шамаларды және олардың арасындағы өзара байланыстылықты тереңірек зерттеу, білу үшін математика ғылымы күшті аппарат (құрал) жасау керек. Міне, осы аппарат *математикалық анализ* болады. Математикалық анализді өзгеруші шамалар турасындағы математикалық ілім деп кең мағынада айтуға болады. Олай болса, математикалық анализдің бірінші негізгі ұғымы айнымалы шама ұғымы болу керек.

*«Математикадағы жаңа кезең декарттық айнымалы, шама болды. Осының арқасында математикаға қозғалыс пен диалектика енді, және тағы да осының арқасында дифференциалдық, интегралдық есептеулердің кешікпей-ақ пайда болуы қажет болды»*[1]*...*

Математикалық анализде шамалардың нақты сапалық қасиеттеріне айтарлықтай көңіл бөлінбейді, мұнда шамалар абстракт түрде зерттеледі. Міне, осының арқасында математикалық анализдің қортындылары тіпті алуан түрлі нақты шамаларды зерттеуге қолданылады.

Сонымен, математикалық анализ шамаларды екіге бөледі: тұрақты және айнымалы.

Құбылыстағы әрбір шама, тұрақты ма немесе айнымалы ма, бәрі-бір, математикада әрқашан әріппен белгіленеді.

Тұрақты шама деп зерттеу процесінде ылғи бір ғана тиянақты, сандық мәнді сақтап тұратын $a, b, c, \ldots$символын айтады.

Мысалы, шеңбердің ұзындығы мен диаметрінің қатынасы әрқашан тұрақты және $\pi$-ге тең; үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы әрқашан тұрақты, 180°-қа тең. Жарықтың вакуумдегі тарау жылдамдығы да тұрақты шаманың мысалы бола алады.

*Айнымалы шама* деп зерттеу процесінде түрлі сандық мәндер берілетан $x, y, z,..,$ символды айтады.

Айнымалы шамаларға мысалдар тіпті көп.

---

[1] Ф. Энгельс, Диалектика природы, 1948, 208-бет

Дүние жаппай даму және өзгеру заңына бағынғандықтан, оның құбылысын сипаттайтын шамалардың көпшілігі айнымалы болады. Мәселен, атмосфера қысымы, ауаның температурасы, самолёттің жылдамдығы, күннің көкжиектен (горизонттан) биіктігі т.т. айнымалы шамалар болып табылады.

Мұнда бір ескертіп кететін мәселе мынау: шама бір жағдайда тұрақты, екінші бір жағдайда айнымалы болып қаралуы мүмкін. Мәселен, ауырлық күштің үдеуі жердің бір бетінде тұрақты болғанымен, оның мәні екінші бір орында басқаша болады, өйткені ол ендікке тәуелді.

Зерттеу процесінде тек қаралып отырған есептің шарттарына тұрақты мәнді сақтайтын, ал есеп шарттарының өзгеруімен байланысты басқа бір тиянақты мәнді қабылдайтын тұрақты шаманы параметр деп атайды.

Мәселен, математикалық маятниктің тербеліс периодын өрнектейтін формуладағы

$$\gamma = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\mathrm{g}}}$$

$2\pi$ − абсолют тұрақты, $l$ мен $T$ − айнымалылар, ал $\mathrm{g}$ − параметр.

Математақалық анализдің зерттейтін объектісі − айнымалы шамалар. Ғылымның бұл саласы табиғатты танып-білуде күшті құрал болып табылады.

## §2. Сан тізбектері

Айнымалы $x$ өзінің өзтеру процесінде келесі мәндерді

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots \qquad (1)$$

қабылдайтын болсын, олардың бәрі де нөмерленген және осы қабылдайтын өсу тәртібі бойынша орналасқан болсын. Бұл мәндердің ішінде ең соңғысы жоқ. Егер $n > m$ болса, онда $n$ номерге сәйкес келетін мән $x_n$ $m$ номерге сәйкес келетін $x_m$ мәннен кейін келеді немесе бәрібір $x_m$ мән, $x_n$. мәннен бұрын келеді дейміз.

Айнымалы $x$-тің осындай мәндерінің жиынын *тізбек* деп атайды. Ал

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

сандардың әрқайсысын тізбектің *мүшелері* деп атайды.

(1) тізбектің барлық мүшелерін құру үшін, оның $n$-інші мүшесін, яғни жалпы $x_n$ мүшесін білу керек.

(1) тізбектегі мәндерді қабылдайтын айнымалы $x$-тің орнына жалпы $x_n$ мүшені алған қолайлы.

Орта мектепте жүретін элементар математикадан тізбек ұғымы оқушыларға белгілі болу керек. Дегенмен бірнеше мысалдар келтірейік:

1) Мынадай тізбекті: $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1)d, \ldots$ қарайық. Бұл тізбек арифметикалық прогрессия жасайды, жалпы мүшесі $x_n = a + (n - 1)d$.

2) Келесі тізбек $a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots aq^{n-1}, \ldots$ геометриялық прогрессияны береді, мұның жалпы мүшесі

$$x_n == aq^{n-1}.$$

3) Шеңбердің ұзындығын анықтауда оған іштей және сырттай дұрыс көпбұрыштар сызылады, олардың қабырғаларының санын шексіз еселегенде келесі екі тізбек шығады:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$$
$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$$

Мұнда бірінші тізбек іштей сызылған дұрыс көпбұрыштарының периметрлерінен, екінші тізбек сырттай сызылған дұрыс тікбұрыштардың периметрлерінен құралған.

*Егер алдын ала берілген оң құнарсыз аз ε санына сәйкес соншалық үлкен* $N = N(\varepsilon)$ *саны табылып, осы N санынан сызық n номерлерден (n>N) бастап келесі теңсіздік*

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{2}$$

*орындалатын болса, тұрақты a саны айнымалы* $x_n$*-нің немесе (1) тізбектің шегі деп аталады.*

Тұрақты $a$ саны айнымалы $x_n$-нің немесе (1) тізбектің шегі болып табылады деген фактіні былай жазамыз:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ немесе } x_n \to a.$$

Мұндағы шек таңбасы *lim* латынның *limes* деген сөзінен кысқартылып алынған, *limes* − шек.

Егер осы $a$ шек бар болса, онда (1) тізбекті *жинақты тізбек* деп атайды.

*Жоғарыда келтірілген анықтаманы қысқаша былай тұжырымдауға болады. Егер айнымалы x пен тұрақты a санының айырмасының абсолют шамасы белгілі бір номерден бастап кез келген оң мейлінше аз ε санынан кіші бола берсе, тұрақты a санын айнымалы x-тің немесе (1) тізбектің шегі дейміз.*

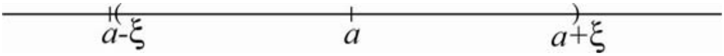
(2) теңсіздік мынадай

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon, \quad n > N \tag{3}$$

қос теңсіздікпен парапар екені бізге белгілі. Екінші жағынан $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ интервалы *a* нүктесінің аймағы болып табылады. Міне, осыны еске алып, жоғарыда берілген анықтаманы үшінші түрде былай тұжырымдауға болады: *егер алдын ала берілген оң құнарсыз аз ε санына сәйкес соншалық үлкен* $N = N(\varepsilon)$ *саны табылып, тізбектің номерлері N санынан артық* $(n > N)$ *барлық мүшелері мына* $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ *аймақтың ішінде жататын болса, онда тұрақты а санын* $x_n$*-нің немесе (1) тізбектің шегі деп атайды.*

Осы соңғы анықтамадан біз мынадай қортындыға келеміз:

(1) тізбектің мына $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ аймақтың сыртында жатқан мүшелерінің саны шектеулі де, ішінде жатқан мүшелердің саны шексіз (5-чертёж).



5-чертеж.

Жоғарыда берілген анықтамаға мысал ретінде келесі тізбекті қарайық:

$$\frac{5}{7}, \frac{8}{11}, \frac{11}{15}, \frac{14}{19}, \frac{17}{23}, \dots, \frac{3_n+2}{4_n+3}, \dots$$

Бұл тізбектің жалпы мүшесі немесе айнымалы

$$x_n = \frac{3_n+2}{4_n+3},$$

Қарастырылып отырған тізбектің шегі $\frac{3}{4}$ екендігін дәлелдейік. Айталық, ε – алдын ала берілген оң құнарсыз аз сан болсын. Шектің анықтамасы бойынша мына теңсіздік

$$\left|x_n - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{3_n+2}{4_n+3} - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon \tag{4}$$

орындалу керек. Бұл арадан

$$\frac{1}{16_n+12} < \varepsilon \text{ немесе } n > \frac{1}{16}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 12\right) \text{ болады.}$$

Сонымен, (3) теңсіздік мына

$$N = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 12\right)$$

саннан артық *n* номерлерден бастап орындалатын болды. Олай болса $\frac{3}{4}$ қарастырып отырған тізбектің шегі болып табылады.

Мәселен, $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ болса, онда

$$\left|x_n - \frac{3}{4}\right| < \frac{1}{1000}, \qquad (5)$$

$n > N = \frac{1}{16}(1000 - 12) = 61{,}75,$ яғни $n = 62{,}63{,}64, \ldots$

Сонымен, (5) теңсіздік 62-нші номерден бастап орындалатын болды.

Мына $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{1000}, \frac{3}{4} + \frac{1}{1000}\right)$ интервалдың сыртында жатқан тізбектің мүшелерінің саны 61, ал 62-нші номерден бастап тізбектің барлық қалған мүшелері осы интервалдың ішінде жатады.

## §3. Біркелкі тізбектер

1. Келесі сан тізбегі берілсін:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ldots \qquad (6)$$

Егер $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \cdots$ болса, (6) тізбекті үдеме тізбек деп атайды.

Ал, егер $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_n > \cdots$ болса, оны кеміме тізбек деп атайды.

Егер $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_n \le \cdots$ болса, (6) тізбекті кемімейтін тізбек дейді, ал, егер $x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \cdots \ge x_n \ge \cdots$ болса, үдемейтін тізбек дейді.

Үдеме және кеміме тізбектерді бір есіммен атағанда *біркелкі тізбек* деп атайды.

Мәселен, шеңберге іштей сызылған дұрыс көпбұрыштардың периметрлері үдеме тізбекті құрады, ал шеңберге сырттай сызылған көпбұрыштардың периметрлері кеміме тізбекті құрады.

Біркелкі тізбек жөнінде келесі екі теореманы дәлелдеуге болады.

**1-теорема**. *Жоғарғы жағынан шектелген үдеме тізбек әрқашан өзінің дәл жоғарғы шекаралығына жинақты болады.*

Теореманың шарты бойынша (6) тізбек жоғарғы жағынан шектелген, сондықтан оның дәл жоғарғы шекаралығы болады, оны $\beta$ арқылы белгілейік. $sup\{x_n\} = \beta$.

Дәл жоғарғы шекаралықтың бірінші қасиеті бойынша $x_n \le \beta$, онда $x_n < \beta + \varepsilon$. Екінші қасиеті бойынша осы $\{x_n\}$ жиынды құратын элементтердің ішінен келесі $x_n > \beta - \varepsilon$ теңсіздікті қанағаттандыратын ең болмағанда бір $x_n$ элемент табылады. Бұл арадан біз мынадай қорытындыға келеміз: алдын ала берілген оң құнарсыз аз *ε* санына сәйкес *N=N(ε)* саны табылып, осы *N* санынан артық *n* номерлер үшін келесі теңсіздік

$$\beta - \varepsilon < x_n < \beta + \varepsilon$$

орындалады. Бұл теңсіздіктің орындалуы β саны қарастырылып отырған үдеме тізбектің шегі болатындығын дәлелдейді.

**2-теорема**. *Төменгі жағынан шектелген әрбір кеміме тізбек әрқашан өзінің дәл төменгі шекаралығына жинақты болады.*

Бұл теорема да жаңағы теоремаша дәлелденеді.

Мысалдар келтірейік.

Айнымалы $x_n$ келесі мәндерді:

$$x_1 = \sqrt{a}, \qquad x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \qquad x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots$$

$$x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots}}}, \dots$$

қабылдайтын болсын, мұнда *a>o.* Бұл тізбектің үдеме екендігі өзінен-өзі айқын. Тізбектің берілуінен

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$$

келіп шығады немесе

$$x_{n+1}^{\overline{2}} = a + x_n.$$

Егер (7) теңдіктегі $x_{n+1}$-нің орнына $x_n$-ні қойсақ, онда теңдік мына теңсіздікке

$$x_n^{\overline{2}} - x_n - a < 0$$

айналады. Теңсіздіктің сол жағында тұрған квадрат үшмүшені жіктесек,

$$\left(x_n - \frac{\sqrt{4a+1+1}}{2}\right)\left(x_n + \frac{\sqrt{4a+1-1}}{2}\right) < 0. \qquad (8)$$

(8) теңсіздіктің сол жағындағы екінші көбейткіш оң, олай болса

$$x_n - \frac{\sqrt{4a+1+1}}{2} < 0,$$

бұл арадан

$$x_n < \frac{\sqrt{4a+1+1}}{2}.$$

Сонымен, қарастырып отырған тізбек оң, яғни жоғарғы жағынан шектелген болды, олай болса бұл тізбектің шегі бар.

Енді осы шекті табу үшін (7) тендіктің екі жағынан $n$-ді шексіздікке ұмтылдырып, шек аламыз.

Сонда

$$\xi^2 = \xi + a,$$

өйткені

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

Кейінгі квадрат теңдеуді шешіп табамыз:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi = \frac{\sqrt{4a+1+1}}{2}$$

2. Нольге тартылушы (жиырылушы) сегменттер принципі деп аталатын теореманы қарайық.

**Теорема.** *Егер бірінің ішінде бірі жатқан сегменттер тізбегі*

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_{3,} b_3], \dots [a_n, b_n], \dots \qquad (9)$$

*берілсе және сегменттердің номері n шексіздікке ұмтылғанда, ұзындықтары нольге ұмтылса, онда осы n саны, қандай болса да, сегментгердің бәріне ортақ бір, тек қана бір нүктесі болады, яғни* $a_n \le \xi \le b_n$.

Бұл теореманы геометрия жүзінде түзудің үздіксіздігі жөіндегі Кантор аксиомасы деп атайды. (9) сегменттердің сол жақ ұштары келесі теңсіздіктерді

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \le \cdots < b,$$

ал оң жақ ұштары мына теңсіздіктерді

$$b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge \cdots \ge b_n \ge \cdots > a,$$

қанағаттандырады. Демек, (9) сегменттердің сол жақ ұштарын жоғарғы жағынан шектелген үдеме тізбек құрады, ол оң жақ ұштары төменгі жағынан шектелген кеміме тізбек құрады. Сондықтан мына $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ және $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ шектер сөзсіз бар.

Теореманың шарты бойынша

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

немесе бұл арадан

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \xi.$$

Сегменттердің сол жақ ұштарынан құралған тізбек үшін $\xi$ саны дәл жоғарғы шекаралық болып табылады, сондықтан $a_n \lneqq \xi$ ал сегменттердің оң жақ ұштарынан тұратын тізбек үшін $\xi$ саны дәл төменгі шекаралық болып табылады, олай болса $b_n \ge \xi$. Сонымен, $n$ саны қандай болса да

$$a_n \le \xi \le b_n.$$

Сөйтіп, (9) тізбектегі барлық сегменттерге ортақ ξ нүктесінің бар екендігі дәлелденді. Енді осындай нүктенің жалғызақ екенін дәлелдейік. Ол үшін қарастырылып отырған сегменттерге ортақ, ξ-ден басқа, тағы бір $\eta$ нүктесі бар деп ұйғарайық. Осы екі нүктенің арасындағы қатыс былай болсын: $\xi<\eta$. Бұл нүктенің екеуі де барлық сегменттерге ортақ, яғни

$$a_n \leq \xi < \eta \leq b_n,$$

бұл арадан

$$b_n - a_n > \eta - \xi.$$

Кейінгі теңсіздіктің орындалуы теоремада айтылған «номерлері шексіз өскен сайын сегменттердің ұзындықтары нольге ұмтылады» деген шартқа қайшы келеді. Міне, осы қайшылық сегменттердің бәріне бірдей ортақ екі нүкте бар деп ұйғарудың дұрыс емес екендігін көрсетеді.

## §4. *e* саны

1. Математикалық анализдің алуан түрлі мәселелерінде үлкен роль атқаратын, бір маңызды санға келтіретін мынадай бір біркелкі тізбекті қарайық. Айнымалы $x$ келесі мәндерді

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \dots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \dots \qquad (10)$$

қабылдасын. (10) тізбектің жалпы мүшесі немесе айнымалы $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Алдымен біз (10) тізбектің үдеме тізбек екенін дәлелдейік (мұны бірден байқау қиын, өйткені дәреже көрсеткіш өскен сайын, дәреженің негізі кемиді). Ол үшін тізбектің жалпы мүшесін алып, Ньютон биномы формуласы бойынша жіктеп жазамыз:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} +$$
$$+ \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

Бұл теңдікті былай түрлендіріп жазуға болады:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (11)$$

(11) теңдіктің оң жағында тұрған қосылғыштардың барлығы да оң. Енді осы теңдіктегі $n$-нің орнына $n+1$ қойып табамыз:

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Егер $x_n$ мен $x_{n+1}$-ді бір-бірімен салыстыратын болсақ, онда $x_{n+1}$ өрнегінде бір қосылғыштың саны артық, өйткені $x_n$ өрнегіндегі барлық қосылғыштардың саны $n+1$, ал $x_{n+1}$ өрнегіндегі қосылғыштардың саны $n+2$. Екінші жағынан $x_{n+1}$ өрнегіндегі қосылғыштардың әрқайсысы (үшінші номерден бастап) $x_n$ өрнегіндегі сәйкес қосылғыштардың әрқайсысынан артық. Олай болса $x_n < x_{n+1}$. Сонымен, (10) тізбек үдеме тізбек болды. Енді осы тізбектің жоғарғы жағынан шектелген тізбек екенін көрсетейік.

(11) формуладағы әрбір жақшаның ішіндегі сандардың орнына 1-ді қойсақ, тендік теңсіздікке айналады:

$$x_n<2+\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{3!}+\tfrac{1}{4!}+\cdots+\tfrac{1}{n!}.$$

Ал

$$\frac{1}{2!}=\frac{1}{2},\frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2},\frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ендеше,

$$x_n<2+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{2^3}+\cdots+\tfrac{1}{2^{n-1}}.$$

Кейінгі теңсіздіктің оң жағы кеміме геометриялық прогрессия, сондықтан

$$x_n<2+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2+1-\frac{1}{2^n}=3-\frac{1}{2^n}.$$

Сонымен, $n$ қандай болса да

$x_n<3$ болатын болды.

Бұл теңсіздіктің орындалуы (10) тізбектің жоғарғы жағынан шектелгендігін көрсетеді.

Сөйтіп, қарастырылып отырған (10) тізбек үдеме және оң жағынан шектелген тізбек болды, олай болса бұл тізбектің тиянақты шегі бар. Осы шекті *е саны* деп атайды. Сонымен,

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \qquad (12)$$

Тағы да $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ айнымалыны қарайық.

Егер бұл айнымалының номері *n* тек натурал сандарды қабылдап, шексіздікке ұмтылса, онда оның тиянақты шегі болатынын дәлелдедік.

Егер *n* кез келген сандарды қабылдап, шексіздікке ұмтылса, онда да $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ айнымалының шегі *e* болатынын дәлелдейік.

*n* оң рационал немесе иррационал мәндерді қабылдап, шексіздікке ұмтылатын болсын. Алдымен осы жағдайды қарайық. *n*-ге жуық бүтін оң санды *m* арқылы белгілесек,

$$m < n < m+1;$$

бұл арадан

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{n} > \frac{1}{m+1}.$$

Теңсіздіктің әрбір жағына бір бірден қосайық, сонда

$$1+\frac{1}{m} > 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{m+1},$$

бұл арадан

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m.$$

немесе

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\left(1+\frac{1}{m}\right) > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} : \left(1+\frac{1}{m+1}\right) \qquad (13)$$

Егер *n* шексіздікке ұмтылса, онда бүтін сандар, *m* және *m+1*, оларда шексіздікке ұмтылады. (12) теңдік бойынша.

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e, \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} = e.$$

Ал

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right) = 1, \quad \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right) = 1.$$

*n*-ді шексіздікке ұмтылып, (13) теңсіздіктердің әрбір жағынан шек алсақ:

$$e \geq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq e.$$

Сондықтан

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Біз тағы да (12) теңдікке келдік.

Енді *n* теріс рационал немесе иррационал мәндерді қабылдап, шексіздікке ұмтылсын, яғни $n \to -\infty$. Онда

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1-\frac{1}{r}\right)^{-r} = \left(\frac{r-1}{r}\right)^{-r} = \left(\frac{r}{r-1}\right)^{r} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{r-1}\right)^{r-1}\left(1+\frac{1}{r-1}\right).$$

Мұнда $r$ – оң сан, сондықтан

$$\lim_{r\to\infty}\left(1+\frac{1}{r-1}\right)^{r-1} = e,$$

ал

$$\lim_{r\to\infty}\left(1+\frac{1}{r-1}\right) = 1.$$

Сонымен, бұл жолы да

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

Сөйтіп,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

(14) теңдіктегі $\frac{1}{x}$-тің орнына $\alpha$-ны алсақ, яғни былай ұйғарсақ $\frac{1}{x} = \alpha$ онда

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \qquad (15)$$

2. Енді осы *e* санының жуық мәнін қалай табуды көрсетейік. Ол үшін жалпы мүшесі мына түрдегі

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad (16)$$

тізбекті қарайық. Бұдан кейін келесі теңдікпен

$$y_m = x_n + \frac{1}{n!n} \qquad (17)$$

анықталатын айнымалы $y_n$-ді алайық.

(17) теңдіктен теңсіздіктің

$$y_m > x_n$$

болатыны көрініп тұр. Енді біз *m* мен *n* сандары қандай болса да мына теңсіздіктің

$$y_n > x_n \qquad (18)$$

орындалатынын дәлелдейік. Егер $m \geq n$ болса, онда (18) теңсіздіктің орындалуы өзінен-өзі айқын. Сондықтан біз мына $m<n$ жағдайды қарауымыз керек. $n-m=p$ болсын, сонда бұл арадан $n=m+p$.

$x$ бұрынғыша (17) теңдікпен өрнектеледі: Сондықтан

$$x_n = x_{m+p} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} + \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \cdots + \\ + \frac{1}{(m+p)!} \qquad (19)$$

Ал

$$y_m 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} + \frac{1}{m!m} \qquad (20)$$

(20) теңдіктен (19) теңдікті алып табамыз:

$$y_m - x_n = \frac{1}{m!m} - \frac{1}{(m+1)!} \ \frac{1}{(m+2)!} - \cdots - \frac{1}{(m+p)!} = \frac{1}{m!m} - \qquad (21) \\ - \frac{1}{(m+1)!}\left[1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \cdots + \frac{1}{(m+2)(m+3)\ldots(m+p)}\right]$$

Егер (21) теңдіктің оң жағында тұрған квадрат жақшалардың ішіндегі бөлшектердің бөлімдеріндегі әрбір көбейткіштерді *m+1* мен айырбастасақ, (21) теңдік келесі теңсіздікке айналады:

$$y_m - x_n > \frac{1}{m!m} - \frac{1}{(m+1)!}\left[1 + \frac{1}{(m+1)} + \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+1)^3} + \cdots + \right. \\ \left. + \frac{1}{(m+1)^{p-1}}\right]$$

Квадрат жақшалардың ішінде тұрған өрнек кеміме геометриялық прогрессияның қосындысы, олай болса

$$y_m - x_n > \frac{1}{m!m} - \frac{1}{(m+1)!} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(m+1)^p}}{1 - \frac{1}{m+1}} \qquad (22)$$

Егер (22) теңсіздіктің оң жағындағы екінші бөлшектің алымын 1 мен ауыстырсақ, одан теңсіздік нығаяды. Сонымен,

$$y_m - x_n > \frac{1}{m!\,m} - \frac{1}{(m+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}} = \frac{1}{m!\,m} - \frac{1}{m!\,m}$$

яғни

$$y_m - x_n > 0 \text{ немесе } y_m > x_n,$$

теңсіздік дәлелденді. *e* саны айнымалы $x_n$-нің дәл жоғарғы шекаралығы, сондықтан $x_n \leq e$. Екінші жағынан әрбір $y_n$ барлық $x_n$-дерден артық, олай болса, $y_n$ айнымалы $x_n$-нің жоғарғы шекарасы, сондықтан

$$e \leq y_n.$$

Сөйтіп,

$$x_n \leq e \leq y_m,$$

немесе

$$x_n \leq e \leq x_n + \frac{1}{n!\,n},$$

бұл арадан

$$0 < e - x_n < \frac{1}{n!\,n}.$$

(17) теңдікті еске алып табамыз:

$$0 < e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n!n} \qquad (23)$$

(23) теңсіздіктен біз мынадай қорытындыға келеміз: егер $e$ санының жуық мәні үшін дөңгелек жақшалардың ішінде тұрған қосындыны алсақ, яғни

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \qquad (24)$$

онда біздің жіберетін қатеміз санынан аз болады.

*e* санының мәнін (24) формула бойынша табатын болсақ, онда

$$e \approx 2{,}7182818284 \ldots$$

Енді $e$-нің иррационал сан екенін дәлелдейік. Ол үшін $e$ рационал сан деп керісінше ұйғарайық, яғни $e = \frac{P}{q}$, мұнда $p$ мен $q$ ортақ бөлгіші жоқ оң бүтін сандар. (23) теңсіздік бойынша

$$0 < \frac{p}{q} - \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!q} \qquad (25)$$

(25) теңсіздіктің екі жағын $q!$-ға көбейтсек, онда

$$0 < p(q-1)! - q!\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q} \qquad (26)$$

$p(q-1)!$ – бүтін сан, $q!\left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$ саны да бүтін сан. Екі бүтін санның айырмасы (26) теңсіздік бойынша $\frac{1}{q}$ бөлшектен аз болып тұр, бұлай бөлу тіпті мүмкін емес. Демек, $e$ – иррационал сан.

Коэффициенттері рационал сандар болып келген, *n* дәрежелі алгебралық

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

теңдеуді қарайық.

Ешбір осы сияқты алгебралық теңдеулердің түбірі бола алмайтын сандарды *трансцендент* сандар деп атайды.

*e* және *π* сандары трансцендент сандар болып табылады.

Осы қасиеттердің арқасында *e* саны математикада маңызды орынға ие болды: ол логарифмдер негізіне алынды. Негізгі *e* болған логарифмдер *натурал* логарифмдер немесе Непер логарифмдері деп аталады. *N* санының натурал логарифмін былай белгілейді: *InN* яғни $lnN = log_eN$.

Енді сандардың натурал логарифмдері мен ондық логарифмдерінің арасындағы байланысты іздейік.

Айталық, $N$ санының ондық логарифмі белгілі болсын: $lg_{10}N=y$ бұл арадан $10^y=N$, осы теңдіктің екі жағынан натурал логарифм алайық. Сонда:

$$yln10 = lnN, \text{ бұл жерден } y = \frac{lnN}{ln10}$$

Алғашқы $y$ пен осы $y$-ті бір-біріне теңесек:

$$lg_{10}N = \frac{1}{ln10} lnN$$

болады. $M = \frac{1}{ln10} = 0{,}4342944819 \ldots$ Бұл санды натурал логарифмнен ондық логарифмге көшу *модулі* деп атайды. Сонда

$$lg_{10}N = M \cdot lnN.$$

## § 5. Сандар тізбегінің жоғарғы және төменгі шектері

1. Жоғарғы және төменгі жағынан шектелген сандар тізбегін қарайық, ол

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{27}$$

болсын.

(27) тізбек жоғарғы және төменгі жағынан шектелгендіктен оның дәл жоғарғы шекаралығы $M_1$, ал дәл төменгі шекаралығы $m_1$, болуға тиіс.

(27) тізбектің бірінші мүшесін шығарып тастап, біз мынадай тізбекті:

$$x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots \tag{28}$$

қарайық. Әрине, бұл тізбектің (27) бөлігі болып табылады.

(28) тізбек те жоғарғы және төменгі жағынан шектелген. Сондықтан мұның да дәл жоғарғы шекаралығы $M_2$, дәл төменгі шекаралығы $m_2$ болуға тиіс.

Дәл жоғарғы және дәл тәменгі шекаралықтардың қасиеттері бойынша:

$$M_2 \leq M_1, \qquad m_2 \geq m_1.$$

Енді (28) тізбектің бірінші мүшесін алып тастасақ, санда мынадай тізбек:

$$x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots \tag{29}$$

қалған болар еді, бұл тізбек те жоғарғы және төменгі жағынан шектелген тізбек екендігі айқын; сондықтан бұл тізбектің дәл жоғарғы шекаралығы $M_3$, дәл төменгі шекаралығы $m_3$ болуы керек. Дәл жоғарғы және төменгі шекаралықтардың қасиеттері бойынша

$$M_3 \leq M_2, \quad m_3 \geq m_2$$

Енді (29) тізбектің бірінші мүшесі $x_3$-ні, сонан соң мұның нәтижесінде шыққан тізбектің бірінші мүшесі $x_4$-ні, сонан әрі қарай осы тәсілді шексіздікке дейін соза берсе, онда біз әрқайсысы алғашқы өткен тізбектің бөлігі болып табылатын, жоғарғы және төменгі жағынан шектелген шексіз тізбектерді табамыз. Бұл тізбектердің дәл жоғарғы шекаралықтары $M_1$ $M_2$, ...$M_n$..., ал дәл төменгі шекаралықтары $m_1, m_2, ... m_n$,.. болады және мұнда

$$M_1 \geq M_2 \geq M_3 \geq \cdots \geq M_n \dots, \tag{30}$$

$$m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \cdots \leq m_n \leq \cdots \tag{31}$$

Олай болса бұл арадан, қарастырылып отырған (30) және (31) тізбектердің дәл жоғарғы шекаралықтары мен дәл төменгі шекаралықтарының тізбектері біркелкі тізбектер екендігі байқалады. Дәл шекаралықтардың қасиеті бойынша әрбір $n$ үшін

$$M_n \geq m_n \geq m_1,$$

$$m_n \leq M_n \leq M_1.$$

орындалады.

Сондықтан тізбек $\{M_n\}$ жоғарғы жағынан, ал тізбек $\{m_n\}$ төменгі жағынан шектелген. Олай болса, 3-параграфтағы 1, 2-теоремалар бойынша (30) және (31) тізбектердің шектеулі шектері болады. Айталық

$$\lim_{n\to\infty} M_n = L, \qquad \lim_{n\to\infty} m_n = l$$

болсын.

$L$ санын (27) тізбектің ең үлкен немесе жоғарғы шегі дейді, ал $l$ санын оның ең кіші немесе төменгі шегі дейді. Бұларды мынадай символдармен белгілеп көрсетеді:

$$L = \overline{lim} x_n, \qquad l = \underline{lim} x_n$$

немесе

$$L = \lim sup x_n\,, \qquad l = \lim inf x_n.$$

Осы айтылған мысал келесі тізбекті:

$$-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{8}{7}, \dots, (-1)^n \frac{n+1}{n}, \dots$$

қарайық.

Мұнда

$$M_1 = \frac{3}{2}, \quad m_1 = -2.$$

Енді осы тізбектің бірінші мүшесі – 2-ні шығарып тастайық, онда тізбек мына түрде болады:

$$\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{8}{7}, \dots, (-1)^n \frac{n+1}{n}, \dots$$

Мұнда

$$M_2 = \frac{3}{2}, \quad m_2 = -\frac{4}{3}.$$

Ал, енді кейінгі тізбектің мүшесі $\frac{3}{2}$-ті шығарып тастағанда, мынадай тізбек

$$-\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{8}{7}, \dots, (-1)^n \frac{n+1}{n}, \dots$$

келіп шығады. Бұл тізбектің дәл жоғарғы шекаралығы

$$M_3 = \frac{5}{4},$$

ал дәл төменгі шекаралығы:

$$m_3 = -\frac{4}{3}.$$

Міне, осылай етіп осы тәсілді одан әрі қарай біртe-бірте шексіздікке дейін соза берсек, жоғарғы шекаралықтың тізбегі мына түрде

$$\{M_n\} : \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \dots \frac{2n+1}{2n}, \dots$$

болады, ал төменгі шекаралықтың тізбегі мына түрде

$$\{m_n\} : -2, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{6}{5}, -\frac{6}{5}, \dots, -\frac{2n}{2n-1}, \dots$$

болады.

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} m_n - 1.$$

Сонымен, қарастырып отырған мына тізбек үшін ең үлкен шек пен ең кіші шек 1 мен – 1-ге тең болады:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n - 1$$

**2.** Ең үлкен шек пен ең кіші шектің қасиеттерін қарайық $\{x_n\}$ тізбегінің ең үлкен шегі $L$ саны мен ең кіші шегі $l$ санының өте-мөте қажетті қасиеттерін көрсетейік.

I. Қандай болсын оң ε санын алсақ та, оған тәуелді $N$ саны табылып, мынадай $n > N\varepsilon$ теңсіздікті қанағаттандыратын әрбір $n$ үшін төмендегі теңсіздік

$$x_n < L + \varepsilon$$

орындалады. Былайша айтқанда, $\{x_n\}$ тізбектің барлық мүшелері бір орыннан бастап, ең үлкен шегінен құнарсыз ғана асатын кез келген саннан кіші болады.

$limM_n = L$ болғандықтан, берілген оң ε саны бойынша $N_\varepsilon$ саны табылып, әрбір $n > N_\varepsilon$ үшін мынадай теңсіздік

$$L-\varepsilon<M_n<L+\varepsilon$$

орындалуға тиіс. Дәл жоғарғы шекаралықтың айтылып кеткен қасиеті бойынша $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ сандардың әрқайсысы, жоғарғы шекаралық $M_n$ санынан артық болмайды, сондықтан бұл сандардың әрқайсысы L + ε санынан кіші болады.

II. Қандай болсын оң ε санын және қандай болсын бүтін оң санын алсақ та, әрқашан да $p$-ден үлкен $n$ сандары $(n>p)$ табылып, сол сандар үшін төмендегі теңсіздік $x_n>L-\varepsilon$ орындалады. Былайша айтқанда $\{x_n\}$ тізбектің мүшелерінің ішінде ең басқы мүшеден соншама алыс және тізбектің ең үлкен шегінен құнарсыз ғана кіші болатынын кез-келген саннан асып кететін мүшелер бар болады. Шынында, тізбектегі мұндай сандардың саны шексіз болуы күмәнсіз.

Айталық, ε оң құнарсыз аз сан, ал р − оң бүтін және аса үлкен сан. Шектің анықтамасы бойынша осы ε>0 саны бойынша $N_\varepsilon$ табылып, $N_\varepsilon$ санынан артық әрбір $n(n > N_\varepsilon)$ саны үшін мынадай теңсіздіктің

$$L-\varepsilon<M_n$$

орындалатыны бізге мәлім. Ал осы теңсіздік, $N_\varepsilon$ санынан және $p$ санынан да артығырақ болатын барлық $n$ сандары үшін де өзінің күшінде қалады. Олай болса, дәл жоғарғы шекаралықтың бір қасиеті бойынша $x_n, x_{n+1}, x_{n+2},\dots$ сандарының ішінде $L-\varepsilon$ санынан асып кететін сандар барлығын айтуымызға әбден болады, өйткені L−ε саны $M_n$ санынан кіші, ал $M_n$ саны , $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\dots$ тізбегінің дәл жоғарғы шекаралығы. Сонымен, $p$-ден үлкен $n$ сандары бар және бұл сандар үшін мына теңсіздік $x_n > L-\varepsilon$ орындалатын болды.

Дәл осы сияқты $x_n$ тізбегінің ең кіші шегінің төмендегі қасиеттерін тағайындауға болады.

III. Қандай болсын оң ε санын алсақ та оған тәуелді $N_\varepsilon$ саны табылып, мынадай теңсіздікті $n>N_\varepsilon$ қанағаттандыратын әрбір $n$ үшін төмендегі теңсіздік

$$x_n>l-\varepsilon$$

орындалады.

IV. Әрбір оң ε саны және әрбір оң бүтін $p$ саны үшін $p$-ден үлкен $n(n>p)$ сандарын тауып, мынадай теңсіздікті

$$x_n>l+\varepsilon$$

орындауға болады.

V. Егер $\{x_n\}$ тізбегінің ең кіші шегі $l$ болса, ал оның ең үлкен шегі $L$ болатын болса, онда сөзсіз $l\leq L$ болады.

## § 6. Жинақтылық принципі

1. Тізбектің жай шегі деп екінші параграфта анықталған шекті түсінеміз.

Енді төмендегі теореманы дәлелдейік.

Теорема. (1) *тізбектің немесе бәрібір* $x_n$ *айнымалының жай шегі а болу үшін оның жоғарғы шегі мен төменгі шегі бір-бірімен тең болуы қажетті және жеткілікті.* Мұнда жоғарғы шек пен төменгі шектің бірдей ортақ мәні жай шек $a$-ға тең болады.

Алдымен бұл теореманың шарттарының кажеттілігін дәлелдейік. Ол үшін $\{x_n\}$ тізбектің шегі $a$ бар деп ұйғарайық, былайша айтқанда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Онда шектің екінші түрдегі анықтамасы бойынша, алдын-ала берілген оң құнарсыз аз ε санына сәйкес $N_\varepsilon$ сан табылып, осы $N_\varepsilon$ номерінен немесе одан артық $n(n>N_\varepsilon)$ номерлерден бастап төмендегі теңсіздіктің

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$$

орындалуы қажет.Дәл жоғарғы шекаралығы $M_n$-ге тең мына тізбекті

$$x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}, \dots$$

қарайық. Бұл тізбектің барлық мүшелері $a+\varepsilon$ санынан кіші болады; сондықтан дәл жоғарғы шекаралықтың айтылып кеткен қасиеттерінің бірі бойынша

$$M_n \le a+\varepsilon$$

болады. Бұл тізбектің мүшелерінің қай-қайсысы болса да $M_n$-ден артық болмайды, бірақ $a-\varepsilon$ санынан артық болатын мүшелер болады, олай болса

$$a-\varepsilon < M_n$$

Сонымен, $N_\varepsilon$ санынан артық әрбір $n$ $(n>N_\varepsilon)$ үшін мына түрдегі

$$a-\varepsilon < M_n \le a+\varepsilon$$

қос теңсіздік орындалатын болды. Осы кейінгі қос теңсіздіктің орындалуы келесі

$$\lim_{n\to\infty} M_n = a$$

теңдікпен парапар.

Сөйтіп,

$$L = a$$

болатын болды.

Дәл осы жолмен ең кіші шек $l = a$ болатындығын да дәлелдеуе болады.

Сонымен, $\{x_n\}$ тізбектің шегі бар болатын болса, ол тізбектің ең үлкен шегі $L$, ең кіші шегі $l$ бір-біріне тең және олар $a$ санына тең болатын болды.

Енді келтірілген теореманың шарттарының жеткіліктілігін дәлелдейік, яғни $\{x_n\}$ тізбектің ең үлкен шегі мен ең кіші шегі бір-бірімен тең болатын болса, осы тізбектің жай шегі бар болатындығын көрсетейік.

Айталық, $L=l=a$ болсын. Онда ең үлкен шектің бірінші қасиеті бойынша әрбір $n > N'_\varepsilon$ үшін теңсіздік

$$x_n < L + \varepsilon = a + \varepsilon$$

орындалады.

Сонан соң ең кіші шектің бірінші қасиеті бойынша әрбір, $n > N"_\varepsilon$ үшін мына теңсіздік

$$x_n > l - \varepsilon = a - \varepsilon$$

орындалады. Мұнда ε – кез келген оң құнарсыз аз сан. Айталық $N_\varepsilon$ саны $N'_\varepsilon$ және $N''_\varepsilon$ сандардың ең үлкені болсын. Онда әрбір $n>N_\varepsilon$ үшін алдыңғы теңсіздіктердің екеуі де бірдей орындалады, сондықтан

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Бұл теореманың теориялық маңызы өте зор, бірақ тәжірибе жүзінде тізбектің немесе айнымалының шегін табуда өте сирек қолданылады. Сөйткенмен, кейбір жағдайларда осы теорема арқылы тізбектің немесе айнымалының шегінің бар-жоқтығын тағайындауға болады.

2. Өткен теоремаға сүйеніп, француздың атақты математигі Коши (1789−1857) теоремасын дәлелдейік. Дәлелдейік деп отырған Кошидің бұл теоремасы анализдегі еңбір негізгі, өте-мөте қажетті теореманың бірі болып табылады. Кошидің бұл теоремасы тізбектің немесе бәрібір айнымалының шегінің бар болу шарттарының қажеттілігін және жеткіліктігін тағайындайды.

Коши теоремасын екі түрде тұжырымдауға болады.

**Теорема.** *(1) тізбектің немесе $x_n$ ($n$ = 1,2,...) айнымалының тиянақты шегі болу үшін, әрбір оң құнарсыз аз ε санына сәйкес $N_\varepsilon$ санын табуға мүмкіндік болып, осы $N_\varepsilon$ санынан артық әрбір $n$ ($n> N_\varepsilon$) номерінен бастап кез келген оң бүтін $p$ саны үшін мынадай теңсіздіктің*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

*орындалуы қажетті және жеткілікті. Мұнда p=1,2,...*

Бұл теореманың ерекше керектігін еске алып, оның екінші түрдегі тұжырымдауын да келтірейік.

**Теорема.** *(1) тізбектің немесе $x_n(n = 1,2,...)$ айнымалының тиянақты шегі болу үшін, алдын ала берілген оң құнарсыз аз ε саны бойынша оған сәйкес $N_\varepsilon$ санын табуға мүмкіндік болып, осы $N_\varepsilon$ санынан артық кез келген m және n сандары үшін төмендегі теңсіздіктің*

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

*орындалуы қажетті және жеткілікті.*

Коши теоремасының бірінші және екінші тұжырымдауындағы теңсіздікті *Коши теңсіздігі немесе Коши шарты* деп атайды. Коши теңсіздігін немесе Коши шартын қанағаттандыратын тізбекті фундаменталь тізбек деп атайды. Бұдан кейін Коши теоремасын былай тұжырымдауға болады:

*Берілген тізбектің немесе айнымалыньщ шегі болу үшін оның фундаменталь болуы қажетті және жеткілікті.*

Алдымен Коши теоремасы шарттарының қажеттілігін дәлелдейік. (1) тізбектің шегі бар дейік, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ болсын.

Онда шектің анықтамасы бойынша оң ε саны қандай болса да оған сәйкес $N_\varepsilon$ санын табуға мүмкіндік болады да, осы $N$ санынан артық әрбір $n(n> N_\varepsilon)$ үшін төмендегі теңсіздіктер

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |x_{n+p} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

орындалады, мұнда $p$ – кез келген оң бүтін сан. Ал

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - a) - (x_n - a)| \le |x_{n+p} - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Сонымен

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Осы кейінгі теңсіздіктің айтылған $n$ және $p$ сандары үшін орындалуы Коши теоремасының шарттарының орындалғанын көрсетеді (әрине, егерде (1) тізбектің тиянақты шегі $a$ бар болатын болса).

Енді Коши теоремасы шарттарының жеткіліктілігін көрсетейік. Айталық, оң ε саны қандай болса да, оған сәйкес $N_\varepsilon$ санын табуға мүмкіндік болып, осы $N_\varepsilon$ санынан артық әрбір $n$ $(n>N_\varepsilon)$ және кез келген бүтін оң $p$ саны үшін (1) тізбектің мүшелері мына теңсіздікті

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$$

қанағаттандыратын болсын. Бұл кейінгі теңсіздікті мына түрде

$$x_n - \varepsilon < x_{n+p} < x_n + \varepsilon$$

жазуға болады, Бұл арадан біз барлық $x_{n+p}$ сандары, $p$ қандай болса да $x_n - \varepsilon$ мен $x_n + \varepsilon$-нің арасында жатады деген қорытындыға келеміз. Олай болса тізбек $x_{n+1}, x_{n+2},..., x_{n+p}$ жоғарғы жағынан да, төменгі жағынан да шектелген; сондықтан бұл тізбектің ең үлкен шегі $L$, еңкіші шегі $l$ болуға тиіс. Әрине, бұл $L$ саны мен $l$ саны алғашқы $x_1$ $x_2$, $x_3$,..., $x_n$, $x_{n+1}$,... тізбектің де ең үлкен және ең кіші шегі болып табылады. Енді осы $L$ саны мен $l$ санының бір-біріне тең екендігін, яғни $L = l$ болатындығын дәлелдейік. Бұған қарсы $L \neq l$ деп ұйғарайық. Онда сөзсіз $L > l$ болады. Енді ε-ді мына теңсіздік

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{3}(L - l)$$

орындалатындай етіп алайық. Қарастырып отырған тізбек Коши теоремасы шарттарын қанағаттандыратын болғандықтан ε-ді жоғарғы теңсіздікті қанағаттандыратындай етіп сайлап алсақ, осы ε саны бойынша $N_\varepsilon$ санын табуға мүмкіндік болады да $N_\varepsilon$ санынан артық әрбір $n$ $(n>N_\varepsilon)$ саны және $p$=1,2,3,4,... сандары үшін төмендегі теңсіздік

$$x_{n+p} - x_n < \varepsilon$$

орындалады. Ең кіші шектің қасиеті бойынша $N_\varepsilon$ санынан артық кейбір $n$ $(n>/ N_\varepsilon)$ үшін мына теңсіздіктің

$$x_n < l + \varepsilon$$

орындалуы керек, ал үлкен шектің екінші қасиеті бойынша $n$ санынан артық кейбір $m$ $(m>n)$ саны үшін төмендегі теңсіздіктің

$$x_m > L - \varepsilon$$

орындалуға тиіс. Бұл кейінгі екі теңсіздіктен мынау шығады:

$$x_m - x_n > L - \varepsilon - (l + \varepsilon) = L - l - 2\varepsilon > 3\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon.$$

Ал, $n> N_\varepsilon$ және $m>n$, яғни $m = n+p$ (мұнда $p$ − бүтін оң сан). Сонымен, егер $L$ мен $l$ бір-біріне тең емес, яғни $L>l$ деп ұйғарсақ, онда $N_\varepsilon$ санынан артық кейбір $n$ саны және бүтін оң $p$ саны үшін мынадай теңсіздік

$$x_{n+p} - x_n > \varepsilon$$

орындалатын болды. Бұл теңсіздіктің орындалуы мына $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$ шартқа қайшы келеді. Сондықтан $L$ саны $l$ санынан артық болмайды оған тең болады, яғни $L= l$. Егер $L= l=a$ болатын болса, онда өткен теорема бойынша

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Сонымен, Коши шартының жеткіліктілігі тағайындалды.

Тізбектің немесе айнымалының шегі бар болатындығын тағайындау үшін Коши теоремасының маңызы өте зор, бірақ бұл теорема ол шекті қалай табу жолын көрсетпейді.

Коши теоремасын қалай қолдану керек, соған бір мысал келтірейік. Ол үшін бір иррационал санның ондық жуық мәндерінің тізбегін қарастырайық, мұндай тізбектің жалпы мүшесі $x_n$ мына түрде болады:

$$x_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \quad (n = 1,2,3, \dots)$$

$$0 \le x_{n+p} - x_n = \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \dots + \frac{a_{n+p}}{10^{n+p}}\right) -$$
$$-\left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}\right) = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + \dots + \frac{a_{n+p}}{10^{n+p}} \le$$
$$\le \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \dots + \frac{9}{10^{n+p}} = \frac{9}{10^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots +\right)$$
$$+\left.\frac{1}{10^{p-1}}\right) = \frac{9}{10^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^p}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{n+p}} < \frac{1}{10^n}.$$

Бұл арадан иррационал санның ондық жуық мәндерінің тізбегі фундаменталь тізбек екендігі байқалады, сондықтан бұл қарастырылып отырған тізбектің тиянақты шегі бар.

Дәлелденген Коши теоремасы айнымалы $x$-тің *шегі болу белгісі*, немесе (1) тізбектің *жинақтылық принципі* деп аталады.

Айнымалы $x$-тің өзгеруі тіпті түрліше болуы мүмкін. Мысалы, айнымалы өзінің шегіне, барлық аралық мәндерді қабылдап, үздіксіз түрде, немесе оңашаланған жеке мәндердің шексіз тізбегін қабылдап, үзілісті түрде ұмтылуы мүмкін. Міне, осы дәлелденген Кошидің жинақтылық принципі айнымалының өзгеру түріне байланысты болмай, қалай өзгерсе де барлығына бірдей жалпы принцип болып табылады.

## § 7. Бөлімше тізбек

Біз мұнда

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \tag{1}$$

тізбекті қарастырайық. Енді бұл тізбекпен бірге, осы тізбектен бір белгілі заң бойынша құрылған мынадай тізбекті

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots \tag{32}$$

қарайық. Осы кейінгі (32) тізбекті бөлімше тізбек дейді. Мұнда *{$n_k$}* төмендегі теңсіздіктерді

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots \tag{33}$$

қанағаттандыратын натурал сандар тізбегі. Бұл жерде барлық натурал мәндерді қабылдаушы номердің ролін *n* атқармайды, *к* атқарады; былайша айтқанда, *к* неғұрлым үдеген сайын *$n_k$* шексіздікке ұмтылушы айнымалы болып табылады.

**Теорема.** *Егер а саны (1) тізбектің тиянақты шегі болып табылса, онда осы а саны (32) бөлімше тізбектің де шегі болады,*

*а* шектеулі сан болсын; міне, осы жағдайға ғана тоқтайық, *а* саны (1) тізбектің шегі болғандықтан, оң ε саны қандай болса да, оған сәйкес *N* санын табуға мүмкіндік болып *N* санынан артық әрбір натурал *n* (*n* >*N*) сан үші төмендегі теңсіздіктің:

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

орындалуы керек $n_{k\to\infty}$ болғандықтан, *К* саны табылып осы *К*-дан *артық (к>К)* үшін мынадай теңсіздік

$$n_k > N$$

орындалады. Олай болса *к*-нің осы мәндері үшін алдыңғы теңсіздік бойынша мынадай теңсіздік

$$\left|x_{n_k} - a\right| < \varepsilon$$

орындалады.

Кейінгі теңсіздіктің орындалуы теореманы дәлелдейді.

Сонымен, (1) тізбектің жинақтылығынан (32) бөлімше тізбектің де жинақтылығы шығады, керісінше қорытынды дұрыс болмайды.

## §8. Шектік нүкте ұғымы және Больцано-Вейерштрасс теоремасы

1. Нақты сандардан тұратын *Е* жиынын қарайық. Егер ξ *нүктесінің кез келген аймағының ішінде Е жиынының шексіз көп*

*нүктелері жататын болса, $\xi$ нүктесін Е жиынының шектік нүктесі деп атайды.*

Бұл анықтамадан мынадай қорытынды жасауға болады: *Е* жиынын құратын элементтердің саны шексіз болса ғана шектік нүкте туралы әңгіме қозғауға болады.

Шектік нүкте *Е* жиынының өзіне жатуы да және жатпауы да мүмкін.

1) Айталық. *Е* жиыны мына сандардан:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}, \dots$$

тұрсын. Бұл жиынның екі шектік нүктесі бар: о; 1. Олардың біреуі мәселен 1, жиынның өзіне жатады да, екіншісі 0, жиынның өзіне жатпайды.

2) *Е* жиыны барлық рационал сандардан тұрсын, онда түзудің әрбір нүктесі бұл жиынның шектік нүктесі болып табылады.

3) *Е* жиыны (0,1) интервалдың барлық нүктесінен тұратын болсын, онда интервалдың әрбір нүктесі *Е*-нің шектік нүктесі болып табылады.

***Больцано-Вейерштрасс теоремасы.*** *Әрбір шектелген және элементтерінің «саны» шексіз Е жиынының ең болмаған күнде бір шектік нүктесі болады.*

*Е* шектелген жиын болғандықтан, оны құрушы сандар бір [*а, в*] сегментінің ішінде жатуға тиіс. Осы [*а, в*] сегментті қақ бөлейік. Онда сегменттің екі жартысының біреуінде *Е* жиынының шексіз көп элементтері болуы мүмкін, бұл сегментті [$a_1 в_1$] арқылы белгілейік. Егер екеуінде де *Е* жиынының шексіз көп нүктесі болса, онда [$a_1 в_1$] сегменті үшін қай жартысын алсақ та бәрібір болады.

Енді [$a_1 в_1$] сегментін қақ бөлейік. Онда жаңағыдай бұл сегменттің екі жартысының біреуінің ішінде *Е* жиынының шексіз көп элементтері болуы мүмкін, *Е* жиынының шексіз көп элементтері жатқан жартыны [$a_2, в_2$] арқылы белгілейік: Міне, осы операцияны шексіздікке дейін созсақ, онда бірінің ішінде бірі жатқан келесі сегменттер

$$[a, b] \supset |a_1, b_1| \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

тізбегі келіп шығады. Бұл сегменттердің ұзындықтары $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0 \cdot n$ шексіздікке ұмтылады және олардың әрқайсының ішінде *Е* жиынының шексіз көп элементтері бар.

Кантор аксиомасы бойынша осы сегменттердің барлығына ортақ, яғни $a_n \leq \xi \leq b_n$ бір шек, бір ғана ξ нүктесі болады. Енді осы ξ нүктесі *E* жиынының шектік нүктесі болатындығын дәлелдейік.

Интервал $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ осы ξ нүктесінің аймағы болсын. Егер *n* саны тым үлкен болса, онда $a_n, b_n$ сегменттері $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ интервалдың ішінде жатады, Ал $[a_n, b_n]$ сегменттердің ішінде жатқан *E* жиыны нүктелерінің (элементтерінің) «саны» шексіз, демек, $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ аймақтың ішінде *E* жиынының шексіз көп нүктелері (элементтері) бар. Олай болса анықтама бойынша ξ нүктесі *E* жиыны үшін шектік нүкте болады. Теорема дәлелденді.

Шектік нүкте болу үшін жиынның шектелуі жеткілікті шарт болып табылады да, бірақ қажетті шарт бола алмайды. Мәселен, жиын *E* мына сандардан

$$1,2,\frac{1}{2},3\frac{1}{3},4\frac{1}{4},5\frac{1}{5},\dots,n,\frac{1}{n}\dots$$

тұрсын. Бұл жиын шектелген жиын емес. Дегенмен шектік нүктесі бар, ξ=0. *E* жиыны барлық рационал сандардан тұратын болса, онда *E* шектелген жиын болмайды. Бірақ дегенмен түзудің әрбір нүктесі осы жиын үшін шектік нүкте болады.

## § 9. Айнымалы шегінің жалпы анықтамасы

Осы тараудың § 2 берілген шек анықтамасы, мәндері натурал сандармен номерленген айнымалылар үшін берілді. Айнымалының өзгеруі тіпті түрліше болуы мүмкін. Мәселен, айнымалы өзінің шегіне барлық аралық мәндерді қабылдап, үздіксіз түрде ұмтылуы мүмкін. Міне, осындай жағдайда айнымалының шегін қалай анықтау керек деген сұрақ туады.

Айнымалы $x$-ті қарайық, $x_1$ және $x_2$ − осы айнымалының кез келген мәндері болсын. Егер айнымалы $x$ шама $x_1$ мәнді $x_2$ мәннен бұрын қабылдайтын болса, онда $x_1$ мән $x_2$ мәннен бұрын келеді немесе $x_1$ мәнмен ілесе $x_2$ мән де келеді дейміз және мұны былай жазып көрсетеміз:

$$x_1 < x_2 \text{ немесе } x_2 < x_1.$$

Мұнда және былай: егер $x_1$ мән $x_2$ мәннен бұрын келсе, онда $x_2$ мән $x_1$ мәннен бұрын келе алмайды. Егер $x_1$ мәнін $x_2$ мәннен бұрын қабылдаса, ал $x_2$ мәнін $x_3$ мәнінен бұрын қабылдаса, онда $x_1$ мәнін $x_3$ мәнінен сөзсіз бұрын қабылдайды.

Айнымалының осындай шартты қанағаттандыратын мәндерін *реттелген* мәндер деп атайды, айнымалының өзін реттелген айнымалы дейді.

Реттелген айнымалы $x$ үшін шек ұғымын анықтауға болады.

Сонымен, $x$ реттелген айнымалы болсын.

Егер әрбір оң құнарсыз аз ε саны бойынша айнымалының $x_\varepsilon$ мәні табылып, осы $x_\varepsilon$ мәнмен ілесе келетін $x$-тің барлық мәндері үшін $(x>x_\varepsilon)$ келесі теңсіздік

$$|x-a|<\varepsilon$$

орындалса, онда $a$ санын айнымалы $x$-тің шегі деп атайды және оны былай жазады:

$$x\to a \text{ немесе } lim\, x = a.$$

Осы тарауда § 2-та берілген тізбек шегінің анықтамасы беріліп отырған анықтаманың дербес түрі болады.

## § 10. Шектер туралы теоремалар

1) Егер айнымалылар $x_n$ және $y_n$ сәйкес $a$ және $в$ шектерге ұмтылса, онда олардың қосындысы $x_{n+}y_n$ мына $a+в$ шекке ұмтылады, яғни

$$\lim(x_n+y_n)=\lim\, x_n+lim\, y_n=a+b.$$

Бұл теореманы дәлелдеу оп-оңай. Теореманың шарттары бойынша:

$$\begin{matrix} |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2} & \qquad |y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2} \\ n\ge N_1(\varepsilon) & \qquad n\ge N_1(\varepsilon) \end{matrix} \qquad (34)$$

$N$ арқылы $N_1$ және $N_2$ сандардың ең үлкенін белгілейік, онда $N$ санынан артық әрбір $n$ үшін $(n\ge N)$ жоғарыдағы (34) теңсіздіктер сөзсіз орындалады. Енді мына айырманы

$$(x_n+y_n)-(a+b)$$

қарайық. Бұл айырманың абсолют шамасы келесі теңсіздік

$$|(x_n+y_n)-(a+b)|\le|x_n-a|+|y_n-b|$$

қанағаттандырады. (34) теңсіздікті еске алып табамыз:

$$|(x_n+y_n)-(a+b)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Осы кейінгі теңсіздіктің орындалуы теореманы дәлелдейді.

2) Егер айнымалар $x_n$ және $y_n$ сәйкес $a$ және $в$ шектерге ұмтылса, онда олардың көбейтіндісі $x_n\ y_n$ мына $ав$ шекке ұмтылады, яғни

$$lim\, x_n y_n = ab.$$

Келесі теңбе-теңдікті

$$x_n y_n - ab = b(x_n - a) + x_n(y_n - b)$$

қарайық. Бұл арадан

$$|x_n y_n - ab| \leq |b||x_n - a| + |x_n||y_n - b| \qquad (35)$$

$x_n$ шектелген айнымалы, сондықтан $|x_n| < M$.

Теореманың шарттары бойынша

$$\begin{matrix} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|\varepsilon|} & \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \\ n \geq N_1(\varepsilon) & \quad n \geq N_2(\varepsilon) \end{matrix} \qquad (36)$$

*N* арқылы *N₁* және *N₂* сандардың ең үлкенін белгілейік, онда (36) теңсіздіктер *N* санынан артық барлық *n* сандары үшін *(n≥ N)* сөзсіз орындалады.

(35) және (36) теңсіздіктерді салыстырып табамыз:

$$|x_n y_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Сонымен, теорема дәлелденді.

3) Егер $\lim\, x_n = a, \lim\, y_n =$ в болса (мұнда *в≠0),* онда

$$lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{lim x_n}{lim y_n}.$$

Бұл теореманы оқушылардың өздері де дәлелдей алады.

1) және 2) теоремалардан мынадай қорытынды жасауға боды:

а) $lim(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \lim\, x_1 + \lim\, x_2 + \cdots + \lim\, x_n$.

б) $lim(x_1 x_2 \ldots x_n) = \lim\, x_1 \cdot \lim\, x_2 \ldots lim\, x_n$.

4) Егер $lim x_n = a$ болса, онда

$$lim(x_n)^k = a^k = (\lim\, x_n)^k,$$

мұнда $k$ – бүтін сан.

Бұл теореманы (2) теореманың салдары деп карауға болады, яғни

$$lim(x_n)^k = lim \underbrace{(x_n \cdot x_1 x_n \ldots x_n)}_{\text{к рет}} = lim\, x_n \cdot lim\, x_n \ldots \lim\, x_n =$$

$$= (\lim\, x_n)^k = a^k.$$

5) Егер $\lim\, x_n = a$ болса, онда

$$lim \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}, \qquad (37)$$

мұнда $k$ – натурал сан, ал $x_n \geq 0$.

Бұл теореманы дәлелдеу үшін келесі теңбе-теңдікті қарастайық:

$$\sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{a} = \frac{x_n - a}{\left(\sqrt[k]{x_n}\right)^{k-1} + \left(\sqrt[k]{x_n}\right)^{k-2} \sqrt[k]{a} + \cdots + \left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}}.$$

Ал

$$\frac{1}{\left(\sqrt[k]{x_n}\right)^{k-1}+\left(\sqrt[k]{x_n}\right)^{k-2}\sqrt[k]{a}+\cdots+\left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}}\leq\frac{1}{\left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}},$$

ендеше

$$\left|\sqrt[k]{x_n}-\sqrt[k]{a}\right|\leq\frac{|x_n-a|}{\left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}} \qquad (38)$$

Теореманың шарты бойынша

$$|x_n-a|<\varepsilon\left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}$$
$$n>N$$

Сондықтан

$$\left|\begin{matrix}\sqrt[k]{x_n}-\sqrt[k]{a}\\ n>N\end{matrix}\right|<\varepsilon$$

теорема далелденді.

6) Егер $\lim\ x_n=a$ болса, онда

$$lim(x_n)^r=a^r=(lim\,x_n)^r,$$

мұнда $r$ – кез келген рационал сан, ал $x_n>0$.

$r$ рационал сан болғандықтан, оны мына түрде жазуға болады: $r=\frac{p}{q}$. Енді (5) теореманы қолдануға болады.

7) Егер $limx_n=a, limy_n=b$ және $a<в$ болса, онда бір $N$ номерінен бастап $x_n<y_n$ болады. Оң $\varepsilon$ санын мына $\frac{b-a}{2}$ санына тең етіп алайық, яғни $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$. Бұл арадан $a+\varepsilon=в-\varepsilon$. Шектің екінші түрдегі анықтамасы бойынша осы $\varepsilon$ санына сәйкес $N_1$ саны табылып, бұдан артық барлық $n$ номерлер $(n\geq N_1)$ үшін келесі қос теңсіздік

$$\begin{matrix}a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon\\ n\geq N_1\end{matrix} \qquad (39)$$

орындалуға тиіс. Осы жағдайдың негізі бойынша $N_2$ саннан артық барлық $n$ номерлер $(n\geq N_2)$ үшін төмендегі қос теңсіздік

$$b-\varepsilon<y_n<b+\varepsilon \qquad (40)$$

орындалады.

$N$ арқылы $N_1$ мен $N_2$ сандардың ең үлкенін белгілейік. Сонда осы $N$ санынан артық $n$ номерлер үшін (39) және (40) теңсіздіктер сөзсіз орындалады. Олай болса барлық $n\geq N$ үшін

$$x_n<a+\varepsilon\leq b-\varepsilon<y_n.$$

Сонымен, теорема дәлелденді.

8) Егер $limx_n=a, limx_n=в$ болса, онда $a=в$, былайша айтқанда, айнымалы бір ғана шекке ұмтылады.

Айталық, $a \neq в$, $a < в$, онда мұның алдында дәлелденген теорема бойынша $x_n < x_n$. Бұлай болу тіпті мүмкін емес. Міне, осы қайшылық теореманы дәлелдейді.

9) Егер $lim x_n = a, lim y_n = в$ болса және барлық $n$-дер үшін мына теңсіздік $x_n > y_n$ орындалса, онда $a \geq в$.

Теоремаға қарсы $a < в$ болсын деп ұйғарайық. Сонда (7) теорема бойынша $n$-нің аса үлкен мәндері үшін $x_n < y_n$ болу керек. Бұл теңсіздік теоремаға қайшы келеді.

Дәлелденген теорема бойынша теңсіздіктерде шекке көшуге болады, яғни

$$lim x_n \geq lim y_n$$

Мұнда тағы бір ескертіп кететін мәселе мынау: $x_n > y_n$ теңсіздіктен $lim x_n > lim y_n$ теңсіздік шықпайды, тек мына теңсіздік $lim x_n \geq lim y_n$ шығады.

Мәселен,

$$\frac{1}{n} > -\frac{1}{n} \cdot \text{ал} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0.$$

10) Егер $x_n$ және $y_n$ айнымалылардың ортақ шегі болса, яғни $lim x_n = lim y_n = a$ және барлық $n$-дер үшін айнымалы $z^n$ осы екі айнымалының арасында жатса, яғни $x_n \leq z_n \leq y_n$ онда $z_n$ айнымалының шегі де $a$ болады.

ε – кез келген оң сан болсын. Онда осы ε санына сәйкес $N_1$ (ε) саны табылып, $N_1$ санынан артық әрбір $n$ саны үшін келесі теңсіздік

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

орындалады.

Осы сияқты $N_2$ саны табылып, барлық $n \geq N_2$ үшін төмендегі теңсіздік

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$$

орындалады.

Егер $N$ саны жаңағы $N_1$ және $N_2$ екі санның ең үлкені болса, онда осы $N$ санынан артық барлық $n$ номерлер үшін келесі қос теңсіздіктер орындалады:

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$$

немесе бәрібір

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon, \text{барлық } n \geq N \text{ үшін.}$$

Сонымен, теорема дәлелденді.

Егер айнымалылар өздерінің шектеріне жеке оңашаланған мәндерді қабылдамай, үздіксіз түрде қабылдап ұмтылса, онда да осы дәлелденген теоремалар дұрыс болады.

11) Егер $n$ шексіздікке ұмтылғанда, айнымалылар $x_n$ және $y_n$ нольге ұмтылса және мұнымен бірге айнымалы $y_n$ кеміме болса, яғни $y_n > y_{n+1}$ болса, онда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n+1}}{y_n-y_{n+1}},$$

әрине, оң жақтағы шек бар болса.

Бұл теореманы дәлелдеу үшін алдымен мына лемманы дәлелдеу керек.

**Лемма.** Егер бөлшек $\frac{P_i}{q^i}, (q_i > 0), (i = 1,2, \dots n)$ мына $m$ мен $M$-нің арасында жатса, яғни $m < \frac{P_i}{q^i} < M$ онда

$$m < \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_i} < M$$

Лемманың шарты бойынша $mq_i < Pi < Mqi$; бұл арадан $m\sum\limits_{i=1}^{n} q_i < \sum\limits_{i=1}^{n} p_i < M\sum\limits_{i=1}^{n} q_i$ Кейінгі теңсіздіктің екі жағын мына $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i$ өрнекке бөліп табамыз:

$$m < \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_i} < M.$$

Айталық, $lim\frac{x_n-x_{n+1}}{y_n-y_{n+1}} = a$. Онда шектің анықтамасы бойынша, мына бөлшектер

$$\frac{x_n-x_{n+1}}{y_n-y_{n+1}}, \frac{x_{n+1}-x_{n+2}}{y_{n+1}-y_{n+2}}, \dots \frac{x_{n+k-1}-x_{n+k}}{y_{n+k-1}-y_{n+k}}$$

$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}, a+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ интервалдың ішінде жатады немесе бәрібір $a-\frac{\varepsilon}{2}$ мен $a+\frac{\varepsilon}{2}$-нің арасында жатады.

(42) теңсіздікті қолдансақ, онда $к$-нің аса үлкен мәндері үшін келесі теңсіздік орнатылады.

$$\left|\frac{x_n-x_{n+k}}{y_n-y_{n+k}} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{43}$$

*n* тұрақты болып *к* шексіздікке ұмтылғанда, бөлшек $\frac{x_n-x_{n+k}}{y_n-y_{n-k}}$ мына $\frac{x_n}{y_n}$ шекке ұмтылады. Сондықтан *к*-нің аса үлкен мәні үшін келесі теңсіздік орындалады:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x_n-x_{n+k}}{y_n-y_{n+k}}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

(43) теңсіздікті еске алсақ сонда:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|<\varepsilon \text{ немесе } lim\frac{x_n}{y_n}=a.$$

12) Егер *n* шексіздікке ұмтылғанда, айнымалы $y_n$ ылғи өсе отырып, алдын ала берілген саннан артық болса, онда

$$lim\frac{x_n}{y_n}=lim\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} \qquad (44)$$

(әрине, оң жақта тұрған шек бар болса).

Айталық, $lim\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$, онда мына бөлшектер

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{y_{k+1}-y_k},\frac{x_{k+2}-x_{k+1}}{y_{k+2}-y_{k+1}},\ldots,\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

$a-\frac{\varepsilon}{2}$ саны мен $a+\frac{\varepsilon}{2}$ санының арасында жатады.

(42) теңсіздікті қолданып табамыз:

$$\left|\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Бұл теңсіздік *k*-нің аса үлкен мәндері үшін орындалады.

Екінші жағынан

$$\frac{x_n}{y_n}-a=\frac{x_k-ay_k}{y_k}+\left(1-\frac{y_k}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_k}{y_n-y_k}-a\right). \qquad (45)$$

Енді *n* санын мына теңсіздік

$$|x_k-ay_k|<\frac{\varepsilon}{2}y_n \qquad (46)$$

орындалатындай етіп сайлап алайық. Ал,

$$\left(1-\frac{y_k}{y_n}\right)<1. \qquad (47)$$

(46) және (47) теңсіздіктерді еске алсақ, онда (45) теңдік төмендегі теңсіздікке айналады:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

немесе

$$lim\frac{x_n}{y_n}=a.$$

Теорема дәлелденді.

Осы дәлелденген теоремалардан келесі салдарлар туады:

а) Егер берілген тізбек белгілі бір тиянақты шекке ұмтылса, онда оның алғашқы $n$ мүшелерінің арифметикалық ортасы мен геометриялық ортасы да сол шекке ұмтылады.

Келесі тізбекті

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

қарайық. Бұл тізбектің алғашқы $n$ мүшелерінің арифметикалық ортасы деп төмендегі өрнекті

$$\frac{S_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

ал геометриялық ортасы деп мына өрнекті

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

айтады.

12) Теорема бойынша

$$lim \frac{S_n}{n} = lim \frac{S_n - S_{n-1}}{n-(n-1)} = \lim\ x_n. \qquad (48)$$

Теореманың екінші бөлімін дәлелдеу үшін, (48) теңдіктегі $x_n$-нің орнына $1gx_n$ қояйық. Сонда

$$lim \frac{lgx_1 + lgx_2 + \cdots lgx_n}{n} = \lim\ lgx_n$$

немесе

$$\lim\ lg\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \lim\ lgx_n$$

Бұл арадан

$$lim\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \lim\ x_n \qquad (49)$$

б) Егер оң сандардан тұратын тізбектің ($n$+1)-ші мүшесі мен $n$-ші мүшесінің қатынасы бір тиянақты шекке ұмтылса, онда бұл тізбектің $n$-ші мүшесінен алынған $n$-ші дәрежелі түбір де сол шекке ұмтылады.

Бұл теореманы дәлелдеу үшін (49) теңдіктің сол жағындағы түбірдің ішіндегі әрбір $x_l$-дің орнына $\frac{a_i}{a_{i+1}}$ қатынасты қояйық Сонда

$$\lim \sqrt[n]{a_1 \frac{a_2}{a_1} \frac{a_3}{a_2} \ldots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

немесе

$$lim\sqrt[n]{a_n} = lim \frac{a_{n+1}}{a_n}. \qquad (50)$$

Мұнда бір ескертіп кететін мәселе мынау: (49) формула барлық $x_n > 0$ болса ғана дұрыс болады.

Мысалдар келтірейік.

1-мысал. $y=a^x$ көрсеткіштік функцияны қарайық. Келешекте керек болатын төмендегі теңсіздіктің:

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n} \qquad (A)$$

орын алатындығын дәлелдейік, мұнда $n$ бүтін сан, ал $a$ санын 1-ден артық (a>1) деп есептейміз.

1-ден артық $c$ санын алайық та, келесі

$$c^n = (1 + c - 1)^n$$

теңбе-теңдікті құрайық. Бұл өрнекті Ньютон биномының формуласы бойынша жіктеп жазсақ:

$$c^n = 1 + n(c-1) + \frac{n(n-1)}{2!}(c-1)^2 + \cdots + (c-1)^n$$
$$> 1 + n(c-1).$$

Сөйтіп,

$$c^n - 1 > n(c-1).$$

Осы соңғы теңсіздіктегі $c$-нің орнына $\sqrt[n]{a}$ санын қойсақ,

$$a - 1 > n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

болады.

Бұл арадан (A) теңсіздіктің келіп шығуы өзінен-өзі айқын.

(A) теңсіздікке сүйене отырып, мына лемманы дәлелдеуге болады:

*Егер r – нольге ұмтылатын рационал сан болса, онда*

$$\lim_{r_{k\to 0}} a_k^r = 1.$$

Алдымен рационал $r_k$ санын оң *($r_k>0$)* деп есептейік. (A) теңсіздіктен мынадай қортындыға келеміз: алдын ала берілген оң, мейлінше аз $\varepsilon$ санына сәйкес $N$ саны табылады, осы $N$-нен артық барлық $n$-дер *($n \geq N$)* үшін төмендегі теңсіздік

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$$ орындалады.

$r_k$ нольге ұмтылатын ($r_к \to 0$) болғандықтан келесі теңсіздіктер: $0 < r_k < \frac{1}{N}$ және $0 < a^{r_k} - 1 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < \varepsilon$ орындалуы керек. Бұдан:

$$\lim_{rk\to 0} a^{r_k} = 1.$$

Егер $r_к$ – теріс сан болса, онда

$$\lim_{r_{k\to 0}} a^{-r_k} = \lim_{r_{k\to 0 a}} \frac{1}{r_k} = 1.$$

Бұл лемма бойынша көрсеткіштік функцияны былай анықтауға болады:

$$a^x = \lim_{k\to\infty} a^{r_k},$$

мұнда $r_к$ – көрсеткіші, $x$-ке ұмтылатын рационал сандардың біркелкі тізбегі.

2-*мысал.* $x_n = \frac{n^{2-1}}{n^2+n+1}$. Осы айнымалының шегін, яғни $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+n+1}$, табу керек.

Шек таңбасында тұрған бөлшектің алымын да, бөлімін де $n^2$-қа бөліп жіберсек,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = 1$$

*3-мысал.* $x_n = \sqrt[n]{p},$ мұнда $p$ – оң сан.

Бұл айнымалының шегін табу үшін, алдымен төмендегі теңсіздіктің

$$(1+h)^n > 1+nh, (n>1), h>0 \tag{51}$$

дұрыстығын дәлелдеу керек. Ол үшін мына $(1+h)^n$ өрнекті Ньютон биномы формуласы бойынша жіктейміз:

$$(1+h)^n = 1+nh+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}h^2+\cdots+h^n, \tag{52}$$

кейінгі теңдіктің оң жағындағы мүшелердің барлығы да оң, сондықтан

$$(1+h)^n > nh.$$

(52) теңдіктен мына теңсіздік те

$$(1+h)^n > 1+\frac{n(n-1)}{2}h^2 \tag{53}$$

келіп шығады.

Енді берілген $x_n = \sqrt[n]{p}$ айнымалының шегін табуға кірісеміз. Бұл арада екі жағдайды қараймыз:

а) $p > 1$ және б) $p < 1$.

Егер p>1 болса, онда $\sqrt[n]{p} > 1$, сондықтан былай ұйғарамыз $\sqrt[n]{p} = 1+h_n$,мұнда $h_n$ саны $n$-ге тәуелді оң сан. Енді осы теңдіктің екі жағын $n$-ге дәрежелеп табамыз:

$$p = (1+h_n)^n.$$

(51) теңсіздік бойынша

$$p = (1+h_n)^n > 1+nh_n,$$

бұл арадан

$$0 < h_n < \frac{p-1}{n}.$$

Кейінгі теңсіздіктен мынадай қорытындыға келеміз: егер *n* шексіздікке ұмтылса, онда *$h_n \to 0$.*

Олай болса

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = \lim_{n\to\infty}(1+h_n) = 1.$$

Егер $p<$ 1 болса, онда $\sqrt[n]{p} < 1$. Сондықтан былай ұйғаруымызға болады:

$$\sqrt[n]{p} = \frac{1}{1+h_n}. \qquad (54)$$

(54) теңдіктің екі жағын $n$-ге дәрежелеп табамыз:

$$p = \frac{1}{(1+h_n)^n}.$$

(51) теңсіздік бойынша $p = \frac{1}{(1+h_n)^n} < \frac{1}{1+nh_n}$;

бұл арадан

$$1 + nh_n < \frac{1}{p} \text{ немесе } h_n < \frac{\frac{1}{p}-1}{n}. \qquad (55)$$

(55) теңсіздіктен мынадай қорытындыға келеміз: егер *n* шексіздіке ұмтылса, онда *$h_n \to 0$.*

Ендеше

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+h_n} = 1.$$

*4-мысал.* Мына өрнектің $\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ шегін табу керек, мұнда $p$ – бүтін оң сан.

12) Теореманы қолданып табамыз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{n^{p+1-(n-1)^{p+1}}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p+1}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(p+1)\left(1-\frac{p}{2n}+\cdots\right)} = \frac{1}{p+1}.$$

## §11. Шексіз аз және шексіз үлкен шамалар

**1.** *Шегі нольге тең айнымалы $x_n$ шаманы шексіз аз шама деп атайды.*

Осы анықтама мен шектің анықтамасы бойынша шексіз аз $x_n$ былай болатын болды:

$$\begin{matrix} |x_n - 0| < \varepsilon \\ n \geq N \end{matrix} \quad \text{немесе} \quad \begin{matrix} |x_n| < \varepsilon \\ n \geq N \end{matrix} \qquad (56)$$

(56) теңсіздік бойынша шексіз аз шама ұғымына анықтаманы екінші түрде беруге болады.

*Егер айнымалы, x-тің абсолют шамасы белгілі бір мезгілден бастап (n≥N) алдын ала берілген кез келген оң ε санынан кіші бола берсе, ол айнымалы x-ті шексіз аз деп атайды.*

Есте болатын бір мәселе мынау: *шексіз аз шама-айнымалы шама.* Сондықтан ешбір тұрақты сан өзінің абсолют шамасы жағынан қаншама аз болса да шексіз аз шама бола алмайды. Сандардың ішінде шексіз аз шама болып табылатын бірақ қана сан бар, ол ноль.

Нольдің өзін ылғи бір мәнді ғана, мәселен, нольді қабылдап тұратын айнымалы деп қарауға болады.

Шексіз аз шама ұғымын тәжірибеде жиі қолданылатын тым аз шама ұғымымен шатастыруға болмайды. Тым аз шама ұғымы ресми математикалық ұғым емес, ол тек тәжірибедегі, өлшеу істерімен байланысты, салыстырмалы ұғым.

Шегі бар айнымалы шамамен шексіз аз шаманың арасында байланыс бар. Шектің анықтамасы бойынша мына теңсіздік

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

$n \geq N$ барлығы үшін орындалуға тиіс.

Шексіз аздың және шектің анықтамаларын салыстырып мынадай қорытындыға келеміз: егер айнымалы мен тұрақтының айырмасы, яғни айырма $x_n - a$, шексіз, аз шама болса, онда тұрақты $a$ саны айнымалы $x_n$ шаманың шегі деп аталады. Сонымен, $x_n - a = \alpha -$шексіз аз шама; бұл арадан

$$x_n = a + \alpha_n \qquad (57)$$

Сөйтіп, айнымалы өзінің шегі мен шексіз аз шаманың қосындысына тең.

Мәселен, мына мәндерді

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

қабылдаушы айнымалы $x_n$ шексіз аз шама болып табылады.

Егер шеңберге іштей сызылған көпбұрыштың қабырғаларының санын шексіз өсірсек, онда әрбір қабырғасының ұзындығы шексіз аз шама болып табылады және шеңбердің ұзындығы мен көпбұрыштың периметрлерінің айырмасы шексіз аз шама болады.

**2.** Енді шексіз аздар жөніндегі теоремаларды қарайық

**1-теорема.** *Саны шектеулі, шексіз аз шамалардың қосындысы да шексіз аз шама болады.*

Айталық, $m$ шексіз аз шамалар $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ берілсін ε – алдын ала берілген оң құнарсыз аз сан болсын. Онда шексіз аздар анықтамасы бойынша

$$|\alpha_1| < \frac{\varepsilon}{m}, |\alpha_2| < \frac{\varepsilon}{m}, \ldots, |\alpha_m| < \frac{\varepsilon}{m}. \qquad (58)$$

Екінші жағынан

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_m|$$

теңсіздіктерді еске алсақ, онда

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m| < \frac{\varepsilon}{m} + \frac{\varepsilon}{m} + \cdots + \frac{\varepsilon}{m} = \frac{m\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

**2-теорема.** *Шектелген айнымалы мен шексіз аздың көбейтіндісі шексіз аз шама болады.*

$x_n$ – шектелген айнымалы, $a_n$ – шексіз аз шама болсын.

$x_n$ – шектелген айнымалы болғандықтан $|x_n| \leq K$, *мұнда K* оң тұрақты сан.

$\varepsilon$ – кез келген оң құнарсыз аз сан болсын. $a_n$– шексіз аз шама, сондықтан

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Ал

$$|x_n\alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n|;$$

жоғарыда келтірілген екі теңсіздікті еске алып табамыз.

$$|x_n\alpha_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon;\ |x_n\alpha_n| < \varepsilon.$$

Теорема дәлелденді.

3. Енді шексіз аз шамалар бір-бірімен қалай салыстырылады соған біраз тоқтап кетейік.

$\alpha_n$ кәне $\beta_n$ екі шексіз аз шама болсын. Бұл екі шаманың қайсысы үлкен, қайсысы кіші деп салыстыру мүмкін емес, өйткені екеуі де бірдей нольге ұмтылады. Дегенмен екеуінің қайсысы нольге бұрынырақ ұмтылады, міне, оларды осы жағынан салыстыруға болады.

Шексіз аз $\alpha_n$ мен $\beta_n$ шамаларды өздерінің аздығы жағынан салыстырғанда, олардың қатынасы нольден айрықша санға ұмтылса, яғни $lim\frac{\beta_n}{\alpha_n} = K \neq 0$ болса, бірдей ретті шексіз аздар дейді.

Егер $\beta_n$-нің $\alpha_n$-ге қатынасы нольге ұмтылса, яғни $lim\frac{\beta_n}{\alpha_n} = 0$ болса, шексіз аз $\beta_n$ шаманы, шексіз аз $\alpha_n$ шамаға қарағанда жоғары ретті дейді. Бұл анықтаманы былай түсінуге болады: шексіз аз $\beta_n$ шексіз аз $\alpha_n$-ге қарағанда нольге бұрынырақ ұмтылады.

Егер $\frac{\beta_n}{\alpha_n}$ қатынасы шексіздікке ұмтылса, онда шексіз аз $\beta_n$ шаманы, шексіз аз $\alpha_n$ шамаға қарағанда өзінің аздығы жөнінде төмен ретті дейді.

Егер $\frac{\beta_n}{\alpha_n^k}$ қатынасы нольден айрықша тұрақты санға ұмтылса, онда шексіз аз $\beta_n$ шаманы, шексіз аз $\alpha_n$ шамаға қарағанда, өзінің аздығы жөнінде *к* ретті дейді.

Егер $\frac{\beta_n}{\alpha_n}$ қатынасы бірге ұмтылса, яғни $lim\frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1$ болса онда шексіз аздар $\beta_n$ мен $\alpha_n$ бір-бірімен эквивалент дейді.

4. Енді *шексіз үлкен шама* ұғымына келейік. *Егер алдын ала берілген кез келген оң L санына сәйкес N саны табылып, осы N санынан артық (n ≥* N) *барлық n-дер үшін*

$$|x_n| > L$$

*теңсіздігі орындала беретін болса, айнымалы* $x_n$*-ні шексіз үлкен шама деп атайды да, былай жазады:*

$$x_n \to \pm\infty \text{ немесе } lim x_n = \pm\infty.$$

Сонымен, егер айнымалы $x_n$ шексіз үлкен шама болса, онда оның абсолют шамасы бір мезгілден *(n ≥ N)* бастап алдын ала берілген, кез келген оң *L* санынан артық болатын болды. Мәселен, мынадай сандарды

$$-1, 2, -3, 4, -5, \ldots, -(2n-1), 2n, \ldots$$

қабылдайтын айнымалы шексіз үлкен шама болып табылады.

Мына мәндерді $1, q, q^2, q^3, \ldots q^n \ldots$ қабылдайтын айнымалы $x_n$ де, егер $q>1$ болса, шексіз үлкен шама болады. Дәлелдеуін келтірейік. q саны 1-ден артық болғандықтан, оны былай жазуға болады:

$$q = 1 + h,$$

мұнда $h>0$.

Бұл теңдіктің екі жағын $n$-ге дәрежелейік, сонда

$$q^n = (1 + h)^n$$

(51) теңсіздік бойынша

$$q^n > 1 + nh.$$

Егер $n$-ді былай сайлап алсақ: $n > \frac{L-1}{n}$, онда $1 + nL > L$, олай болса барлық $n > \frac{L-1}{h} = N$ үшін $q^n > L$. Демек, $limx_n = limq^n = \infty$.

Егер шексіз үлкен шама $x_n$ бір $n$ номерден бастап ылғи оң болса, онда мына теңсіздіктің | $|x_n| > L$ орнына мынадай теңсіздікті $x_n > L$ алуға болады. Мұндай $x_n$ айнымалыны оң шексіз үлкен шама дейді немесе $x_n$ плюс шексіздікке ұмтылады дейді. Мұны былай жазады: $limx_n = +\infty$ немесе $x_n \to \infty$.

Мәселен, айнымалы $x_n$ мына сандарды

$$1^2, 2^2, 3^2, ..., n^2, ...$$

қабылдасын. Бұл айнымалы плюс шексіздікке ұмтылады: $x_n \to \infty$.

Егер кез келген $L$ саны үшін $N$ саны табылып, осы $N$ санынан артық барлық $n$ сандары үшін төмендегі теңсіздік

$$x_n < L$$

орындалса, айнымалы $x_n$ шаманы *теріс шексіз үлкен шама* деп атайды.

Бұл жағдайда айнымалы $x_n$-ні минус шексіздікке ұмтылады дейді де, оны былай жазады:

$$limx_n = -\infty \text{ немесе } x_n \to -\infty.$$

Мәселен, мына сандарды

$$-\frac{1^3}{1}, -\frac{2^3}{3}, -\frac{3^3}{5}, -\frac{4^3}{7}, -\frac{5^3}{9}, \dots, -\frac{n^3}{2n-1}, \dots$$

қабылдайтын айнымалы $x_n$ минус шексіздікке ұмтылады, яғни

$$x_n \to -\infty.$$

*Шексіз үлкен шама – айнымалы шама. Ешбір тұрақты санды, қаншама үлкен болса да, шексіз шама деп атауға болмайды.*

Шексіз үлкен шаманың ешбір шегі жоқ. Мына символ ∞ ешбір санды сипаттамайды. Тек айтуға және жазуға қолайлы болу мақсатын көздеп қана, шексіз үлкен шама шексіздікке ұмтылады дейміз және оны былай жазып көрсетеміз:

$$limx_n = \infty.$$

5. Енді шексіз үлкен шама мен шексіз аз шаманың арасындағы байланысты қарайық.

*Шексіз үлкен шамаға кері шама шексіз аз шама болады.* $y_n$ шексіз үлкен шама, ал $x_n = \frac{1}{y_n}$ –оның кері шамасы болсын, Енді бізге осы $x_n$-нің шексіз аз шама екенін дәлелдеу керек.

$y_n$ шексіз үлкен шама болғандықтан, кез келген $L = \frac{1}{\varepsilon}$ санына сәйкес *N* саны табылып, осы *N* санынан артық барлық *n* *(n≥N)* сандар үшін келесі теңсіздік

$$|y_n| > \frac{1}{\varepsilon} \qquad (n \geq N)$$

орындалуы керек. Бұл арадан барлық *n≥N* үшін

$$|x_n| < \varepsilon.$$

*Шексіз аз шамаға кері шама шексіз үлкен шама болады.*

$x_n$ –шексіз аз шама болсын. Оның кері шамасы $y_n = \frac{1}{x_n}$ шексіз үлкен шама екенін дәлелдеу керек.

*L* алдын ала берілген нольден айрықша оң, аса үлкен сан болсын. $x_n$ шексіз аз шама болғандықтан кез келген оң $\varepsilon = \frac{1}{L}$ санына сәйкес *N* саны табылып, осы *N* санынан артық барлық *n* сандары үшін төмендегі теңсіздік

$$|x_n| < \varepsilon = \frac{1}{L}$$

орындалуға тиіс. Бұл арадан барлық $n \geq N$ үшін

$$|y_n| = \frac{1}{|x_n|} > L.$$

Теорема дәлелденді.

Осы дәлелденген екі теоремаға сүйеніп, шартты түрде былай жазуға болады: $\frac{1}{\infty} = 0,\quad \frac{1}{0} = \infty.$

Бұл жазылған шартты теңдіктер тек символдық қана сипат, өйткені «шексіздік» сан емес, сондықтан оны ешбір бөлгіш ретінде және сол сияқты бөлінді ретінде карауға болмайды.

### *Жаттығулар*

1. Мына $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ теңдіктің дұрыстығын дәлелдеу керек.

Осы $x_n = \frac{1}{n}$ айнымалы мен оның шегінің айырмасы 0,001-тан кем болу үшін, *N* санын қалай сайлап алу керек?

2. Мына $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + 2^{-n}\right) = 1$ теңдіктің дұрыстығын дәлелдеу керек.

Осы $x_n = (1 + 2^{-n})$ айнымалы мен оның шегінің айырмасы 0,01-ден кем болу үшін, *N* санын қалай сайлап алу керек?

3. Мына $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = +\infty$ теңдіктің дұрыстығын дәлелдеу керек.

Осы $x_n = 3^n$ айнымалы 1000-нан артық болу үшін, $N$ санын қалай сайлап алу керек?

4. Мына $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)^n}{2} = \sqrt{ab}$ теңдіктің дұрыстығын дәлелдеу керек.

5. Мына $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \frac{n}{+1}\right) = \frac{1}{2}$ теңдіктің дұрыстығын дәлелдеу керек.

6. Мына екі теңсіздіктің $x_n = \frac{2n-1}{3n+2}$ $(n = 1,3,5,7,9,\ldots)$ және $x_n = \frac{3n-1}{2n+1}$ $(n = 2,4,6,8,10,\ldots)$ жоғарғы шегі мен төменгі шегін табу керек.

7. Мына теңсіздіктерді $lim(x_n - y_n) \le \overline{lim}x_n - \overline{lim}y_n$; $\underline{lim}x_n + \overline{lim}y_n \le \overline{lim}(x_n + y_n) \le \overline{lim}x_n + \overline{lim}y_n$ дәлелдеу керек.

8. Коши теоремасын қолданып, келесі тізбектің

$$x_n = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

шегінің барлығын дәлелдеу керек.

9. Мына сандардан $1 + (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ тұратын жиынның шектік нүктесін табу керек.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n + 1}{n^2 + n + 2} = 3$ екенін дәлелдеу керек.

# III ТАРАУ
# ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ АРГУМЕНТ

## § 1. Тәуелсіз айнымалы мен функция ұғымы

*Егер белгілі бір жиын құратын сандардан айнымалы х-ке кез келген мәнді еркімізше беретін болсақ, ол айнымалы х-ті тәуелсіз айнымалы немесе аргумент деп атайды.*

Бұл анықтама бойынша оның өзгерушілігіне шекара қойылуы керек. Былайша айтқанда, айнымалы $x$ бір аралықтың, (облыстың) ішінде өзгеруі керек. Мәселен, егер айнымалы $x$ нақты $a$ және $в$ $(a<в)$ сандарының арасында жатқан барлық нақты сандарды қабылдаса, онда бұл айнымалы $(a, в)$ интервалының ішінде өзгереді, мұны былай жазып көрсетеді $a<x<в$. Осы $(a, в)$ интервалын айнымалы $x$-тің өзгеру облысы дейді. Егер айнымалы $x$ $a$ мен $в$ санын және олардың арасындағы барлық нақты сандарды қабылдаса, онда бұл айнымалы $[a, в]$ сегментінің бойында өзгереді, оны былай жазады $a \leq x \leq в$. Бұл жолы айнымалы $x$-тің өзгеру облысы сегмент $[a, в]$ болады.

Бұл жағдайларда айнымалы $x$-ті үздіксіз өзгереді дейміз.

Айнымалы $x$-тің өзгеру облыстары шексіз интервалдар $(a,\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,\infty)$ болуы да мүмкін.

Тәуелсіз айнымалылардың өздерін жеке қараудың ешбір мағынасы болмайды, былайша айтқанда олар ғылыми-зерттеу мәнін құра алмайды, өйткені өзгеруі бір-біріне тәуелсіз.

Табиғат құбылыстарын зерттеу физикалық шамалар туралы ұғымға әкеп соғады, ал ол шамаларды өлшеу нәтижесі сандар болып табылады. Табиғат құбылыстарын байқау, тәжірибе арқылы білу физикалық шамалар бір-бірімен өзара байланыста болады, яғни бір физикалық шаманың өзгеруі екінші бір физикалық шаманың өзгеруімен байланысты деген қорытындыға келтіреді. Осыдан функция ұғымы шығады.

Мәселен, өткізгіштің бойымен электр тогы жүргенде, өткізгіштің температурасы өзгеріп, жылу пайда болады. Электр тогы күшінің, өткізгіш кедергісінің, уақыттың және жылу мөлшерінің арасында тәуелділік бар. Бұл мысалда электр тогы күшінің, өткізгіш кедергісінің және уақыттың әрбір мәніне жылудың бір тиісті мәні сәйкес келеді.

Екінші бір мысал, жоғарыдан өз еркімен түсіп келе жатқан дененің қозғалысын байқап, уақытпен дененің жүрген жолы ұзындығының арасындағы өзара байланысқа көңіл жібереміз. Мұнда уақыттың әрбір мезгіліне жолдың бір тиянақты ұзындығы сәйкес келеді.

Үшінші мысал, бір сымның қызуын байқап, температура мен сым ұзындығының арасында өзара байланыс бар деген қорытындыға келеміз. Температураның әрбір сандық мәніне сымнын тиянақты ұзындығы сәйкес келеді.

Төртінші мысал, газдың қысылуын байқап, біз оның қысымы мен көлемінің арасындағы өзара байланысқа көңіл аударамыз. Мұнда да көлемнің әрбір сандық мәніне қысымның де нақты мәні сәйкес келеді.

Тағы да бір мысал, жоғарыдан өз еркімен төмен түсіп келе жатқан дененің жылдамдығы мен ауа кедергісінің арасындағы өзара байланысты байқаймыз, Жылдамдықтың әрбір не ауа кедергісінің тиянақты бір мәні сәйкес келеді. Мұндай мысалдарды келтіре берсек, олардың тіпті ұшы-қиыры жоқ.

Енді физикалық мазмұнға көңіл аудармай-ақ, функция соның абстракт түрдегі анықтамасын беруге көшейік. Математикадағы ең керекті, өте маңызды және қиын амалдардың бірі − функция ұғымы. Функция ұғымының ғылыми анықтамасын бірінші берген орыс халқының атақты математигі Н. И. Лобачевский.

$x$ және $y$, екі айнымалыны қарайық. Аралық *(а, в)* айнымалы $x$-тің өзгеру облысы болсын. Айнымалы $x$-ке осы аралықтан кез келген мән еркінше берілетін болсын.

Егер бір белгілі ереже немесе заң бойынша *(а, в) аралығындағы x-тің әрбір мәніне айнымалы y-тің бір тиянақты мәні сәйкес келсе, онда айнымалы y-ті x-тің (а, в) аралығында анықталған немесе берілген функциясы деп атайды және мұны былай жазып көрсетеді:*

$$y = f(x),\ y = \varphi(x),\ y = g(x) \text{ т.т.}$$

(бұларды былай оқиды: «*y* тең *эф* *x*-тен»).

Мұндағы $f, \varphi, g, \ldots$ әріптері $x$-тің әрбір мәніне $y$-тің тиянақты мәні қандай ереже немесе заң бойынша сәйкес келетіндігін көрсетеді.

Егер $x$-тің бір мәніне $y$-тің бір ғана мәні сәйкес келсе, онда $y$-ті $x$-тің *бірмәнді функциясы* деп атайды.

Егер $x$-тің бір мәніне $y$-тің бірнеше мәні сәйкес келсе, онда $y$-ті $x$-тің *көпмәнді функциясы* деп атайды.

$x$-ті тәуелсіз айнымалы немесе функцияның аргументі деп атайды. Ал *(а, в)* аралығын функцияның анықталу облысы деп атайды. Егер *(а, в)* аралығындағы $x$-тің бір мәні $x_0$ болса,онда оған сәйкес $y$-тің мәні $y_0=f(x)$ болады.

Фукцияның жоғарыда берілген анықтамасында көңіл жіберерлік екі жағдай бар: біріншісі − аргумент $x$-тің *өзгеру облысын* көрсету, екіншісі − $x$ пен $y$ мәндерінің арасындағы *сәйкестік ережені немесе заңды* тағайындау.

Жоғарыда келтірілген физикалык мысалдар үшін сәйкестік заңдары мына түрде болады.

$$1)\ y = rl^2Rx.$$

$y$ − жылу мөлшері, $J$ − электр тогының күші, $R$ − өткізгіштің кедергісі. $x$ − уақыт, $k$ − тұрақты коэффициент.

$$2)\ y = \frac{gx^2}{2}.$$

Мұнда $x$ уақытты көрсетеді, $y$ − жол ұзындығының сәйкес мәні, g − ауырлық күшінің үдеуі.

$$3)\ y = l_0(1 + ax).$$

Мұнда $x$ − температура, $y$ − сымның ұзындығы, $a$ және $l_o$ тұрақты шамалар.

$$4)\ y = \frac{c}{x}.$$

Мұнда $x$ − газдың көлемін көрсетеді, $y$ − оның қысымы, тұрақты сан.

$$5)\ y = rx^3.$$

Мұнда $x$ − дененің жылдамдығын көрсетеді, $y$ − ортаның (ауаның) кедергі күшін көрсетеді.

Функция, аргумент ұғымдары өзімізді қоршап тұрған табиғаттың құбылыстарын зерттеудің нәтижесінде пайда болған ұғымдар.

Шынында, физикалық шамалардың арасындағы өзара байланысты математикалық формулалар арқылы өрнектеу ең қиын проблемалардың бірі болып табылады.

Тағы да бір айта кететін мәселе мынау: физикалық шамалардың арасындағы өзара байланысты математикалық формулалар арқылы өрнектеу құбылысты дәл сипаттамай, тек жуық түрде ғана сипаттайды; табиғат құбылыстарын зерттеген сайын бұл өрнектер дәлденіле береді.

Мәселен, Бойль-Мариотт формуласы, одан гөрі дәлірек Ван-дер-Ваальс формуласымен ауыстырылады; егер жаратылыстану ғылымы мен техника талап ететін болса, бұл кейінгі формула одан да гөрі дәлірек формуламен ауыстырылады.

## § 2. Функциялардың берілу тәсілдері

Айнымалылар мәндерінің арасындағы сәйкестік ережені немесе заңды *функциялық тәуелділік* деп атайды. Осы ережені немесе заңды тағайындау ең қиын мәселелердің бірі болады деп біз жоғарыда айттық.

Айнымалылар мәндерінің арасындағы сәйкестік ереже немесе заң алуан турлі болады, оның ең жабайы және табиғи түрі − аналитикалық өрнектер немесе формулалар арқылы берілуі. Функцияның бұлай берілуін *аналитикалық тәсілмен берілуі* деп атайды.

Теориялық зерттеу мәселелерінде функцияның аналитикалық тәсілмен берілуі математикалық анализде өте маңыңызды роль атқарады. Функцияның аналитикалық тәсілмен берілуі оқушыларға орта мектептен де белгілі.

Жоғарыда келтірілген (1), (2), (3). (4), (5) формулалар функцияның аналитикалық тәсілмен берілуіне мысалдар болып табылады.

Функцияның аналитикалық тәсілмен берілуі көп оқып ысылмаған оқушылардың ойын оның дәл анықтамасынан тайдырады. XVII, XVIII ғасырлар бойы, Лобачевскийдің уақытына дейін, функция деп аналитикалық өрнекті немесе формуланы түсініп келді. Қазіргі уақыттың өзінде де оқушылардың көпшілігі функцияның жоғарыда берілген дәл анықтамасына қарамастан функция деп аналитикалық өрнекті немесе формуланы түсінеді[1]. Шынында, бұл дұрыс емес, өйткені «функцияны жазуға» болмайды, тек аналитикалық өрнектерді ғана жазуға болады.

Егер функция мына түрде

$$y = f(x)$$

аналитикалық өрнекпен берілсе, онда сәйкестік ереже немесе $f$ заңы $y$-тің тиісті мәнін табу үшін $x$-ке және оның қасындағы тұрақты сандарға қандай амалдар жүргізу керек, міне, солардың тәртібін көрсетеді. Бұл амалдар қандай амалдар болу керек деген сұраққа былай жауап беруге болады: *барлық арифметикалық амалдар, дәрежелеу, түбірлеу, логарифмдеу, бұрыштардың мәндері бойынша тригонометриялық функциялардың мәнін табу, шекке көшу.*

Аналитикалық жолдың өзімен функция бір емес, бірнеше теңдіктер арқылы берілуі мүмкін. Физика салаларынан осыған бір-екі мысал келтірейік.

а) Абсолют серпімді доп мына $\frac{1}{2}gt^2$ биіктіктен қозғалмайтын жатық жазықтыққа түседі де, әрбір рет жоғары ыршиды. Доптың

---

[1] *«Функция деп нені айтады?»* деген сұраққа оқушылардың көпшілігі былай жауап береді: «Екі түрлі функциялар бар: 1) «нағыз» функциялар, олар есеп құралдарында, оқулықтарда кездесетін, мәселен, мына тәрізді $y = ax^2 + вx + c, y = \frac{3x-2}{7-6x^2}$ $т.т.$ функциялар, 2) терең теориялық ой функциялары, олар мына *f(x)»*. Мұндай жауаптық қате екендігін түсіну қиын емес.

бастапқы жағдайдағы және *t* мезгілдегі биіктіктерінің айырмасы $h = f(t)$ былай анықталады:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}gt^2, & \text{егер } 0 \le t \le \tau \text{ болса,} \\ \frac{1}{2}g(2\tau - t)^2 & \text{егер } \tau \le t \le 3\tau \text{, болса.} \end{cases}$$

Мұнда бір функция *f(t)* екі теңдік арқылы өрнектеліп тұр. Жалпы алғанда:

$$n = f(t) = \frac{1}{2}g(2n\tau - t)^2, \text{ егер } (2n-1)\tau \le t \le (2n+1)\tau.$$

Етер *n=0,1,2,...m-1* болса, онда бір функция *h=f(t) m* теңдік арқылы өрнектелген болар еді.

б) Тығыздығы μ, радиусы *r* біртектес шардың массасы бірге тең материалды нүктені өзінің центріне тарту күші былай өрнектеледі:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\mu x, \text{егер} & 0 \le x \le r \text{ болса,} \\ \frac{4}{3}\frac{\pi\mu r^3}{x}, \text{егер} & x > t \text{ болса.} \end{cases}$$

Бұл мысалда да функция екі теңдік арқылы өрнектеліп тұр.

в) Келесі үш теңдікпен

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{егер } x < 0 \text{ болса,} \\ \frac{1}{2}, & \text{егер } x = 0 \text{ болса,} \\ 1 + x, & x > 0 \text{ болса,} \end{cases}$$

анықталған функцияны қарайық. Бұл да, шынында, бір-ақ функция, тек үш теңдікпен беріліп отыр.

**2.** Функциялар тек аналитикалық өрнектер немесе формулалар арқылы ғана беріліп қоймайды, олардың басқа берілу жолдары да бар.

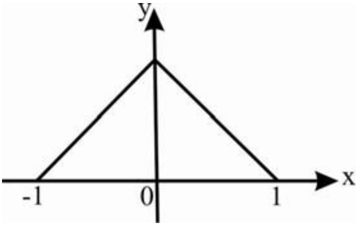
Мәселен, мынадай:

*E(x)* функция *x*-тің бүтін бөлімін көрсетеді:

$$E(1) = 1; E(2{,}5) = 2;\ E(\sqrt{13}) = 3;\ E(-\pi) = -4; E\left(\frac{1}{4}\right) = 0.$$

Бұл функция ешқандай формуламен беріліп отырған жоқ *E(x)* символы *x* санынан аспайтын және оған ең жақын бүтін санды көрсетеді. Бұл функция *y=E(x)* былай оқылады: *y* тең антье *x*.

Абсциссалар осіне түскен проекциясы *[a, в]* сегменті болып келетін жазықтық нүктелерінен тұратын *Q* жиынын қарайық. Бұл жиын ординаталар осіне параллель әрбір түзумен бір-ақ нүктеде қиылысатын болсын, Сонда *Q* жиынының ординатасы *[a, b]* сегментінде анықталған функция болып табылады. Мәселен, *[−1,*



6-чертеж.

*1]* сегментті берілген табаны деп қарап, тең бүйірлі үшбұрыш құрайық (6-чертёж). Сонда функция *y=f(x)* осы үшбұрыштың бүйір қабырғаларының ординаталары болады. Бұл функцияның аналитикалық өрнегі мынадай:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 - x, \text{егер } 0 \le x \le 1 \text{ болса} \\ 1 + x, \text{егер } -1 \le x \le 0 \text{ болса;} \end{cases}$$

Әрине, бұл функцияны мынадай түрде

$$y = f(x) = 1 - |x| \text{ деп,}$$

бір ғана теңдік арқылы өрнектеуге болады.

Екі теңдікпен берілген мынадай функцияны қарайық.

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{егер } x \text{ рационал сан болса;} \\ 0, \text{егер } x \text{ иррационал сан болса.} \end{cases}$$

Мұны *Дирихле функциясы* деп атайды. Бұл функция ешқандай аналитикалық формуламен беріліп тұрған жоқ. Дирихле функциясының анықталу облысы (−∞, ∞) болады.

Енді үш теңдікпен берілген келесі бір функцияны қарайық:

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{егер } x < 0 \text{ болса;} \\ 0, \text{егер } x = 0 \text{ болса;} \\ +1, \text{егер } x > 0 \text{ болса.} \end{cases}$$

Бұл элементар функция емес. Осы келтірілген функцияны былай белгілейді: $y = f(x) = signx$ және оны былай оқиды: *«у тең сигнум х»*. Бұл функцияның анықталу облысы бүкіл нақты сандар жиыны, яғни (−∞,∞), ал функцияның қабылдайтын мәндерінің барлығы үшеу-ақ:− 1, 0,+ 1.

3. Жаратылыс тану ғылымдарында және техника мәселелерінде шамалардың арасындағы тәуелділік көбінесе тәжірибе, байқау, эксперимент жүзінде тағайындалады. Зерттелінуші шамалардың арасындағы тәуелділік таблица түрінде беріледі. Мәселен, қаныққан бу қысымы $p$ мен температураның арасындағы функциялық тәуелділікті мынадай таблицамен

| *t* | 105 | 110 | 115 | 120 | 125 |
|---|---|---|---|---|---|
| *p* | 1,232 | 1,462 | 1,726 | 2,027 | 2,371 |

беруге болады.

Функциялық тәуелділіктің осылай берілуін оның *таблицалық тәсілімен берілуі* деп атайды.

Егер функция таблицалық тәсілмен берілсе, онда координаталар системасын, біздің келтірген мысалымыз үшін *top* системасын, алып жазықтыққа мына нүктелердің (105; 1,232), (110; 1,462); (115; 1,726); (120; 2,027); (125; 2,371) координаталарын құрамыз да, осы нүктелерді тұтасып жатқан қисық сызықпен қосамыз. Осындай амалдың нәтижесінде шыққан қисық сызық температура $t$ мен қысым $p$-нің арасындағы байланысты береді. Қисық құрылған нүктелердің барлығын дәл басып өтпеуі мүмкін, өйткені тәжірибелік байқау және өлшеу істерінде қателер сөзсіз кетеді. Құрылған график бойынша аргументтің таблицада жоқ мәндеріне функцияның сәйкес мәндерін табуға болады.

Функция бірден график арқылы да беріледі. Графикті бірден жасайтын әртүрлі аспаптар бар. Мәселен, атмосфералық қысымның тәулік ішіндегі өзгерісін автомат түрде жазатын аспап бар (оның атын барограф дейді); двигательдегі (қозғалтқыштағы) газ немесе бу қысымы мен поршень жағдайының арасындағы тәуелділікті өзі жазатын аспап бар (оның атын индикатор дейді); динамомашинадағы электр тогында немесе кернеуінде болатын тербелістерді өзі жазатын аспап бар (оны осциллограф дейді); поездағы немесе машинадағы жылдамдықтың өзгеруін өзі жазатын аспап бар (оны технограф дейді).

Функцияның таблицалық тәсілмен берілуі оқушыларға орта мектептен де белгілі. Мәселен, мына функциялардың

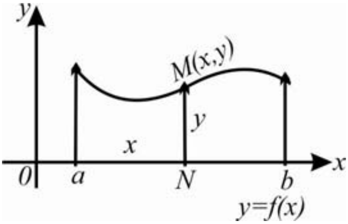
$$y = sinx, y = cosx, y = tgx, y = ctgx, y = lg_{10}x$$

таблицаларымен оқушылар таныс.

## § 3. Функцияның геометриялық кескіні

*(а, в)* аралығында анықталған *y=f(x)* функцияны қарайық. Аргумент $x$-тің мәні және функцияның оған сәйкес мәні бір пар *(x, y)* сандар. Бұл бір пар санға *xoy* жазықтығында жатқан нүкте *M* сәйкес келетіні аналитикалық геометриядан белгілі. Аргумент *x*-тің мәні бұл нүкте үшін абцисса болып табылады да, ал функцияның сәйкес мәні ордината болып табылады. Аргумент *x* *(а, в)* аралығында өзгергенде нүкте *M (x,y)* бір қисықты сызады, міне, осы қисық *y=f(x)* функцияның *геометриялық кескіні немесе*

*бейнесі* болып табылады (7-чертёж). Бұл қисықты *функцияның графигі деп атайды, ал y=f(x)* теңдігін оның *теңдеуі* деп атайды.



7-чертеж.

*Аргументтің өзгеру облысынан алынған алуан түрлі мәндеріне функцияның сәйкес келетін мәндерін кескіндейтін нүктелердің геометриялық орнын функцияның графигі деп атайды.*

Осы айтылып отырған геометриялық орын *xoy* жазықтығындағы нүктелер жиыны болып табылады. Бұл жиын төмендегі шарттарды қанағаттандыруы керек; а) жиынның әрбір нүктесінің абсциссасы аргумент мәніне тең де, ал ординатасы функцияның сәйкес мәніне тең; б) абсциссасы аргументтің мәніне, ал ординатасы функцияның сәйкес мәніне тең әрбір нүкте функцияның графигіне жатады.

Кез келген функцияның графигі жазықтықта жатқан тұтас сызық бола бермейді. Кейбір функциялардың тіпті геометриялық кескіні болмайды. Мәселен, Дирихле функциясының геометриялық кескіні мүлде жоқ.

Аргументке оның өзгеру облысынан алуан түрлі мәндер беріп, функцияның оған сәйкес мәндерін тауып, бірнеше нүктелерді табамыз. Осы нүктелерді *xoy* жазықтығында құрып, сонан кейін оларды бір-бірімен қосып, функцияның графигін жасаймыз. Әрине, бұл жолы кез келген функцияның графигін құра беруге болмайды. Функцияның графигін құру үшін барлық қасиеттерін зерттеу керек. Барлық қасиеттері зерттеліп болғаннан кейін функцияның графигін құру қиын емес. Бірақ қазір біз мұны жасай алмаймыз, өйкені функциялардың қасиеттері туралы бізде мәлімет толық емес. Кейін бұл мәліметтер толықтырылады.

Функцияның графигін координаталық системалардың (декарттық, поляр) бәрінде де құруға болады.

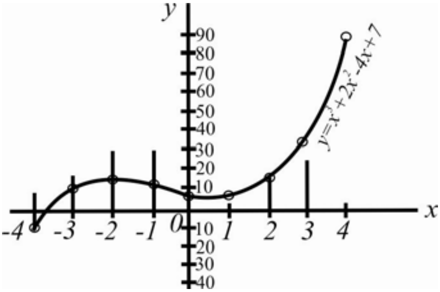
Сонымен, қысқасын айтқанда, *y=f(x)* функцияның геометриялық кескіні жазық сызық болатын болды (бірақ әрқашан да емес!).

Функциялардың графиктерін құру жөнінде біраз мысалдар келтірейік.

а) [−4, 4] сегментінде берілген мына $y=x^3+2x^2-4x+7$ функцияның графигін құрып көрейік. Ол үшін келесі таблицаны жасаймыз:

| X | − 4 | − 3 | − 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X^2$ | 16 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |
| $X^3$ | − 64 | 27 | − 8 | − 1 | 0 | 1 | 8 | 27 | 64 |
| У | − 9 | 10 | 15 | 12 | 7 | 6 | 15 | 40 | 87 |

Міне, осы таблица бойынша графигін құрамыз, тек мұнда $OY$ осі бойынша алынған масштабты $OX$ осі бойынша алынған масштабпен салыстырғанда 20 есе кішірейту керек (8-чертёж).

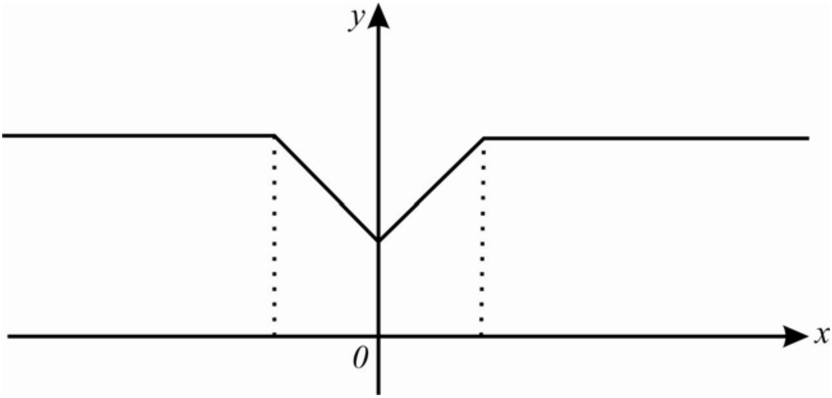


8-чертеж.

Келесі үш теңдікпен

$$y=f(x)=\begin{cases} 2, & \text{егер} \quad x\leq -1 \text{ болса;} \\ 1-x, & \text{егер} \quad -1\leq x\leq 0 \text{ болса;} \\ 2, & \text{егер} \quad x\geq 1 \text{ болса.} \end{cases}$$

берілген функцияның графигін құрайық (9-чертеж). Бұл функцияның анықталу облысы (−∞,∞).



9-чертеж.

## § 4. Функцияның анықталу облысы

Аргументтің қабылдайтын мәндерінің жиынын функцияның анықталу немесе берілу облысы деп атайды, бұл туралы біз жоғарыда айттық. Аналитикалық өрнекпен немесе формуламен берілген $y=f(x)$ функцияны қарайық. Мұнда символ $f$ функция $y$-тің сәйкес мәнін табу үшін $x$-ке жүргізілетін амалдардың жиынын көрсетеді дедік. Ал аргумент $x$-тің қабылдайтын мәндері нақты сандар. Осы нақты сандарға өрнекте көрсетілген барлық амалдарды жүргізудің нәтижесінде нақты сан немесе комплекс сан шығуы мүмкін, тіпті өрнектің мағынасы болмауы да мүмкін. Егер бірінші жағдай орындалса, онда өрнектің немесе формуланың мағынасы бар дейміз, кейінгі екі жағдай орындалса, өрнек өзінің мағынасын жоғалтады дейміз. Мәселен, мынадай

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \qquad y = \frac{1}{x^{\bar{2}} - 2x}$$

екі функцияны қарайық. Аргумент $x$-тің абсолют шамасы 1-ден аспаса, яғни (-1, 1] сегментте өзгерсе, бірінші функцияның мағынасы бар, ал егер $x$-тің абсолют шамасы 1-ден артып кетсе, онда бірінші функция өзінің мағынасын жоғалтады. [-1, 1] сегментті бірінші функцияның анықталу немесе өмір сүру облысы дейді. Екінші функция өзінің мағынасын мына $x=0$, $x=2$ мәндерде немесе нүктелерде жоғалтады, бұлардан басқа мәндердің барлығында функцияның толық мағынасы бар. Демек, бұл функцияның анықталу облысы (∞, 0), (0,2) және (2, ∞) болады.

Сонымен, осы айтылғандардан мынадай қорытынды жасауға болады: егер функция аналитикалық өрнекпен берілсе

$$y = f(x)$$

және аргумент $x$-тің өзгеру облысы көрсетілмесе, онда бұл функцияның анықталу облысын білу үшін өрнектің толық мағынасы болатын барлық нақты сандардың жиынын іздеу керек.

Мысалы, мынадай функция

$$y = \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$$

қарайық. Бұл функцияның $x-2>0$ және $3-x>0$ болса ғана толық мағынасы болады. Сонымен, берілген функцияның анықталу облысын табу үшін осы екі теңсіздікті шешу керек. Бірінші теңсіздіктен табамыз $x>2$, екінші теңсіздіктен $x<3$. Демек, берілген функцияның анықталу облысы (2, 3) интервал болады.

Тағы да мынадай

$$y = \sqrt{4-x}$$

бір функцияны қарайық. Бұл функцияның толық мағынасы болу үшін аргумент $x$ төмендегі теңсіздікті

$$4 - x \geq 0$$

қанағаттандыруы керек. Бұл арадан

$$x \leq 4.$$

Ендеше берілген функцияның анықталу облысы жарты интервал $(-\infty, 4]$ болады.

Тағы да бір мысал келтірейік:

$$y = lg\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x+5}.$$

Оң сандардың ғана нақты логарифмі болатыны белгілі (бұл арадан теріс сандардың логарифмдері тіпті болмайды деген қорытынды шықпайды, олардың логарифмдері болады, бірақ комплекс сандар болады). Берілген функцияның анықталу облысын табу үшін келесі теңсіздікті

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x+5} > 0$$

шешу керек. Осы теңсіздіктен $x^2+2x+5=(x+1)^2+4>0$ болатындықтан, $x^2-5\,x+6>0$ немесе $(x-2)\ (x-3)>0$ болады. Кейінгі теңсіздік орындалу үшін мына $x-2$ және $x-3$ көбейткіштердің таңбалары бір түрлі болу керек, яғни

$$x-2>0,\ \ x-3>0$$

немесе

$$x-2<0,\ \ x-3<0.$$

Бұл аралардан

$$x>2, \qquad x>3$$

немесе

$$x<2, \qquad x<3.$$

Сонымен, берілген функцияның анықталу облыстары (3, ∞) (−∞, 2) болады.

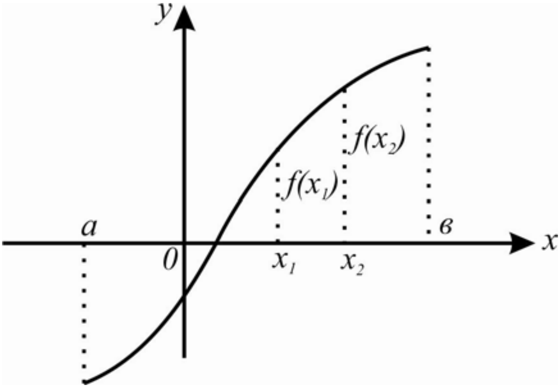
## §5. Біркелкі функциялар

Математикалық анализдің негізгі мақсаттарының бірі − функцияларды талдау, зерттеу. Функцияларды зерттеу деген мәселе аргументтің өзгеруімен байланысты, оның өз өзгерісін сипаттау деген сөз.

Функцияның өзгеру тәсілдерін зерттеулердің жай бір түрі − ол үдей ме, әлде кеми ме, соны байқау.

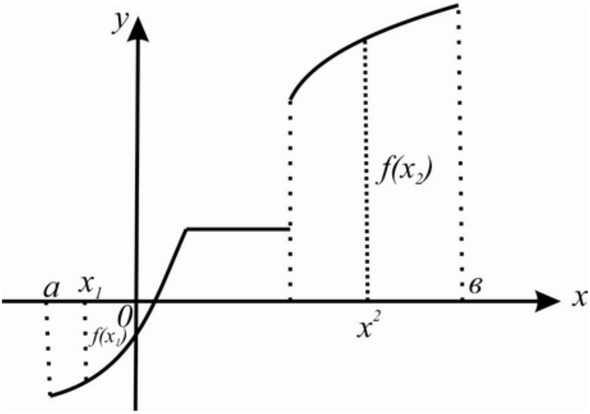
*(а, в*) аралығында анықталған $y=f(x)$ функцияны, егер аргумент $x$-тің мынадай $x_2>x_1$ теңсіздікті қанағаттандыратын кез келген екі $x_1$ және $x_2$ мәндері үшін келесі теңсіздік $f(x_2)>f(x_1)$ орындалса, осы аралықта *үдеме функция* деп атайды.

Үдеме функцияның графигі 10-чертёжде көрсетілген. Сонымен, егер аргументтің үлкен мәніне функцияның үлкен мәні сәйкес келсе, онда функция $y=f(x)$ үдеме функция деп аталатын болады.



10-чертёж

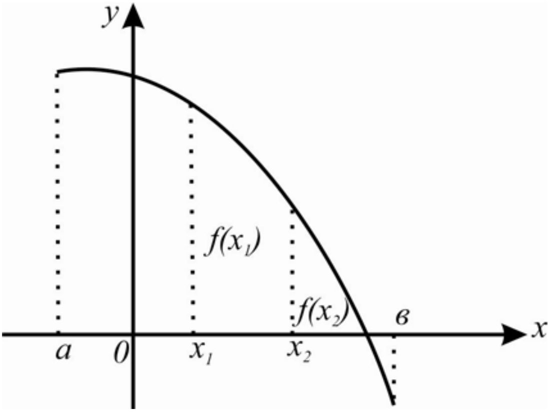
Егер мына $x_2>x_1$, теңсіздіктің орындалуынан келесі теңсіздік $f(x_2)\geq f(x_1)$ орындалса, онда $y=f(x)$ функцияны *кемімейтін функция* деп атайды. Мұндай функцияның графигі 11-чертёжде көрсетілген.



11-чертёж

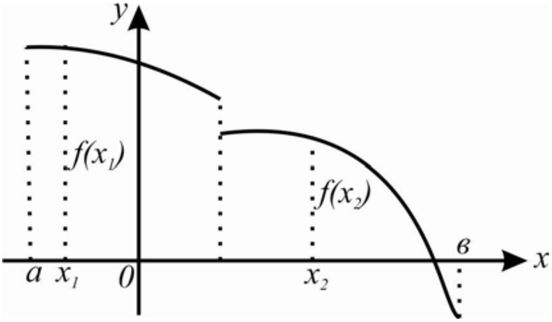
Егер аргумент $x$-тің *(а, в)* аралықтан алынған және $x_2>x_1$ теңсіздікті қанағаттандыратын кез келген $x_1$ және $x_2$ мәндері үшін мына $f(x_2)<f(x_1)$ теңсіздік орындалса, $y=f(x)$ функциясын, осы аралықта *кеміме функция* деп атайды.

Сонымен, егер аргументтік үлкен мәніне функцияның кіші мәні сәйкес келсе, онда мұндай функцияны *кеміме* деп атайтын болдық. Мұндай функцияның графигі 12-чертёжде көрсетілген.



12-чертёж

Егер мына $x_2>x_1$ теңсіздіктің орындалуынан келесі теңсіздік $f(x_2)\leq f(x_1)$ орындалса, онда функция $y=f(x)$ *үдемейтін функция* деп аталады. Мұндай функцияның графигі 13-чертёжде көрсетілген.



13-чертёж

Үдеме және кеміме функция бір атпен айтқанда *біркелкі функция* деп аталады.

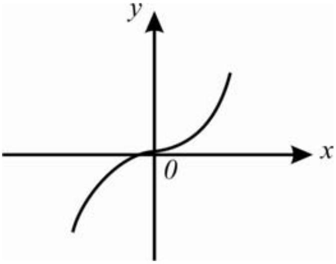
$(-\infty,\ \infty)$ интервалда анықталған $y=x^3$ функцияның осы интервалда біркелкі үдемелі екенін дәлелдейік. $x_1$ және $x_2$ мына $(-\infty,\ \infty)$ интервалдың кез келген және төмендегі теңсіздікті $x_2>x_1$ қанағаттандыратын нүктелері болсын. Осы нүктелердегі функцияның мәндері:

$$f(x_2)=x_2^3 \text{ және } f(x_1)=x_1^3 \text{ болады.}$$

Бұл арадан

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2).$$

Мына $x_2^2+x_1x_2+x_1^2$ квадрат үшмүшені былай жазуға болады



14-чертеж.

$$x_2^2+x_1x_2+x_1^2=\left(x_2+\frac{1}{2}x_1\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2.$$

Квадрат үшмүшенің оң екендігі осы арадан өз-өзінен айқын көрініп тұр. Екінші жағынан $x_2>x_1$ болғандықтан, $x_2^3>x_1^3$. Олай болса $f(x_2)>f(x_1)$. Осымен $f(x)=x$ функцияның біркелкі үдемелігі дәлелденді.

Тексеріліп отырған функцияның графигі 14-чертёжда көрсетілген.

## §6. Жұп, тақ және периодты функциялар

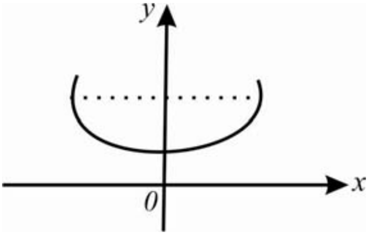
**1.** Бүкіл $OX$ осі бойында немесе координаталардың бас нүктесіне қарағанда симметриялы аралықта анықталған $y=f(x)$ функцияны қарайық.

Егер көрсетілген облыстардың әрбір $x$ нүктесі үшін мына теңдік

$$f(-x)=f(x)$$

орындалса, онда $y=f(x)$ функцияны *жұп функция* деп атайды.

Жұп функцияның графигі $OY$ осіне қарағанда симметриялы болады (15-чертёж).



15-чертеж.

Мысалы, мына функциялар: $y=cosx$, $y=x^{2n}$. ($n$ − оң бүтін сан), $y=cx^2$, $y=|x|$ − жұп функциялар.

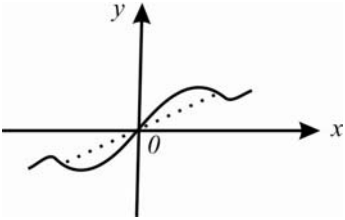
Жоғарыдағы айтылған облыстардың әрбір нүктесінде мына теңдік

$$f(-x)=-f(x)$$

орындалса, онда $y=f(x)$ функцияны *тақ функция* деп атайды.

Мәселен, мына функциялар: $y=sinx, y=x^{2n+1}$($n$ − оң бүтін сан) тақ функциялар болады.

Тақ функцияның графигі координаталардың бас нүктесіне қарағанда симметриялы болады (16-чертёж).



16-чертеж.

Жұп және тақ функциялардың анықтамасынан келесі қорытындыларды жасауға болады.

а) Екі жұп немесе екі тақ функциялардың көбейтіндісі жұп функция болады. $\varphi(x)$және $\psi(x)$ – жұп функциялар болсын. Сонда бұлардың көбейтіндісі

$$f(-x)=\varphi(-x)\,\psi(-x)=\varphi(x)\,\psi(x)=$$
$$=f(x).$$

Егер $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ екеуі де тақ болса, онда олардың көбейтіндісі

$$f(-x)=\varphi(-x)\psi(-x)=[-\varphi(x)][-\psi(x)]=\varphi(x)\psi(x)=f(x).$$

б) Жұп функция мен тақ функцияның көбейтіндісі тақ болады. $\varphi(x)$ жұп, $\psi(x)$ тақ болсын. Сонда олардың көбейтіндісі

$$f(-x) = \varphi(-x)\psi(-x) = \varphi(x)[-\psi(x)] = -\varphi(x)\psi(x) = -f(x).$$

**2.** Енді периодты функция деп қандай функцияны айтады, соған келейік.

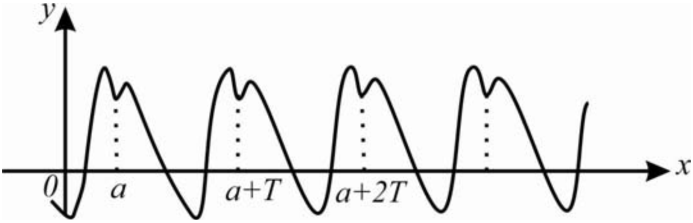
*Егер нольден айрықша тұрақты T саны табылып, аргументтің кез келген мәні үшін*

$$f(x+T) = f(x)$$

*теңдігі орындалса, y=f(x) функциясын периодты функция деп атайды.*

Осындай қасиетке ие болушы тұрақты *T* санын *f(x)* функцияның *периоды* деп атайды.

Мәселен, мына функциялар sin$x$, cos$x$, tg$x$, ctg$x$ периодты функциялар; алдыңғы екі функцияның периоды 2 π, қалған екі функцияның периоды π болады.



17-чертёж.

Периодты функцияның толық графигін құру үшін, алдымен оның графигін *[a, a + T]* сегмент үшін құрып алу керек те, сонан кейін периодты түрде қайталап, сол графикті әрі қарай сала беру керек (17-чертёж).

Периодты функциялардың қосындысы, айырмасы, көбейтіндісі, бөліндісі әрқашан да периодты функция болады.

Егер T − мына *f(x)* функцияның периоды болса, онда мына сандар да $2^T$, $3^T$, $4^T$,.. $m^T$ сол функцияның периоды болып табылады. Осылай болатыны чертёжден-ақ көрініп тұр. Сонымен,

$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = \cdots = f(x+mT).$$

Ал

$$f(x) = f[(x-T)+T] = f(x-T),$$

олай болса, мына сандар да − T, − $2^T$, − $3^T$, − $4^T$,... функция *f(x)*-тің периоды болып табылады.

*(a, в)* аралығында берілген *f(x)* функцияны периодтық жалғастыру деп осы аралықта *f(x)* функциямен тең болатын,

периодты *F(x)* функцияны құруды айтады. Мәселен, [-1, 1] сегментте берілген *f(x)=x* функция үшін периодтық жалғас мына түрде анықталады.

$$F(x) = \begin{cases} x, \text{егер} & -\pi \le x \le \pi \\ x_0, \text{егер} & x = 2\pi n + x_0; \quad n - б\textit{үтін}\,\text{сан}, -\pi \le x_0 \le \pi. \end{cases}$$

## §7. Негізгі элементар функциялар туралы қысқаша шолу

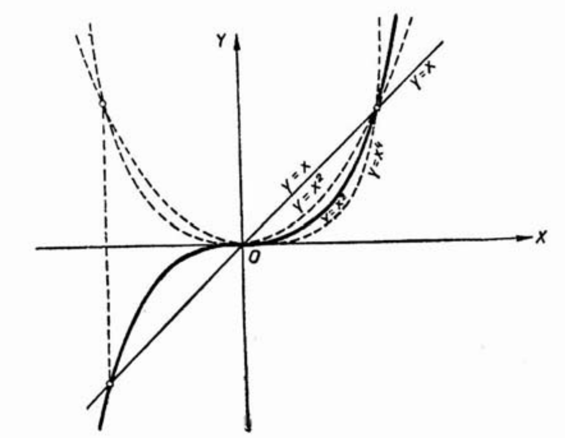
Біздің қысқаша шолу берейік деп отырған функцияларымыз оқушыларға орта мектептен белгілі.

Негізгі элементар функцияларға келесі функцияларды жатқызады:

**I.** *y=c,* мұнда *c* − тұрақты сан. Бұл функция аргумент *x*-тің барлық мәндері үшін анықталған және ылғи бірдей бір мәнді қабылдайды. Айтылып отырған функцияның графигі *OX* осіне параллель түзу болады.

**II.** $y=x^n$ (мұнда *n* − натурал сан). Бұл функция аргумент *x*-тің барлық мәндері үшін анықталған, яғни оның анықталу облысы (−∞, ∞) болады.

Қарастырылып отырған функцияның графигін *n-ші ретті парабола* деп атайды. Егер *n=1* болса, онда оның графигі түзу болып табылады; *n*=2 болса − кәдімгі парабола болады; *n=3* болса, онда функцияның графигі кубтік парабола болады. *n* санының жұптығына және тақтығына қарай қарастырылып отырған функцияның графигі түрліше болады (18-чертёж).



18-чертёж.

Осы айтылып отырған функцияларға қосу, азайту, көбейту жай арифметикалық амалдарды жүргізіп, төмендегі функцияны құруға болады:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \qquad (1)$$

Мұнда $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... $a_n$ − тұрақты сандар, бұларды коэффициенттер деп атайды. (1) теңдікпен анықталатын функцияны *бүтін рационал функция* деп атайды. Бұл функцияның анықталу облысы (−∞, ∞) интервалы.

(1) теңдіктің оң жағында тұрған өрнекті көпмүше дейді. Осы көпмүшені нольге айналдыратын аргумент $x$-тің мәндерін оның *түбірі* немесе *нолі* деп атайды. Бұл арадан мынадай қорытындыға келеміз: жаңағы айтылған көпмүшенің түбірлерін табу үшін, мына $n$ дәрежелі алгебралық теңдеудің:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

түбірлерін табу керек.

Аргументтің бүтін рационал функцияны ±∞-ке айналдырып жіберетін мәндерін оның *полюстері* деп атайды.

Аргумент $x$-тің шектеулі мәндері бүтін рационал функцияның полюстері бола алмайды. Ендеше оның полюстері $x'=-\infty$ және $x''=+\infty$ болады.

Бүтін рационал функциялар өздерінің құрылыстары жағынан өте оңай болғандықтан, олар математикалық анализде ең негізгі функциялар болып табылады. Бұл функциялар кең түрде қолданылады, күрделі функциялардың жуық сипаты үшін алынады. Мәселен тригонометриядан белгілі sin$x$-ті бүтін радионал функция арқылы былай жуықтап өрнектеуге болады:

$$sinx \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Бүтін радионал функциялардың дербес түрлері: $y = ax + в$, бұл функцияны сызықты функция дейді, оның геометриялық кескіні түзу сызық болады; $y = ax^2 + 2вx + c$, бұл функцияны квадратикалық функция деп атайды, оның геометриялық кескіні кәдімгі парабола болады; $y = ax^3 + вx^2 + cx + d$, бұл функцияның графигінің бір түрі 14-чертёжде көрсетілген.

Екі көпмүшенің мына түрдегі

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \cdots + b_{m-1} x + b_m}$$

қатынасын бөлшек рационал функция дейді.

Мынадай

$$b_0x^m + b_1x^{m-1}b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-1}x + b_m = 0$$

алгебралық тендеудің нақты түбірі әрқашан да бола бермейді. Осы теңдеудің нақты түбірлері *а₁, а₂, ..., а*$_к$ болсын *(к≤m)*. Егер аргумент $x$ осы сандардың біреуін қабылдаса, онда (2 бөлшек рационал функцияның бөлімі нольге айналып кетеді Егер аргумент $x$-тің осы мәнінде бөлшектің алымы бір тиянақты санға тең болса, онда (2) теңдікпен анықталған рационал функция шексіздікке айналады. Сондықтан аргументтің бұл мәні үшін, (2) функция анықталған болып табылмайды. (2) бөлшек рационал функция бөлімінің түбірі болып табылмайтын сандардың барлығында анықталған.

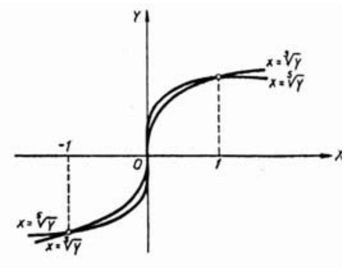
Сонымен, (2) бөлшек рационал функцияның анықталу, облыстары

$$(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \dots (a_{k-1}, a_k), (a_k, +\infty)$$

болады.

**III.** $y = \sqrt[n]{x}$, мұнда *n* − тұрақты натурал сан. Егер *n* тақ болса, онда функцияның анықталу облысы (−∞;∞) интервал болады; ал егер *n* жұп болса, оның анықталу облысы (0; ∞) аралық болады.

Қарастырылып отырған функцияның геометриялық кескіні немесе графигі *n*-ші ретті парабола болады, өйткені ол функцияны мына түрде $x = y^n$ жазуға болады; сонда *x* пен *y*-тің рольдері бір-бірімен ауыстырылады (19-чертёж)



19-чертеж.

**IV.** $y = a^x$ (мұнда $a$ − тұрақты сан және *a* > 0, *a≠1*).

Бұл функцияны *көрсеткіштік функция дейді.* Көрсеткіштік функцияның анықталу облысы (−∞, ∞) интервалы болады.

Көрсеткіштік функцияның графигі оқушыларға орта мектептен белгілі. Математикалық анализде көбінесе мынадай $y=e^x$ көрсеткіштік функция қолданылады. Бұл функцияның негізі өзімізге белгілі *e* саны.

**V.** $y = lg_a x$, мұнда $a = const, a > 0, a \neq 1$.

Бұл функцияны *логарифмдік функция* дейді және оның анықталу облысы (0, ∞) интервал болады, былайша айтқанда, теріс сандардың нақты логарифмдері болмайды. Математикалық анализде көбінесе натурал *lnx*-ті қарайды.

Логарифмдік функциялардың графиктері оқушыларға орта мектептен белгілі, сондықтан оларды келтіруді қажет деп таппаймыз.

**VI.** $y=x^a$, мұнда $a$ – кез келген нольден айрықша тұрақты нақты сан. Бұл функцияны *дәрежелік функция* деп атайды. Дәрежелік функцияның анықталу облысы $\alpha$ санына тәуелді.

Мәселен, а) егер α оң рационал сан болса, яғни $\alpha = \frac{m}{n}$ және мына $\frac{m}{n}$ қысқартылмайтын бөлшектің бөлімі $n$ − тақ болса, онда дәрежелік функцияның анықталу облысы (−∞, ∞) интервал болады.

б) Егер α оң иррационал сан болса немесе мына түрдегі $\frac{m}{n}$ − бөлімі жұп қысқартылмайтын бөлшек болса, онда дәрежелік функцияның анықталу облысы (0, +∞) аралық болады.

в) Егер α<о болса және (а) жағдайдағы шарттарды қанағаттандырса, онда дәрежелік функция $x=0$ нүктеден басқа түзудің барлық нүктелерінде анықталған болады.

г) Егер α<0 болса және б) жағдайдағы шарттарды қанағаттандыратын болса, онда дәрежелік функцияның анықталу облысы (0, + ∞) интервал болады.

**VII.** $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}\, x$, $y=\mathrm{ctg}\, x$.

Бұл функцияларды *тригонометриялық функциялар* деп атайды.

$$y=\sin x, \quad y=\cos x$$

функциялардың анықталу облысы (−∞,∞) интервал болады.

Функция $y=\mathrm{tg}\ x$ түзудің мына $x = (2n+1)\frac{\pi}{2} (n = 0, \pm 1 \pm 2 \dots)$ нүктелерінен басқа, барлық нүктелерінде анықталан.

$y = ctgx$ түзудің мына $x = n^{\pi} (n = 0 \pm 1 \pm 2, \dots)$ нүктелерінен басқа, барлық нүктелерінде анықталған.

Тригонометриялық функциялардың да графиктері оқушыларға орта мектептен белгілі болғандықтан, оларды келтіруді бұл арада тағы да қажет деп таппаймыз.

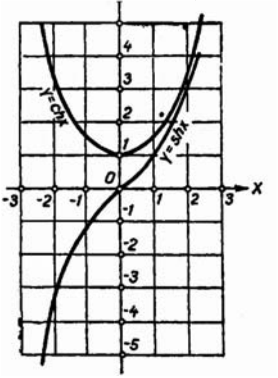
**VIII.** $y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ – гиперболалық синус.

$y = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ – гиперболалық косинус,

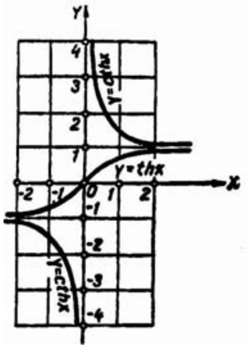
$y = thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ – гиперболалық тангенс,

$y = cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ – гиперболалық котангенс.

Бұл функцияларды *гиперболалық функциялар* (гиперболалық синус, гиперболалық косинус, гиперболалық тангенс, гиперболалық котангенс) деп атайды.



20-чертёж.



21-чертёж.

Гиперболалық котангенстен басқалары $x$-тің барлық мәндері үшін анықталған. Гиперболалық котангенс $x$=0 нүктесінде өзінің мағынасын жоғалтады.

Гиперболалық функциялардың тригонометриялық функциялармен тамаша ұқсастығы бар. Мәселен,

$$ch(x \pm y) = chxchy \pm shxshy,$$
$$sh(x \pm y) = shxchy \pm chxshy.$$
$$ch^2x - sh^2x = 1,$$
$$ch2x = ch^2x + sh^2x,$$
$$sh2x = 2shxchx.$$

Бұл функциялардық графиктері 20-шы және 21-ші чертеждерде келтірілген.

## §8. Кері функциялар

1. *(a, в)* аралығында анықталған *y=f(x)* функцияны қарайық. Аргумент $x$, *(a, в)* аралығында үздіксіз өзгергенде, айнымалы $y$-тің мәндері *(c, d)* аралығын құратын болсын.

Егер айнымалы $y$-тің *(c, d)* аралығынан алынған әрбір мәніне айнымалы $x$-тің бір немесе бірнеше мәндері сәйкес келсе, онда біз $x$-ті айнымалы $y$-тің бірмәнді немесе көпмәнді функциясы деп айтамыз және оны былай белгілейміз: $x = \varphi(y)$. Осы $x = \varphi(y)$

функцияны $y=f(x)$ функцияға *кері функция* деп атайды. Кері функция $x=\varphi(y)$, $(c, d)$ аралығында анықталған.

$y=f(x)$ функцияны және оған кері $x=\varphi(y)$ функцияны бір қисық кескіндейді, былайша айтқанда, бұл екі функцияның графигі біреу-ақ болады.

Мәселен, $y=x^2$ функцияны қарайтын болсақ, бұл функцияның анықталу облысы $(-\infty,\infty)$. Егер айнымалы $x$ осы $(-\infty,\infty)$ интервалда өзгерсе, айнымалы $y$-тің сәйкес мәндері $(0, \infty)$ аралығын құрады. Олай болса, берілген функцияға кері функция $x=\pm\sqrt{y}, (0,\infty)$ аралығында анықталады.

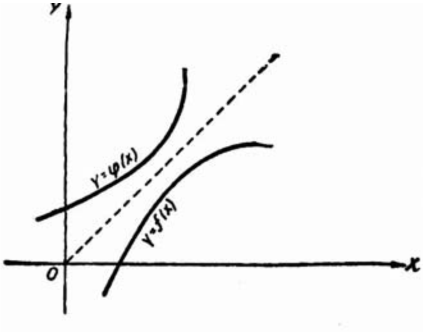
Бастапқы берілген функция бірмәнді болғанымен, оған кері функция екімәнді. Осы екімәнді функцияның орнына мына $x=+\sqrt{y}$ және $x=-\sqrt{y}$ екі бірмәнді функцияларды қарауға болады. Бұл екі функцияның әрқайсысын көпмәнді функцияның *тармағы* деп атайды.

Бастапқы берілген $y=x^2$ функцияның және оған кері $x=\pm\sqrt{y}$ функцияның графигі $OY$ осіне симметриялы парабола болады.

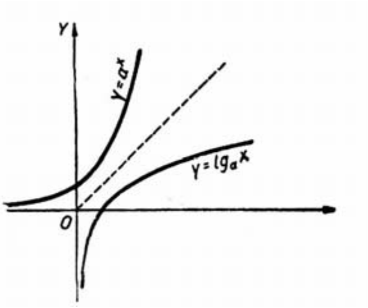
Енді $y=a^x$ көрсеткіштік функцияны қарайық. Бұл функцияның анықталу облысы $(-\infty,\infty)$ интервалы болатынын біз жоғарыда айттық. Көрсеткіштік функцияға кері функция $x=lg_a y$ болады, бұл функцияның анықталу облысы $-\infty<y<\infty$.

Бастапқы берілген $y=f(x)$ функция мен оған кері $x=\varphi(y)$ функцияның графигі біреу-ақ болады дедік. Егер кері функцияның да аргументін $x$ арқылы белгіленсін десек, яғни $x=\varphi(y)$ функцияның орнына $y=\varphi(y)$ функцияны қарайтын болсақ, онда графиктің түрін өзгертпей, тек орнын ауыстыруға тура келеді (22-чертёж). Мұны іс жүзіне асыру үшін чертёж жатқан жазықтықты, яғни $XOY$ жазықтығын бірінші координаталық бұрыштың биссектрисасын айналдыра, 180 градусқа бұру керек (23-чертёж).

Айталық, биссектриса айнаның ролін атқарады. Сонда $y=\varphi(x)$ кері функцияның графигі, бастапқы берілген $y=f(x)$ функцияның биссектриса бойынша айнаға түскен суреті болып табылады.



22-чертёж



23-чертёж

Бұл жерде бір айта кететін мәселе мынау: бастапқы берілген функция бірмәнді болғанымен, оған кері функция көбінесе бірмәнді функция болмайды. Ендеше мынадай сұрақ туады: қандай функцияның кері функциясы бірмәнді болады Бұл сұраққа жауап кейін беріледі.

Егер *y=f(x)* және *y=φ(x)* өзара кері функциялар болса онда

$$f[\varphi(x)] = x \text{ және } \varphi[f(x)] = x.$$

Мәселен, егер $f(x) = x^2$, ал $\varphi(x) = +\sqrt{x}$,
онда

$$f[\varphi(x)] = (\sqrt{x})^2 = x, \qquad \varphi[f(x)] = \sqrt{x^2} = x.$$

Бастапқы берілген *y=f(x)* функцияның белгілі графигі бойынша, оған кері функцияның графигін құрудың жолы мынау: берілген графикке бірінші координаталық бұрыштық биссектрисасы бойынша симметриялы болатын қисықты құрамыз: сонда осы кейінгі қисықтың теңдеуі *y=φ(x)* болады, мұнда *φ(x)* − бастапқы берілген *f(x)* функцияға кері функция.

Мұны дәлелдеу үшін мына $\varphi[f(x)] = x$ теңдіктің дұрыстығын дәлелдеу керек. *y=f(x)* функция графигінің бойында жатқан кез келген *M (x, y)* нүктені алайық. *N (x', y')* биссектриса бойынша *M(x, y)* нүктесіне симметриялы нүкте болсын. Бұл нүктенің координаталары мына теңдеуді

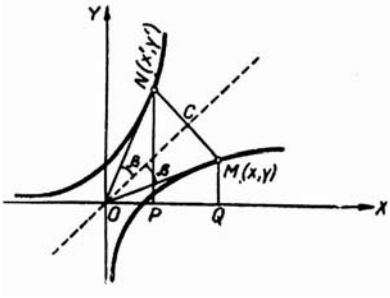
$$y^1 = \varphi(x') \tag{3}$$

қанағаттандыруы керек, өйткені нүкте *N(x', y')* мына *y=φ(x)* теңдеумен кескінделетін кисықтың бойында жатыр.

Нүктелер *M* және *N* бір-бірімен симметриялы болғандықтан:

$$ON=OM \text{ және } \angle MOC = \angle CON = \beta$$

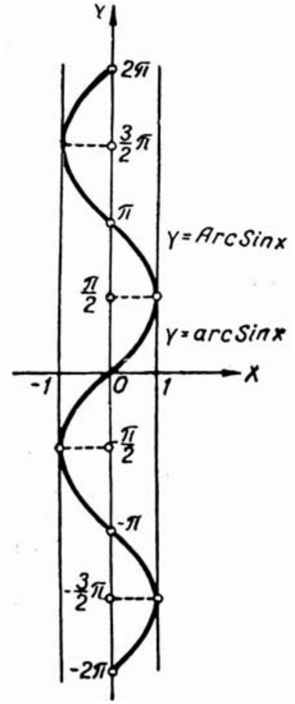
үшбұрыштар $OPN$ және $OQM$ тікбұрышты, олардың гипотенузалары бір-бірімен тең және $\angle QOM = \angle ONP$ (24-чертёж). Олай болса, $\Delta OPN = \Delta OQM$, сондықтан $OP = QM, PN = OQ$, яғни $x'=y$; $y'=x$. Осы мәндерді (3) теңдеуге апарып қойып табамыз: $x = \varphi(y)$ немесе $x = \varphi[f(x)]$. Бұл теңдіктің орындалуы $y=f(x)$ және $y=\varphi(x)$ функциялардың бір біріне кері екендігін дәлелдейді.



24-чертеж.

2. Енді кері тригонометриялық функцияларды қарайық. Кері тригонометриялық функциялар деп төмендегі функцияларды айтады:

$$y = arc\sin x, \qquad y = arc\cos x, \qquad y = arc\, tg\, x,$$
$$y = arc\, ctg\, x, \qquad y = arc\, sc\, x, \qquad y = arc\csc x.$$



25-чертёж.

Ең алдымен бірінші функцияны қарайық. $y = \sin x$ аргумент $x$-тің барлық мәндері үшін, яғни мына ($-\infty$, $\infty$) интервалда анықталған. Аргумент $x$ осы аралықта өзгергенде оған сәйкес $y$-тің мәндері [-1, 1] сегментті құрады. Қарастырылып отырған функцияның графигі синусоида деп аталатыны оқушыларға орта мектептен белгілі. $OУ$ осіне параллель әрбір түзу синусоиданы, яғни $y=sin\ x$ функцияның графигін, тек бір-ақ нүктеде ғана қияды, ал $OX$ осіне параллель әрбір түзу оны сансыз көп нүктеде қияды. Сондықтан $y$-тің [-1, 1] сегменттен алынған әрбір мәніне $x$-тің шексіз көп мәндері сәйкес келеді. Олай болса, берілген $y=\sin x$ функцияға кері функция

$$x = Arc\sin y$$

көпмәнді функция болады.

Осы көпмәнді функцияның бір тармағын қарайық. $x$-тің $-\frac{\pi}{2}$ мен $\frac{\pi}{2}$

арасындағы мәндеріне сәйкес келетін тармақты қарайық. Бұл аралықта $y$-тің [-1, 1] сегменттен алынған әрбір мәніне $x$-тің бір-ақ мәні сәйкес келеді және оны былай белгілейміз:

$$x = arc\sin y.$$

Мұны арксинустың *бас мәні* деп атайды.

Синусоида жатқан жазықтықты бірінші координаталық бұрыштың биссектрисасы бойынша 180 градусқа бұрып, көп мәнді $y = Arc\sin x$ функцияның графигін табамыз (25-чертёж).

Арксинустың бас мәні мына теңсіздікті

$$-\frac{\pi}{2} \leq arc\ sin\ x\ \leq \frac{\pi}{2}$$

қанағаттандырады. Арксинустың барлық мәндері оның бас мәні арқылы келесі формуламен өрнектеледі:

$$Arc\sin x = arc\sin x + 2k\pi$$
$$(k = 0, \pm1, \pm2, \dots)$$

немесе

$$Arc\sin x = (2k+1)\pi - arc\sin x.$$

Осы айтылғандардың барлығын $y$=cos$x$ функцияға қолдануға болады, бұл функцияның да анықталу облысы $(-\infty,\infty)$ интервалы болатынын біз жоғарыда айттық. $y$=cos$x$ функцияға кері функция

$$y = Arc\cos x, (-1 \leq x \leq 1)$$

болады. Бұл функция да − көпмәнді функция. Осы көпмәнді функцияның бір ғана тармағын қарау үшін ол тармақты келесі шартқа:

$$0 \leq arc\cos x \leq \pi$$

бағындырамыз. Осы теңсіздікті қанағаттандыратын тармақты арккосинустың бас мәні деп атайды. Арккосинустың барлық мәндері оның бас мәні арқылы былай өрнектеледі:

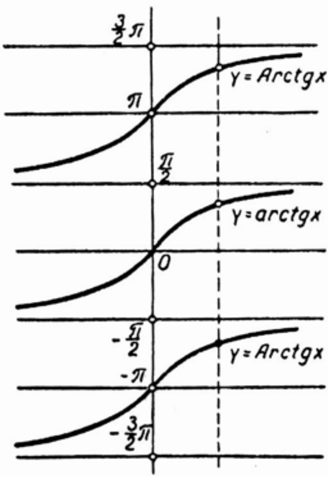
$$Arc\cos x = 2k\pi \pm arc\cos x, \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \dots)$$

Арккосинустың бас мәні мен арксинустың бас мәні арасындағы байланыс мына түрде болады:

$$arc\cos x = \frac{\pi}{2} - arc\sin x.$$

Функция: $y = tgx$ аргумент $x$-тік мына $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm1, -)$ мәндерінен басқа барлық мәндері үшін анықталған.

Аргумент $x$ функцияның анықталу облыстарының қай-қайсында өзгерсе де $y$-тің оған сәйкес мәндері мына $(-\infty,\ \infty)$ интервалды құрады. Осы интервалдан алынған $y$-тің әрбір мәні үшін $x$-тің сансыз көп мәндері сәйкес келеді. Олай болса, бастапқы берілген $y = tgx$ функцияға кері функция $x = Arctgy, (-\infty, \infty)$, интервалда анықталған көпмәнді функция болады.



26-чертёж

$y = Arctgx$ функцияның графигін табу үшін, тангенсоида, яғни $y = tgx$ функцияның графигі жатқан жазықтықты бірінші координаталық бұрыштың биссектрисасы бойынша 180 градусқа бұру керек (26-чертёж).

Көпмәнді $y = Arc\,tg\,x$ функцияның мына шартты

$$-\frac{\pi}{2} < arc\,tg\,x < \frac{\pi}{2}$$

қанағаттандыратын тармағын оның бас мәні деп атайды.

Арктангенстың қалған мәндері бас мән арқылы былай өрнектеледі:

$$Arc\,tg\,x = arc\,tg\,x + k\pi$$

$$(k = 0, \pm 1{,}2, \dots).$$

$$y = Arcctgx\ (-\infty < x < \infty)$$

функцияның бас мәні төмендегі шартты қанағаттандырады.

$$0 < arc\,ctg\,x < \pi.$$

Ал оның қалған мәндері осы бас мән арқылы былай өрнектеледі:

$$Arc\,ctg\,x = arc\,ctg\,x + k\pi,$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Арктангенс пен арккотангенстің бас мәндерінің арасындағы байланыс мына түрде болады:

$$arc\,ctg\,x = \frac{\pi}{2} - arc\,tg\,x.$$

Кері тригонометриялық функциялардың бас мәндері бірмәнді функция болыл табылады. Сондықтан практикалық мәселелерде олардың бас мәндерін қарайды.

Енді есеп шығарғанда керек болатын бір-екі формула қорытайық.

$\sin\alpha = x, sin\beta = y$ болсын.Сонда $cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$,

$$cos\beta = \sqrt{1-y^2}.$$

болады. Радикал алдындағы таңба плюс деп ұйғарамыз. Тригонометриядан белгілі мына формуланы алайық:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\, cos\beta + \cos\alpha sin\beta = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

Бұл арадан

$$\alpha+\beta = Arc\sin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

немесе

$$arc\ sin\ x + arc\ sin\ y = arc\ sin\ \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right),$$

егер $\alpha+\beta$ мына $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ сегменттен шығып кетпесе. $tg\alpha = x$, $tg\beta = y$ болсын. Бұл арадан $\alpha = arctgx$; $\beta = arctgy$. Екі бұрыштың қосындысының тангенсін қарайық.

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha \cdot tg\ \beta} = \frac{x+y}{1-xy}, \qquad (xy \neq 1).$$

Сонда

$$\alpha+\beta = Arc\ tg\frac{x+y}{1-xy}$$

немесе

$$arc\ tg\ x + arc\ tg\ y = arc\ tg\ \frac{x+y}{1-xy},$$

егер $-\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$, яғни $xy<1$ болса.

Кері тригонометриялық функциялар да негізгі элементар функцияларға жатады.

## §9. Күрделі функциялар

$(c,d)$ аралығында анықталған $y=f(u)$ функцияны қарарайық.

Бұл функцияның аргументі $u$, екінші бір айнымалы $x$-тің функциясы болсын: $u=\varphi(x)$ және осы кейінгі функция $(a, b)$ аралығында анықталсын. Айнымалы $y$ бірден $u$-ға тәуелді, осы $u$ арқылы айнымалы $x$-ке тәуелді. Мұндай айнымалы $y$-ті айнымалы $x$-тің күрделі функциясы деп атайды және мұны былай белгілейді:

$$y = f[\varphi(x)].$$

Күрделі функцияның берілу заңында амалдар былай жүргізіледі: ең алдымен $x$-тің $(a, в)$ аралығында берілген мәніне айнымалы $u$-дың сәйкес мәнін $\varphi$ таңбасымен сипатталатын ереже бойынша *(c, d)* аралығынан табамыз, бұдан кейін *u*-дың осы мәніне айнымалы *y*-тің сәйкес мәнін *f* таңбасымен сипатталынатын ереже бойынша табамыз.

Айнымалы *x*-тің *(а, в)* аралығындағы әрбір мәні үшін мына символдың $f[\varphi(x)]$ тиянақты мағынасы болу керек.

Егер $u=\varphi(x)$ функцияның мәні $f(u)$ функцияның анықталу облысына жатпаса, онда мына $f[\varphi(x)]$ символдың мағынасы болмайды

Айнымалы *x*-тің *(a, b)* аралығындағы әрбір мәніне $f[\varphi(x)]$-тің тиянақты бір мәні сәйкес келу керек.

Аргумент $x(a, b)$ аралығында өзгергенде айнымалы $u=\varphi(x)$ мына $f(u)$ функцияның анықталу облысынан шықпауы керек. Мәселен, $y=arc\ sin\ u$, ал $u=x^2+2$ болса, онда мына өрнектің $y=arc\ sin(x^2+2)$ ешбір мағынасы жоқ, себебі арксинустың аргументі *u* тек мына [-1, 1] сегментте ғана өзгереді, ал $x^2 + 2$ функцияның мәндері бірден артық.

Тағы да бір мысал келтірейік: $y=lg_a u$, $u=x-1$, сонда күрделі функция $y=lg_a(x\text{-}1)$ болады. Функция $y=lg_a\ u$ мына (0, ∞) интервалда, ал функция $u=\varphi(x)=x-1$ мына $(-\infty,\infty)$ интервалда анықталған. Күрделі $y=lga(x-1)$ функцияның мағынасы болу үшін мына $u=\varphi(x)=x-1$ функцияның мәндері (0, ∞) интервалда жатуы керек. Олай болса, $x-1>0$ немесе $x>1$. Бұл арадан мынадай қортындыға келеміз:күрделі $y=lg_a(x\text{-}1)$ функцияның мағынасы болу үшін, аргумент *x* мына (1, ∞) интервалда өзгеру керек. Егер *x* мына $(-\infty, 1)$ аралықта өзгерсе, онда $x-1\leq 0$. Сондықтан $y=lg_a(x-1)$ күрделі функцияның бұл аралықта мағынасы болмайды.

Біз жоғарыда мына функцияларды қарадық:

$$y = const, y = x^n, y = \sqrt[n]{x}, y = a^x, y = e^x$$

$$y = lg_a x, y = x^a \text{ (α – иррационал сан)}, y = \sin x,$$

$$y = \cos x, y = tg\ x, y = ctg\ x, y = arc \sin x,$$

$$y = arc \cos x, y = arctg\ x, y = arc\ ctg\ x$$

және бұл функцияларды *негізгі элементар* функциялар деп атадық. Осы негізгі элементар функцияларға арифметикалық амалдарды қолданудың нәтижесінен және күрделі функцияларды құрудан шыққан функцияларды да элементар функциялар деп атайды.

Мәселен, мына функциялар $y = \sqrt{x-1} + sin^2 x, y = x + \ln sinx$, т. т. элементар функциялар болып табылады.

Әрбір элементар функцияның анықталу облысы күрделі функцияның қосындысының, көбейтіндісінің, бөліндісінің анықталу облысын тағайындау ережесі бойынша тағайындалады. Мәселен, мына $y = \sqrt{x-1} + sin^2 x$ функцияның анықталу облысын тағайындайық. Өрнек $\sqrt{x-1}$ мына $[1,\infty)$ аралықта анықталған, ал $sin^2 x$ мына $(-\infty,\infty)$ интервалда анықталған. Олай болса, қарастырылып отырған функцияның анықталу облысы жаңағы екі аралықтың *ортақ бөлігі*, яғни мына $[1,\infty)$ аралық болады.

## §10. Параметрлік түрде берілген функциялар

$(a,\beta)$ аралығында берілген төмендегі екі функцияны қарайық:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t). \qquad (4)$$

Егер бірінші функцияның бірмәнді кері функциясы болатын болса, яғни

$$t = p(x),$$

онда $t$-нің осы өрнегін екінші функцияға апарып қойсақ:

$$y = \psi[p(x)].$$

Сонымен, (4) теңдеулер системасы $y$-ті $x$-тің мынадай $y=f(x)=\psi[p(x)]$ сәйкестік заңмен берілген функциясы етіп анықтайтын болды.

Осы $y=f(x)$ функцияның (4) теңдеулер системасы арқылы берілуін оның *параметрлік түрде берілуі* деп атайды. Аргумент $t$-ні параметр дейді.

(4) системадан мына $y=f(x)=\psi[p(x)]$ функцияға көшуді одан параметрді арылту дейді. Параметр $t$-нің $(\alpha, \beta)$ аралығындағы барлық мәндері үшін келесі теңбе-теңдік

$$\psi(t) = f[\varphi(t)]$$

орындалады.

$y=f(x)$ функциядан (4) системаға көшуді берілген функцияны параметрлеу дейді. Берілген әрбір функцияны параметрлеуге болады және параметрлеудің шексіз, толып жатқан жолдары бар.

Егер (4) системадағы екінші $y=\varphi(t)$ функцияның бірмәнді кері функциясы болса, яғни $t=q(y)$, онда ол система $x$-ті $y$-тің функциясы етіп анықтайды: $x=\varphi[q(y)]$.

Егер $\varphi(t)$ және $\psi(t)$ функциялардың екеуінің де бірмәнді кері функциялары болатын болса, онда мына функциялар $y=\psi[p(x)]$ және $x=\varphi[q(y)]$ бір-біріне кері болады.

Егер $x$ пен $y$-ті $XOY$ жазықтығында жатқан бір $M$ нүктесінің декарттық координаталары деп қарасақ, онда параметр $t$-нің әрбір мәніне жазықтықтың бір нүктесі сәйкес келеді. Осы $M$ нүктесін аргумент $t$-нің бейнесі немесе образы деп атайды, $t$-нің мәнін $M$ нүктесінің прообраздары дейді.

Сонымен, аргумент $t$-нің мәндерінің жиыны жазықтықтағы $M[\varphi(t), \psi(t)]$ нүктелер жиынымен бейнеленеді. Мәселен, мына $x=a \cos t, y=a \sin t$ системаны қарайық.

$(o, \pi)$ интервалында $cost$ біркелкі, сондықтан қарастырылып отырған система $y$-ті $x$-тің функциясы етіп анықтайды. Берілген теңдеулердің екі жақтарын квадраттайық та қосайық, сонда $x^2 + y^2 =a^2,$

бұл арадан

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, -a \le x \le a$$

Демек, сегмент $[o, \pi]$ шеңбердің жоғарғы жартысын бейнелейді. Қарастырылып отырған $x=a \cos t, y=a \sin t$ теңдеулерді шеңбердің параметрлік теңдеулері дейді.

Енді мынадай системаны

$$x = a\, cost, y = b\, sint \ \ (a > o, b > o, o \le t \le 2\pi)$$

қарайық. Берілген системадан $t$-ні шығарып, табамыз:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Сонымен, координаталар $x, y$ эллипстің теңдеуін қанағаттандыратын болды. $[o, \pi]$ сегментте функция $x=a \cos t$, $a$-дан $-$ $a$-ға дейін кемиді және $y \geq 0$; олай болса, сегмент $[o, \pi]$ эллипстің жоғарғы жартысын бейнелейді. $[\pi, 2\pi]$ сегментте функция $x=a \cos t$ $-$ $a$-дан $a$-ға дейін үдейді де, сегмент $[\pi, 2\pi]$ $a$-дан $-$ $a$-ға дейін кемиді және $y \leq 0$; олай болса, сегмент $[\pi, 2\pi]$ эллипстің төменгі жартысын бейнелейді.

Сөйтіп, сегмент $[o, 2\pi]$ бүкіл эллипске бейнелейтін немесе түрленетін болды және мұнда нүктелер $t=o, t=2\pi$ бір $(a, o)$ нүктеге бейнеленеді.

Зерттелініп отырған $x=a \cos t$, $y=b \sin t$ теңдеулерді эллипстің параметрлік теңдеулері дейді.

Тағы да бір-екі мысал келтірейік.

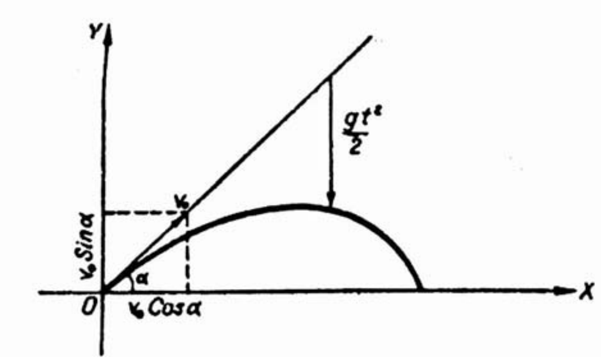
*Жоғары қарай лақтырылған материалды нүктенің траекториясының бағыты гаризонтпен* $\alpha$ *бұрышын құрады.*

*Ал нүктенің бастапқы жылдамдығы* $v_0$. *Осы материалды нүктенің траекториясын табу керек* (27-чертёж).

Бастапқы жылдамдықтың *ОХ* және *ОУ* осьтеріне түскен проекциялары:

$$\upsilon_\circ \cos\alpha \text{ және } \upsilon_\circ \sin\alpha$$

болады. *ОХ* осінің бағыты мен ешбір күш әсер етпейді (ауаның кедергісін еске алмаймыз), сондықтан материалды нүктенің $t$ уақыттың ішінде жүрген жолының абсциссалар осіне түскен проекциясы $x=v_0t\ cos\alpha$ болады.



27-чертеж.

*ОУ* осінің бағыты бойынша ауырлық күші әсер етеді. Егер ауырлық күші болмаса, онда $t$ уақыттың ішінде материалды нүкте $v_0tsin\alpha$ биіктікке көтерілген болар еді. Осы ауырлық күштің әсерінен нүкте жаңағы уақыттың ішінде мынадай шама $\frac{gt^2}{2}$ төмен түседі (мұнда $g = 9{,}81\,\frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$.

Олай болса, қозғалушы материалды нүктенің ординатасы

$$y = v_0tsin\alpha - \frac{gt^2}{2} \text{ болды.}$$

Сонымен, іздеп отырған траекторияның параметрлік теңдеулері:

$$x = v_0\,tcos\alpha,$$

$$y = v_0tsin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Осы кейінгі екі теңдеуден параметр $t$-ні арылтсақ,

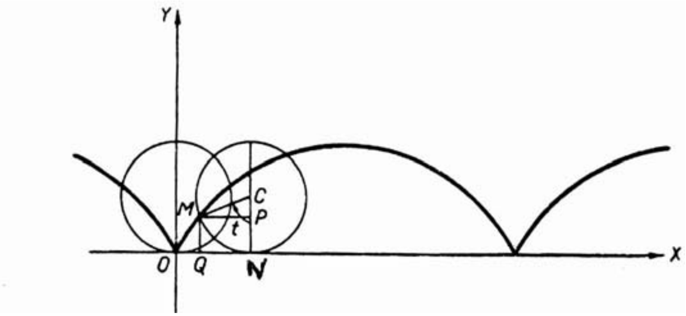
$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2cos^2\alpha}.$$

Бұл бізге белгілі параболаның теңдеуі.

*Түзудің бойымен радиусы а-ға тең шеңбер тайғанамай дөңгелейтін болсын, сонда осы шеңберге бекітілген нүкте М бір қисықты сызады. Міне осы қисықтың теңдеуін табу керек.*

Айтылып отырған *M* нүктенің жасайтын геометриялық орнын *циклоида* деп атайды.

Шеңбер дөңгелейтін түзуді *OX* осі үшін алайық; координаталардың бас нүктесі үшін *M* нүктенің бастапқы жағдайын алайық. *t* арқылы шеңбердің бұрылыс бұрышын белгілейік (28-чертёж).



28-чертёж

Шеңбер түзудің бойымен тайғанамай дөңгелейтін болғандықтан

$$ON = \breve{NM} = at$$

Екінші жағынан:

$$x = OQ = ON - QN = at - a\sin t = a(t - \sin t)$$
$$y = QM = NC - PC = a - a\,cost = a(1 - cost).$$

Сонымен, диклоиданың параметрлік теңдеулері

$$x = a(t - sint),$$
$$y = a(1 - cost) \text{ болады.}$$

Төмендегі тендіктермен

$$x = \varphi(t) = \begin{cases} t, & \text{егер} \quad 0 \le t \le 1; \\ 1, & \text{егер} \quad 1 \le t \le 2; \\ 3 - t, & \text{егер} \quad 2 \le t \le 3; \\ 0, & \text{егер} \quad 3 \le t \le 4; \end{cases}$$

$$y = \psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{егер} \quad 0 \le t \le 1; \\ t-1, & \text{егер} \quad 1 \le t \le 2; \\ 1, & \text{егер} \quad 2 \le t \le 3; \\ 4-t, & \text{егер} \quad 3 \le t \le 4; \end{cases}$$

берілген функцияны алайық. Мұның анықталу облысы [0,4] сегменті болады.

Бұл параметрлік теңдеулердің геометриялық кескіні төбелері (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) нүктелерде жатқан квадраттың жиек сызығы, яғни контуры болады.

Келтірілген мысалдардан параметр $t$-нің алуан түрлі мағынасы болатынын байқаймыз, ол бұрыш та, доғаның ұзындығы да, дерексіз сан да болуы мүмкін.

## § 11. Функцияның шегі туралы ұғым

1. Функциялық тәуелділікпен қатар функция шегі ұғымы да математикалық анализдегі маңызды мәселелердің бірі болып табылады.

*y=f(x)* функцияны қарайық. Егер осы функцияның аргументі *x* $a$ санына ұмтылса, онда функция да бір тиянақты шекке ұмтылуы мүмкін. Функцияның шегі деп нені айтады, соған анықтама берейік.

*Егер алдын ала берілген оң мейлінше аз* ε *санына сәйкес оң* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *саны табылып, айнымалы x-тің*

$$|x - a| < \sigma$$

*теңсіздігін қанағаттандыратын барлық мәндері үшін.* $|f(x) - b| < \varepsilon$ *теңсіздігі орындала беретін болса, тұрақты A саны y=f(x) функциясының аргументі a-ға ұмтылғандағы шегі деп аталады.*

Біз мұны былай жазып көрсетеміз:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \qquad (5)$$

*f(x)* функцияның $x$=$a$ нүктесінде анықталмауы да мүмкін, бұл нүктеде функцияның тиянақты мәні де болуы да мүмкін, бірақ ол мән $b$ санына тең болмауы мүмкін,

Берілген анықтама бойынша айнымалы $x$ өзінің шегі $a$-ға шексіз жақын болған сайын, функция *f(x)* та $b$ санына шексіз жуық болады.

Мұнда тәуелсіз айнымалы $x$ өзінің шегі $a$-ға қандай заң мен ұмтылса да, функция *f(x)* әрқашанда бір ғана шекке ұмтылуға тиіс, міне, жоғарыда тұжырымдалған анықтаманы немесе (5) теңдікті осы мағынада түсіну керек.

Функция шегінің анықтамасындағы ε санын өз еркімізше сайлап аламыз, ал δ саны осы ε саны бойынша сайланып алынады. Егер

$$|x-a|<\delta$$

теңсіздіктің орындалуынан мына теңсіздік $|f(x)-b|<\varepsilon$ орындалса, онда осы кейінгі теңсіздік $\varepsilon_0$ санынан артық әрбір ε саны үшін де орындалады, яғни $|f(x)-b|<\varepsilon$. Сондықтан, керек болған жағдайда, кез келген оң ε санын берілген басқа оң саннан, мәселен, бірден кіші етіп алуымызға әбден болады: алдын ала берілген оң ε саны, міне, осы мағынада мейлінше аз делініп аталады.

Алдын ала берілген $\varepsilon>0$ саны бойынша $\delta_0$ саны табылып, мына теңсіздіктің

$$|(x-a)|<\delta_0$$

орындалуынан келесі теңсіздік

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

орындалатын болсын. Осы кейінгі теңсіздіктің мына теңсіздікті

$$|x-a|<\delta$$

қанағаттандыратын барлық $x$-тер үшін орындалуы тіпті айқын, мұнда δ≤δ. Сондықтан керек болған жағдайда ε санына тәуелді осы δ санын берілген бір оң саннан кіші оң сандардың ішінен іздейміз.

Бір мысал келтірейік. Егер мына $f(x)=x^2$ функцияның аргументі $x\to 2$, онда оның шегі 4-ке тең болатынын дәлелдейік. Ол үшін кез келген оң ε санын алып, мына теңсіздіктің

$$|x^2-4|<\varepsilon \qquad (6)$$

орындалатынын дәлелдеуіміз керек.

(6) теңсіздік төмендегі қос теңсіздікпен

$$4-\varepsilon<x^2<4+\varepsilon$$

парапар. Бұл арадан

$$\sqrt{4-\varepsilon}<x<\sqrt{4+\varepsilon} \qquad (7)$$

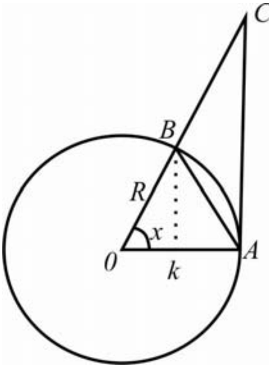
(7) теңсіздіктен мынадай қорытындыға келеміз: $\sqrt{4-\varepsilon}$, $\sqrt{4+\varepsilon}$ интервалдың ішінде жатқан барлық $x$-тер үшін (6) теңсіздік орындалатын болды. Егер δ саны үшін мына санды $\sqrt{4+\varepsilon}-2$ алсақ, онда төмендегі шарттың

$$|x-2|<\delta$$

орандалуынан (6) теңсіздік орындалады. Ендеше берілген $f(x)=x^2$ функцияның шегі аргумент $x$ 2-ге ұмтылғанда 4-ке тең болатын болды.

2. Енді мына шекті $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ табайық. Бұл шекті тамаша шек деп атайды.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1. \qquad (8)$$



29-чертеж.

Міне, осыны дәлелдейік. Ол үшін радиусы $R$-ге тең дөңгелектің ішінен $<AOB$ − сүйір бұрышты, $AB$ хорданы және шеңберге оның $A$ нүктесіндегі $AC$ жанаманы қарайық (29-чертёж). Сонда

$$\Delta AOB \text{ ауд.} < \text{сектор}$$
$$\text{AOBауд.} < \Delta\text{AOCауд.}$$

Егер $<AOB$ бұрыштың радиандық өлшемін $x$ арқылы белгілесек, онда жаңағы теңсіздіктер мына түрге көшеді:

$$\frac{1}{2}R^2sinx<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2tgx,$$

бұл арадан

$$sinx<x<tgx, \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right). \qquad (9)$$

Кейінгі қос теңсіздіктің екі жағын $sinx$-ке бөліп, онан шыққан нәтижені керісінше жазып табамыз:

$$1>\frac{sinx}{x}>cosx,$$

бұл арадан

$$0<1-\frac{sinx}{x}<-cosx, \qquad (0<x<\frac{\pi}{2})$$

немесе

$$0<1-\frac{sinx}{x}<2sin^2\frac{x}{2}.$$

Ал

$$2sin^2\frac{x}{2}<2sin\frac{x}{2}.$$

(9) теңсіздікті еске алсақ, онда

$$2sin\frac{x}{2}<2\cdot\frac{x}{2}=x.$$

Сонымен,

$$0 < 1 - \frac{sinx}{x} < x.$$

Бұл арадан

$$\left|\frac{sinx}{x} - 1\right| < |x|$$

ε алдын ала берілген оң құнарсыз аз сан болсын. Осы ε саны бойынша δ санын былай сайлап алайық: δ≤ε.

Сонда $|x - 0| = |x| < \varepsilon$ болғанда

$$\left|\frac{sinx}{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

Демек,

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1.$$

3. Функция шегінің басқа түрдегі анықтамасын келтірейік. *Егер айнымалы х мәндерінің кез келген тізбегі*

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

*а санына жинақты болуынан, f(x) функцияның оған сәйкес мәндерінің тізбегі*

$$f(x_1), f(x_1), \dots, f(x_n), \dots$$

*b санына жинақты болса, онда b санын-y=f(x) функцияның аргументі х, а-ға ұмтылғандағы шегі деп атайды.*

Бұл анықтаманы Гейне анықтамасы деп атайды. Жоғарыда берілген анықтамамен осы кейінгі анықтаманың бір-біріне эквиваленттігін дәлелдейік.

Тұрақты *в* саны *f(x)* функцияның бірінші берілген анықтама мағынасындағы шегі болсын. Онда алдын ала берілген оң құнарсыз аз ε санына сәйкес δ=δ(ε) саны табылып, мына теңсіздік

$$|x - a| < \delta$$

орындалысымен келесі теңсіздік

$$|f(x) - b| < \varepsilon \qquad (10)$$

орындалады.

*а* санына жинақты төмендегі тізбекті

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

қарайық. Сонда δ саны бойынша *N=N(δ)* саны табылып, осы *N*-нен артық *(n ≥ N*) барлық *n*-дер үшін мына теңсіздік

$$|x_n - a| < \delta$$

орындалады. Олай болса (10) теңсіздік бойынша келесі теңсіздік

$$|f(x_n) - b| < \varepsilon$$

орындалады.

Функция *f(x), b* санына екінші анықтама мағынасында ұмтылатын болсын. Онда функция *f(x), b* санына бірінші анықтама мағынасында да ұмтылатынын дәлелдейік.

Функция *f(x), b* санына бірінші анықтама мағынасында ұмтылмайды деп ұйғарайық. Сонда алдын ала берілген оң ε санына сәйкес δ=δ(ε) саны табылып, айнымалы $x$-тің қандай болсын, ең болмағанда бір мәні $x'$ үшін төмендегі теңсіздік

$$|x' - a| < \delta$$

орындалуға тиіс; онымен қабат біздің ұйғаруымыз бойынша мына теңсіздік

$$|f(x') - b| \geq \varepsilon$$

орындалу керек.

Мынадай тәртіппен

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \cdots > \delta_n > \cdots > o \quad \delta_n \to o$$

орналасқан және нольге ұмтылатын $\delta_n$ сандарының тізбегін қарайық.

Біздің ұйғаруымыз бойынша

$$|x_1 - a| < \delta_1 \text{ болғанда } |f(x_1) - b| \geq \varepsilon \text{ болады,}$$
$$|x_2 - a| < \delta_2 \text{ болғанда } |f(x_2) - b| \geq \varepsilon \text{ болады,}$$
$$|x_3 - a| < \delta_3 \text{ болғанда } |f(x_3) - b| \geq \varepsilon \text{ болады,}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|x_n - a| < \delta_n \text{ болғанда } |f(x_n) - b| \geq \varepsilon \text{ болады,}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Сөйтіп, өз-өзінен мынадай теңсіздікті

$$|x_n - a| < \delta_n, \quad \delta_n \to 0$$

қанағаттандыратын

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$$

тізбек туды. Былайша айтқанда, $x_n \to a$ ендеше екінші анықтама бойынша *f(x<sub>n</sub>), b* санына ұмтылуы керек. Ал бұл мына теңсіздіктерге

$$|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$$

қайшы келеді.

Міне, осы қайшылық айнымалы *x* тұрақты *a* санына ұмтылғанда функция *f(x)* бірінші анықтама мағынасында *b* санына ұмтылатынын дәлелдейді.

Бір мысал келтірейік: $f(\mathrm{x}) = \sin\frac{1}{\mathrm{x}}$. Бұл функция *x=0* нүктеден басқа $x$-тің барлық мәндерінде анықталған. Аргумент *x* нольге ұмтылғанда бұл функцияның тиянақты шегі жоқ екенін дәлелдейік. Ол үшін нольге жинақталымды төмендегі екі тізбекті

$$x_n = \frac{1}{n\pi}. \quad x'_n = \frac{1}{(4n+1)\pi} \text{ қарастырайық}$$

Сонда:

$$f(x_n) = o, \quad f(x'_n) = sin\frac{(4n+1)}{2}\pi = 1.$$

Бұл арадан

$$f(x_n) \to o, \quad f(x'_n) \to 1.$$

Демек, функция $f(\mathrm{x}) = \sin\frac{1}{\mathrm{x}}$ оның аргументі нольге ұмтылғанда тиянақты шекке ұмтылмайтын болды. Сондықтан қарастырылып отырған функцияның $x=0$ нүктесінде шегі жоқ.

4. Аргумент $x$ шектеулі $a$ санына ұмтылғанда, функция $f(x)$ не +∞-ке, не −∞- ке ұмтылуы мүмкін. Міне, осы жағдайлардағы функция шегінің анықтамаларын келтірейік. Егер алдын ала берілген оң, соншама үлкен $L$ санына сәйкес саны табылып, мына теңсіздіктің $|x-a|<\delta$ орындалуынан келесі теңсіздік $f(x)>L$ орындалса, аргумент $x$ шектеулі $a$ санына ұмтылғанда функция $f(x)$ плюс шексіздікке ұмтылады дейміз. Бұл тұжырымдауды математикалық жолмен былай жазып көрсетеміз:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Егер алдын ала берілген теріс $l$ санына сәйкес оң δ саны табылып, мына теңсіздіктің $|x-a|<\delta$ орындалуынан келесі теңсіздік

$$f(x)<l$$

орындалса, аргумент $x$ шектеулі $a$ санына ұмтылғанда функция $f(x)$ минус шексіздікке ұмтылады дейміз және мұны былай жазып көрсетеміз:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Мына $f(x) = \frac{1}{x-1}$ функцияның аргументі $x$ бірге ұмтылғанда функция шексіздікке ұмтылатынын дәлелдейік.

$L$ алдын ала берілген аса үлкен сан болсын. Осы сан бойынша $\delta$ санын былай сайлап алайық: $\delta = \frac{1}{L}$.

Берілген анықтама бойынша мына теңсіздік

$$\left|\frac{1}{x-1}\right| > L \qquad (11)$$

орындалуы керек. Бұл арадан

$$|x-1| < \frac{1}{L} \text{ немесе } |x-1| < \delta \qquad (12)$$

Сонымен, егер $x$ (12) теңсіздікті қанағаттандыратын болса, онда функция $f(x) = \frac{1}{x-1}$ (11) теңсіздікті қанағаттандырады.

Аргумент $x$ не $+\infty$-ке, не $-\infty$-ке ұмтылғанда функция шектеулі санға ұмтылуы мүмкін. Бұл жағдайда функция шегінің анықтамасын былай тұжырымдауға болады:

а) Егер алдын ала берілген оң мейлінше аз ε санына сәйкес аса үлкен оң $N$ саны табылып, мына теңсіздікті $x>N$ қанағаттандыратын барлық $x$-тер үшін келесі теңсіздік

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

орындалса, аргумент $x$ плюс шексіздікке *($x \to +\infty$)* ұмтылғанда функция *f(x)* шектеулі $b$ санына ұмтылады дейміз және мұны былай жазып көрсетеміз:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

б) Егер қандай болсын алдын ала берілген оң ε санына сәйкес теріс $N_1$ саны табылып, мына теңсіздікті $x< N_1$ қанағаттандыратын барлық $x$-тер үшін келесі теңсіздік

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

орындалса, аргумент $x$ минус шексіздікке ұмтылғанда *($x \to -\infty$),* функция *f(x)* шектеулі $b$ санына ұмтылады дейміз. Мұны былай жазып көрсетеміз:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Мысал үшін мына функцияны $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ қарайық. Бұл функцияның аргументі $\infty$-ке ұмтылсын, онда функцияның 1-ге ұмтылатынын дәлелдейік.

ε алдын ала берілген оң құнарсыз аз сан болсын. Берілген анықтама бойынша төмендегі теңсіздік

$$\left|\frac{x+1}{x-1} - 1\right| < \varepsilon \qquad (13)$$

орындалуы керек. Бұл арадан

$$\frac{2}{|x-1|} < \varepsilon$$

немесе

$$|x-1| > \frac{2}{\varepsilon},$$

сондықтан

$$|x| - 1 > \frac{2}{\varepsilon}$$

Бұл арадан

$$|x| > \frac{2}{\varepsilon} + 1 = N. \qquad (14)$$

Сонымен, (14) теңсіздіктің орындалуынан (13) теңсіздік орындалады. Олай болса,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1.$$

Тағы да бір мысал қарайық: $f(x) = \frac{2x^2-1}{3x^2+1}$. Бұл функцияның аргументі *x* шексіздікке ұмтылғанда *(x→∞)* функция $\frac{2}{3}$-ге ұмтылады. Міне, осыны дәлелдейік. ε – алдын ала берілген оң құнарсыз аз сан болсын, онда анықтама бойынша мына теңсіздік

$$\left|\frac{2x^2-1}{3x^2+1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$$

орындалуы керек. Бұл арадан

$$\frac{1}{3(3x^2+1)} < \varepsilon \text{ немесе } x^2 > \frac{1}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}.$$

$\varepsilon > \frac{1}{3}$-деп есептесек, онда $\frac{1}{9\varepsilon} - \frac{1}{3} > 0$. Олай болса, $x > \sqrt{\frac{1}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}}$, немесе $x < -\sqrt{\frac{1}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}}$.

Егер былай $N = \sqrt{\frac{1}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}}$ деп ұйғарсақ, онда мына теңсіздікті $|x| > N$ қанағаттандыратын барлық *x*-тер үшін келесі теңсіздік.

$$\left|\frac{2x^2-1}{3x^2+1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$$

орындалады. Сондықтан $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{3x^2+1} = \frac{2}{3}$.

## § 12. Функцияның оң жақты және сол жақты шектері

Тәуелсіз айнымалы *x* өзінің шегіне оның оң жағынан ұмтылғанда (мұны былай жазамыз: *x→a + 0*), функция *f(x)* бір шекке, ал *x* өзінің шегіне оның сол жағынан ұмтылғанда (мұны былай жазамыз: *x→a*— 0), жаңағыдан басқа екінші бір шекке ұмтылуы мүмкін.

Мәселен, мынадай функцияны

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{егер} \quad o \le x \le \frac{1}{2}, \\ x+\frac{1}{2}, & \text{егер} \quad \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

қарасақ, бұл функция үшін

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}+0} f(x)=1, \qquad \lim_{x\to\frac{1}{2}-0} f(x)=\frac{1}{2}.$$

Сөйтіп, бұл функцияның аргументі $x\to\frac{1}{2}$ ұмтылғанда $(x\to\frac{1}{2})$, функцияның өзі екі түрлі шекке ұмтылатын болды.

*Егер әрбір оң аз ε санына сәйкес δ саны табылып, мына теңсіздіктің*

$a-x<\delta$, мұнда $x<a$, *орындалуынан келесі теңсіздік*

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

*орындалса, b санын тәуелсіз айнымалы x тұрақты a санына ұмтылғандағы f(x) функцияның сол жақты шегі деп атайды.* Мұны шартты түрде былай жазамыз:

$$\lim_{x\to a-o} f(x)=b=f(a-o).$$

*Егер алдын ала берілген оң мейлінше аз ε санына сәйкес* δ=δ(ε) *саны табылып,*

$$a<x<a+\delta$$

*теңсіздіктер орындалғанда*

$$|f(x)-c|<\varepsilon$$

*теңсіздігі орындала беретін болса, c санын аргументі a-ға ұмтылғандағы f(x) − функциясының оң жақты шегі деп атайды.* Мұны былай жазып көрсетеміз:

$$\lim_{x\to a+o} f(x)=c=f(a+o).$$

Келтірілген мысалдағы функцияның оң жақты шегі 1-ге, сол жақты шегі $\frac{1}{2}$-ге тең.

## §13. Функция шегінің қасиеттері

1. Мұнда біз II-тараудың § 10 айтылған мәселелерді функциялар жөнінде қараймыз.

*a* саны *f(x)* функцияның анықталу облысының шектік нүктесі болсын.

Функцияның шегіне тән келесі қасиеттерді дәлелдеуге болады.

1) Егер тәуелсіз айнымалы $x$, $a$ санына ұмтылғанда, функция $f(x)$ $b$ санына ұмтылса және $b>A$ болса (мұнда $A$-тұрақты), онда осы $a$ санына өте жақын, бірақ оған тең емес $x$-тің мәндері үшін функция $f(x)$ төмендегі теңсіздікті

$$f(x)>A \qquad (15)$$

қанағаттандырады.

Бұл теореманы дәлелдеу үшін алдын ала берілетін оң ε санын былай сайлап алайық: $\varepsilon< b-A$, бұл арадан,

$$b-\varepsilon > A.$$

Функция шегінің анықтамасы бойынша осы берілген ε саны бойынша δ саны табылып,

$$|x-a|<\delta$$

теңсіздік орындалысымен мына теңсіздік

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

орындалуы керек. Ал кейінгі теңсіздік мынадай

$$b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon \qquad (10)$$

қос теңсіздікпен парапарлығы бізге белгілі. $x$-тің $a$-ға өте жуық мәндері үшін (16) теңсіздік орындалатын болды: олай болса $x$-тің бұл мәндері үшін (15) теңсіздік сөзсіз орындалады.

Сонымен, теорема немесе қасиет дәлелденді.

Егер $b<B$ болса, онда функция $f(x)$ тәуелсіз айнымалы $x$-тің $a$ санына тым жуық мәндері үшін мына теңсіздікті $f(x)<B$ қанағаттандырады.

2) Егер тәуелсіз айнымалы $x$, $a$-ға ұмтылғанда, функция $f(x)$ шекке ұмтылса, онда $x$-тің $a$ санына тым жуық мәндері үшін функцияның өзі де оң болады егер функция теріс шекке ұмтылса, онда функция да теріс болады.

3) Егер айнымалы $x$ тұрақты $a$ санына ұмтылғанда, функция $f(x)$ шектеулі $b'$ санына ұмтылса, онда $x$-тің $a$-ға тым жуық мәндері үшін функция шектелген болады, былайша айтқанда оның абсолют шамасы бір тұрақты $M$ санынан асып кетпейді, яғни

$$|f(x)|\le M, \text{ мұнда } |x-a|<\delta.$$

Айтылып отырған қасиеттің дұрыстығы (16) теңсіздіктен-ақ көрініп тұр.

4) Саны шектеулі функциялардың алгебралық қосындысының шегі олардың шектерінің қосындысына тең.

Бұл қасиетті екі функция үшін дәлелдейік.

Айталық,

$$\lim_{x\to a} f(x)=b, \quad \lim_{x\to a} \varphi(x)=c,$$

онда

$$\lim_{x\to a}[f(x)+\varphi(\varphi)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} \varphi(x) = b + c.$$

Міне, осыны дәлелдеу керек.

Теореманың шарттары бойынша мына теңсіздікті

$$|x-a| < \delta$$

қанағаттандыратын барлық $x$-тер үшін келесі теңсіздіктер

$$|f(x)-b| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\varphi(x)-c| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (17)$$

орындалу керек.

Мына теңбе-теңдікті

$$f(x)+\varphi(x)-(b+c) = f(x)-b+\varphi(x)-c$$

қарайық. Ал

$$|f(x)+\varphi(x)-(b+c)| \le |f(x)-b| + |\varphi(x)-c|.$$

(17) теңсіздіктерді еске алсақ,

$$|f(x)+\varphi(x)-(b+c)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Кейінгі теңсіздіктің орындалуы теореманың дұрыстығын дәлелдейді.

5) Саны шектеулі функциялардың көбейтіндісінің шегі олардың шектерінің көбейтіндісіне тең.

Айталық,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \qquad \lim_{x\to a} \varphi(x) = c,$$

сонда

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} \varphi(x) = b \cdot c.$$

Осыны дәлелдеу керек.

Теореманың шарттары бойынша алдын ала берілген оң құнарсыз аз ε санына сәйкес δ саны табылып, мына теңсіздіктің $(x-a)<\delta$ орындалуынан келесі тенсіздіктер

$$|f(x)-b| < \frac{\varepsilon}{2|c|}, \quad |\varphi(x)-c| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad (18)$$

орындалады, мұнда $M-$ оң тұрақты сан.

3) Қасиет бойынша мына теңсіздікті $|x-a| < \delta$ қанағаттандыратын барлық $x$-тер үшін төмендегі теңсіздік

$$|f(x)| \le M \qquad (19)$$

орындалуға тиіс.

Келесі теңбе-теңдікті

$$f(x)\varphi(x) - bc = f(x)[\varphi(x)-c] + c[f(x)-b]$$

қарайық. Абсолют шама жөніндегі қаралып өткен теорема бойынша

$$|f(x)\varphi(x)-bc| \leq |f(x)||\varphi(x)-c|+|c||f(x)-b|.$$

(18) және (19) теңсіздіктерді еске алсақ,

$$|f(x)\varphi(x)-bc| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Бұл теңсіздіктің орындалуы теореманы дәлелдейді.

Осы дәлелденген теоремадан мына салдар келіп туады: тұрақты санды шек таңбасының сыртына шығаруға немесе оның ішіне еңгізуге болады, яғни

$$\lim_{x\to a}[kf(x)] = k\lim_{x\to a} f(x).$$

6) Екі функцияның бөліндісінің шегі олардың шектерінің бөліндісіне тең (егер бөлгіш функцияның шегі нольге тең болмаса).

Айталық,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \qquad \lim_{x\to a}\varphi(x) = c, \qquad (c\neq 0)$$

онда,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)} = \frac{b}{c}.$$

Теореманың шарты бойынша алдын ала берілген оң ε санына сәйкес δ саны табылып мына теңсіздіктің $|x-a|<\delta$ орындалуынан мына теңсіздік

$$|\varphi(x)-c|<\varepsilon \text{ немесе } c-\varepsilon<\varphi(x)<c+\varepsilon \qquad (20)$$

орындалады. Кейінгі теңсіздіктен мынаны табамыз

$$\frac{1}{c-\varepsilon} > \frac{1}{\varphi(x)} > \frac{1}{c+\varepsilon}$$

Бұл арадан мынадай қортындыға келеміз:

*(а*−δ, а+δ), аймақтың ішінде жатқан барлық *х*-тер үшін функция шектелген, былайша айтқанда

$$\frac{1}{|\varphi(x)|} \leq M \qquad (21)$$

мұнда *M* − оң тұрақты сан.

Енді мына айырманы $\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{c}$ қарайық:

$$\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{c} = \frac{c-\varphi(x)}{c\cdot\varphi(x)}$$

бұл арадан

$$\left|\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{c}\right| = \frac{1}{|c||\varphi(x)|}|\varphi(x)-c|.$$

(20) және (21) теңсіздіктерді еске алсақ, онда *(a−δ, a+δ)* аймақтың барлық нүктелері үшін төмендегі теңсіздік орындалады:

$$\left|\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{c}\right|<\frac{M\varepsilon}{|c|}$$

ε − оң құнарсыз аз сан, сондықтан

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{c}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}\tag{22}$$

Енді $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ бөліндіні мына түрде жазуға болады:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{\varphi(x)}.\tag{23}$$

(23) теңдіктің оң жағын екі функцияның көбейтіндісі деп қарауға болады. Ендеше оған (5) қасиетті қолданамыз, сонда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{\varphi(x)}.$$

(22) теңсіздікті еске алып табамыз:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to o}\varphi(x)}.$$

Сонымен, теорема дәлелденді.

Біркелкі функцияның шегі туралы төмендегі теореманы дәлелдейік.

7) *a* берілген біркелкі *f(x)* функцияның анықталу облысының шектік нүктесі болсын және бұл сан *x*-тің барлық мәндерінен үлкен болсын. Сонда, егер үдеме функция *f(x)* жоғары, жағынан шектелген болса, яғни

$$f(x)\le M,$$

онда тәуелсіз айнымалы *x, a* санына ұмтылғанда айтылып отырған функцияның шектеулі шегі болады.

Функция *f(x)* жоғарғы жағынан шектелгендіктен, оның өз анықталу облысында қабылдайтын мәндерінің жиыны жоғарғы жағынан шектелген жиын болып табылады. Сондықтан жиынның дәл жоғарғы шекаралығы болады, оны біз *L* арқылы белгілейік.

Жоғарғы шекаралықтың қасиеті бойынша оң ε саны қаншама шама аз болса да функцияның анықталу облысында жатқан және *a* санынан кіші $x'$ мән ($x'<a$) үшін, төмендегі теңсіздік:

$$f(x')>L-\varepsilon$$

орындалуға тиіс. Функция *f(x)* үдеме болғандықтан, *x>x* болғанда *f(x) > f(x')* болады. Ендеше

$$f(x) > L - \varepsilon.$$

Екінші жағынан

$$f(x) \leq L < L + \varepsilon.$$

Сөйтіп тәуелсіз айнымалы $x$-тің $a$ санына аса жақын мәндері үшін, функция $f(x)$ келесі теңсіздікті

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

немесе

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ қанағаттандырады.}$$

Кейінгі теңсіздіктің орындалуы теореманың дұрыстығын дәлелдейді.

Осы дәлелденген теорема біркелкі кеміме функция үшін де дұрыс болатындығын оқушылардың өздері де дәлелдей алады.

2. Функцияның ең үлкен және ең кіші шектері туралы бір екі ауыз сөз айта кетейік.

Тәуелсіз айнымалы $x$ тұрақты а санына ұмтылғанда $f(x)$ функцияның тиянақты шегі болмағанымен, осы $a$ санына жинақталымды жеке $x_1, x_2 \dots, x_3, \dots \to a$ тізбектер үшін мына шектің $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ болуы мүмкін: бұл шекті **бөлімше шек** деп атайды.

Функцияның бөлімше шектерінің ішінен ең үлкенін және ең кішісін табуға болады; бұларды былай белгілейміз:

$$\overline{\lim_{x\to a}} f(x), \qquad \underline{\lim_{x\to a}} f(x).$$

Функцияның тиянақты шегі болу үшін оның ең үлкен шегі мен ең кіші шегінің өзара тең болуы қажетті және жеткілікті.

## §14. Үздіксіз функциялар

1. Алдымен функцияның нүктедегі үздіксіздігі туралы ұғымға тоқтаймыз. Бұл ұғым функцияның шегі туралы ұғыммен біте қайнасып жатқан ұғым.

*(a, b)* интервалында анықталған бірмәнді *y=f(x)* функцияны қарайық. $x_o$ *(a, b)* интервалының бір тиянақты нүктесі болсын. Сонда,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_o) \qquad (24)$$

*теңдік орындалса, y= f(x) функцияны (a, b) интервалының* $x_o$ нүктесінде үздіксіз *деп атайды.*

Сонымен, былай болатын болды: тәуелсіз айнымалы $x$ тұрақты $x_o$ санына ұмтылғанда *f(x)* функцияның шегі оның $x_o$ нүктесіндегі мәніне тең болса, *f(x)* функциясы $x_o$ нүктесінде үздіксіз функция деп аталатын болды.

Функция шегінің анықтамасы бойынша (24) теңдік мына теңсіздіктермен

$$|f(x) - f(x_o)'| < \varepsilon, \tag{25}$$

$$|x - x_o| < \delta \tag{26}$$

парапар. Бұдан функцияның нүктедегі үздіксіздігі туралы екінші анықтама шығады.

*Егер алдын ала берілген оң құнарсыз аз* ε *санына сәйкес оған және* $x_o$ *нүктесіне тәуелді* $\delta=\delta(\varepsilon,x_o)$ *саны табылып, (26) теңсіздіктің орындалуынан (25) теңсіздік орындалса, онда* $y=f(x)$ *функцияны (a, b) интервалының* $x_o$ *нүктесінде үздіксіз деп атайды.*

(25) теңсіздік

$$f(x_o) - \varepsilon < f(x) < f(x_o) + \varepsilon \tag{27}$$

қос теңсіздікпен, ал (26) теңсіздік

$$x_o - \delta < x < x_o + \delta \tag{28}$$

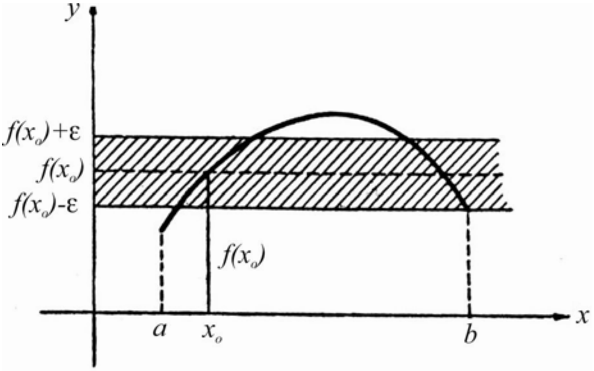
қос теңсіздікпен парапарлығы белгілі.

(28) теңсіздік *OX* осінде жатқан $x_o - \delta,\ x_o + \delta$ интервалды, яғни $x$ нүктесінің аймағын, ал (27) теңсіздік *OУ* осінде жатқан $f(x_o) - \varepsilon, f(x_o) + \varepsilon$ интервалды, яғни $f(x_o)$ нүктесінің аймағын кескіндейтіні де өткен материалдардан белгілі.

Осыларды еске алып, функцияның нүктедегі үздіксіздігі туралы үшінші анықтаманы беруге болады.

*Егер алдын ала берілген оң* ε *саны қаншама аз болса да оған сәйкес* δ *саны табылып,* $x_o$ *нүктесінің кішкентай* $(x_o - \delta,\ x_o + \delta)$ *аймағына OУ осінің бойында жатқан* $y_o=f(x_o)$ *нүктесінің кішкентай* $(f(x_o) - \varepsilon, f(x_o) + \varepsilon)$ *аймағы сәйкес келсе, онда* $y=f(x)$ *функция (a, b) интервалдың* $x_o$ *нүктесінде үздіксіз деп аталады.*

Бұл үшінші анықтама функцияның үздіксіздігінің геометриялық мағынасын да көрсетеді. Атап айтқанда, мәселе былай:



30-чертёж

$y=f(x)$ функциясының графигін қарайық та $y=f(x_o)-\varepsilon$, $y=f(x_o)+\varepsilon$ түзулерді жүргізейік (түзулер $OX$ осіне параллель). Сонда, бұл түзулер жазықтықта ені 2ε-ге тең жолақ жасайды (30-чертёж). Бұл $(f(x_o)-\varepsilon, f(x_o)+\varepsilon)$ жолақ қаншама енсіз болса да, яғни оң ε саны қаншама аз болса да, оған сәйкес оң δ саны табылып,

$$(x_o-\delta, \qquad x_o+\delta)$$

аймағының ішінде жатқан барлық $x$-терге сәйкес ординаталар $y=f(x)$ ені 2ε-ге тең жолақтың ішінде жатады.

Мысал үшін мына $y=x^3$ функцияны қарайық. Бұл функцияның анықталу облысы (−∞,∞) интервалы болатыны және оның графигі бізге белгілі.

Осы функцияның $x=0$ нүктесінде үздіксіздігін дәлелдейік.

Алдын ала берілетін оң ε саны үшін $\frac{1}{1000}$-ді алайық. Берілген анықтама бойынша функция $y=x^3$ мына $x=0$ нүктесінде үздіксіз болу үшін келесі теңсіздік

$$|x^3-o^3|<\frac{1}{1000} \tag{29}$$

орындалуы керек. Бұл арадан $|x^3|<\frac{1}{1000}$ немесе $|x|<\frac{1}{10}$.

Кейінгі теңсіздікті былай жазсақ та болады:

$$|x-o|<\frac{1}{10} \tag{30}$$

Сонымен, $\delta=\frac{1}{1000}$ және (30) теңсіздік орындалысымен (29) теңсіздік те орындалады. Олай болса функция $y=x^3$ мына $x=0$ нүктесінде үздіксіз.

Енді $x-x_0$ айырманы $h$ арқылы белгілейік, яғни $h=x-x_o$. Бұл $h$-ты аргумент $x$-тің $x_o$ нүктесіндегі өсімшесі деп атайды. Бұл арадан $x=x_o+h$. Онда

$$f(x) - f(x_o) = f(x_o + h) - f(x_o).$$

Бұл айырманы аргумент өсімшесіне сәйкес функцияның өсімшесі деп атайды. Бұдан кейін (25) және (26) теңсіздіктер мына түрге көшеді:

$$|f(x_o + h) - f(x_o)| < \varepsilon, \qquad (31)$$

$$|h| < \delta \qquad (32)$$

Бұл арадан функцияның үздіксіздігіне төртінші анықтаманы беруге болады.

*Егер* $x_o$ *нүктедегі аргументтің шексіз аз өсімшесіне, функцияның шексіз аз өсімшесі сәйкес келсе, яғни* $h$ *нольге ұмтылғанда* ($h \to 0$), *өсімше* $f(x_o+h)-f(x_o)$ *да нольге ұмтылса,* $y=f(x)$ *функцияны* $(a, b)$ *интервалдың* $x_o$ *нүктесінде үздіксіз деп атайды.*

*Егер* $y=f(x)$ *функциясы* $(a, b)$ *интервалдың әрбір нүктесінде үздіксіз болса, онда бұл функцияны* $(a, b)$ *интервалында үздіксіз деп атайды.*

$x$ $(a, b)$ интервалының кез келген нүктесін көрсететін болсын, яғни $a<x< b$. Енді функцияның интервалындағы үздіксіздігінің анықтамасын былай тұжырымдауға болады.

Егер алдын ала берілген оң мейлінше аз ε саны бойынша оған және $x$-ке тәуелді оң $\delta=\delta(\varepsilon,x)$ саны табылып, (32) теңсіздіктің орындалуынан (31) теңсіздік орындалса, $y=f(x)$ функцияны $(a, b)$ интервалында үздіксіз деп атайды.

Функцияның нүктедегі үздіксіздігін тағы да былай анықтауға болады.

Егер $(a, b)$ интервалында жатқан кез келген

$$x_1, x_2, \dots x_n, \dots \to x_o$$

тізбектің $x_o$ санына жинақталымды болуынан, функцияның оған сәйкес мәндерінің мына тізбегі

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$

$f(x_o)$ санына жинақталымды болса, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_o)$, онда $y=f(x)$ функцияны $(a, b)$ интервалының $x_o$ нүктесінде үздіксіз деп атайды.

Мұны Гейне анықтамасы дейді. Бастапқы берілген екі анықтаманы Коши ұсынған.

2. Егер

$$\lim_{x\to x_o+0} f(x) = f(x_o + o) = f(x_o),$$

былайша айтқанда, кез келген оң мейлінше аз ε санына сәйкес $\delta>0$ саны табылып, мына

$$x_o < x < x_o + \delta$$

теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x$-тер үшін келесі теңсіздік

$$|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

орындалса, $y=f(x)$ функцияны $x_o$ нүктесінің оң жағынан үздіксіз дейді.

Егер $\lim\limits_{x\to x_o-0} f(x) = f(x_o - 0) = f(x_o)$ болса, былайша айтқанда, кез келген оң құнарсыз аз ε саны бойынша $\delta>0$ саны табылып, мына

$$x_o - \delta < x < x_o$$

теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x$-тер үшін төмендегі теңсіздік

$$|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

орындалса, онда $y=f(x)$ функцияны $x_o$ нүктесінің *сол жағынан үздіксіз* дейді.

Енді функцияның сегменттегі үздіксіздігінің анықтамасын берейік.

Егер функция сегменттің әрбір ішкі нүктесінде үздіксіз болса және $x=a$ нүктесінің оң жағынан, ал $x=b$ нүктесінің сол жағынан үздіксіз болса, $y=f(x)$ функцияны $[a, b]$ сегментінде үздіксіз деп атайды.

## §15. Элементар функциялардың үздіксіздігі

1. Элементар функциялардың үздіксіздігіне көшпестен бұрын келесі үш теореманы дәлелдейік.

*а) Жалпы саны шектеулі үздіксіз функциялардың алгебралық қосындылары үздіксіз функция болады.*

Бұл теореманы екі функция үшін дәлелдейік. $f(x)$ және- $\varphi(x) - (a, b)$ аралығында берілген және осы аралықта үздіксіз функциялар болсын, $x_o-(a, b)$ аралығының бір тиянақты нүктесі болсын. Берілген екі функцияның қосындысын $F(x)$, арқылы белгілейік: $F(x) = f(x) + \varphi(x)$.

Теореманың шарты бойынша

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o), \quad \lim_{x\to x_o} \varphi(x) = \varphi(x_o).$$

функциялар шектерінің (4) қасиеті бойынша

$$\lim_{x\to x_o} F(x) = \lim_{x\to x_o}[f(x)+\varphi(x)] = \lim_{x\to x_o} f(x) + \lim_{x\to x_o}\varphi(x) =$$
$$= f(x_o)+\varphi(x_o) = F(x_o).$$

Теорема дәлелденді.

б) Жалпы саны шектеулі үздіксіз функциялардың көбейтіндісі үздіксіз функция болады.

Бұл теореманы да екі функция үшін дәлелдейміз.

*f(x)* пен *φ(x)* *(a, b)* аралығында үздіксіз функциялар болсын $x_o$*(a, b)* аралығының тиянақты нүктесі болсын. Бұл екі функцияның көбейтіндісін *F(x)* арқылы белгілейік:

$$F(x) = f(x)\varphi(x.)$$

Теореманың шарттары бойынша

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o), \quad \lim_{x\to x_o}\varphi(x) = \varphi(x_o).$$

Функциялар шектерінің (5) қасиеті бойынша,

$$\lim_{x\to x_o} F(x) = \lim_{x\to x_o}[f(x)\cdot\varphi(x)] = \lim_{x\to x_o} f(x)\cdot\lim_{x\to x_o}\varphi(x) =$$
$$= f(x_o)\varphi(x_o) = F(x_o).$$

в) Егер бөлгіш функция нольге тең болмаса, екі үздіксіз. функцияның бөліндісі үздіксіз функция болады.

*f(x)* пен *φ(x)* функциялары *(a, b)* аралығында анықталған және осы аралықта үздіксіз функциялар болсын. $x_o$*(a,b)* аралығының тиянақты нүктесі болсын. Сонда теореманың шарттары бойынша

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o), \quad \lim_{x\to x_o}\varphi(x) = \varphi(x_o).$$

Берілген функциялардың бөліндісін *F(x)* арқылы белгілейік:

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}. \quad (\varphi(x) \neq 0)$$

Функциялар шектерінің қасиеттері бойынша

$$\lim_{x\to x_o} F(x) = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x\to x_o} f(x)}{\lim_{x\to x_o}\varphi(x)} = \frac{f(x_o)}{\varphi(x_o)} = F(x_o).$$

Функция *f(x)=x* тәуелсіз айнымалы *x*-тің әрбір мәні үшін үздіксіз болады.

Алдын ала берілген оң құнарсыз аз ε саны бойынша δ санын былай сайлап алайық: $\delta\leq\varepsilon$.

Сонда *x*-тің $|x-x_o|<\delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық мәндері үшін төмендегі теңсіздік

$$|f(x) - f(x_o)| = |x - x_o| < \delta \leq \varepsilon$$

орындалады. Осы кейінгі теңсіздіктің орындалуы функцияның $x=x_0$ нүктесінде үздіксіздігін көрсетеді.

Функция $f(x)=x^n$ ($n$ − оң бүтін сан) аргумент $x$-тің кез келген мәні үшін үздіксіз болады.

Бұл функцияны мына түрде жазуға болады:

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \dots x}_{n \text{ рет}}.$$

Мұнда көбейткіштердің әрқайсысы үздіксіз функция. Сондықтан (б) теорема бойынша функция $f(x)=x^n$ үздіксіз.

Функция $f(x)=c$ (мұнда $c$ = const) үздіксіз.

$$limf(x) = c.$$

Функция $f(x)=ax^n$ (мұнда $n$ − оң бүтін сан, $a$ тұрақты сан) аргумент $x$-тің кез келген мәні үшін үздіксіз.

Бүтін рационал функция

$$f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

аргумент $x$-тің әрбір мәні үшін үздіксіз. Бұл теореманың дұрыстығы осының алдында айтылған теоремалардан көрініп тұр.

Бөлшек рационал функция

$$f(x) = \frac{a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_o x^m + b_1 x^{m-1} + b_1 x_{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m}$$

бөлімін нольге айналдырып жібермейтін $x$-тің әрбір мәні үшін үздіксіз болады. *(b)* теореманы қолданып, осы теореманың да дұрыстығын дәлелдеуге болады.

Бүтін рационал және бөлшек рационал функциялар үздіксіз болғандықтан, олардың шектерін, немесе шектік мәндерін табу үшін тәуелсіз айнымалының шегін қою керек (әрине, мұнда бөлшектің бөлімі нольге айналып кетпесе).

Функция $f(x)$ = sin$x$ аргумент $x$-тің әрбір мәні үшін үздіксіз болады.

Бұл теореманы дәлелдеу үшін тәуелсіз айнымалы $x$-ке еркімізше $h$ өсімше береміз. Сонда функцияның бұған сәйкес өсімшесі

$$f(x+h) - f(x) = \sin(x+h) - \sin x = 2sin\frac{h}{2}cos\frac{2x+h}{2}$$

болады.

Бұл арадан

$$|f(x+h) - f(x)| \leq 2\left|sin\frac{h}{2}\right|,$$

өйткені

$$\left|cos\frac{2x+h}{2}\right| \leq 1.$$

Екінші жағынан (9) формула бойынша

$$2\left|sin\frac{h}{2}\right| < 2\cdot\frac{|h|}{2} = |h|.$$

Ендеше

$$|f(x+h) - f(x)| < |h|.$$

Алдын ала берілген оң құнарсыз аз ε саны бойынша $\delta$ санын былай сайлап алайық: δ≤ε. Сонда $|h| < \delta$ болғанда

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$$

болады.

$f(x) = \cos x$ функцияның үздіксіздігі де дәл осылай дәлелденеді. Функция $f(x) = tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ мына $x = \frac{(2n-1)\pi}{2}$ (мұнда $n$ – бүтін сан) нүктелерден басқа нүктелердің барлығында үздіксіз.

Сол сияқты функция $f(x) = ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$ мына $x = n^{\pi}$ (мұнда $n$ − бүтін сан) нүктелерден басқа нүктелердің барлығында үздіксіз.

Бұл теоремаларды дәлелдеу үшін *(b)* теореманы қолдану керек.

Функция $f(x)-a^x$ тәуелсіз айнымалы $x$-тің әрбір мәні үшін үздіксіз болады.

Аргумент $x$-ке еркімізше өсімше $h$-ты берейік, сонда функцияның оған сәйкес өсімшесі

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1)$$

болады.

Бұл арадан

$$|\Delta y| = |f(x+h) - f(x)| = |a^x||a^h - 1|.$$

Кез келген оң мейлінше аз ε саны бойынша δ саны табылып, мына $|h| < \delta$ теңсіздіктің орындалуынан келесі теңсіздік

$$|a^h - 1| < \frac{\varepsilon}{|a^x|}$$

орындалады. Ендеше

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$$

Кейінгі теңсіздіктің орындалуы $f(x)=a^x$ көрсеткіштік функцияның үздіксіздігін дәлелдейді.

Алдыңғы теоремаларға сүйеніп, $x$-тің әрбір $a>0$ және $a\neq 1$ мәні үшін $y=log_a x$ функцияның да үздіксіздігін дәлелдеуге болады. Мұны оқушылардың өздеріне тапсырамыз.

## §16. Күрделі функцияның үздіксіздігі

$F(x) = f[\varphi(x)]$ күрделі функцияны қарайық. Функция $u=\varphi(x)$, $(a, b)$ аралығында анықталсын, ал функция $f(u)$, $(c, d)$ аралығында берілсін. Күрделі функцияның анықтамасы бойынша айнымалы $x$, $(a, b)$ аралығында өзгергенде, айнымалы $u$ $(c,d)$ аралығында өзгеру керек, оның сыртына шықпауы керек.

Енді осы күрделі функция туралы келесі теореманы дәлелдейік.

**Теорема.** *Егер $u = \varphi(x)$ функциясы, $(a, b)$ аралығының $x_o$ нүктесінде үздіксіз болса, ал $f(u)$ функциясы $(c,d)$ аралығының $x_o$-ге сәйкес $u_o = \varphi(x_o)$ нүктесінде үздіксіз болса, онда күрделі функция $F(x) = f[\varphi(x)]$ $x_o$ нүктесінде үздіксіз болады.*

ε – кез келген оң мейлінше аз сан болсын. Осы ε саны бойынша δ санын мына теңсіздік $\Delta u<\delta$ орындалатындай және нүкте $u_o + \Delta u, (c, d)$ аралығының ішінде жататындай етіп сайлап алайық. Сонда теореманың шарттары бойынша

$$|f(u_o + \Delta u) - f(u_o)| < \varepsilon \tag{33}$$

Берілген оң $h$ саны мейлінше аз болады, сондықтан $|h| < \eta$ және $x_o + h$ нүктесі. $(a, b)$ аралығының ішінде жатады. Олай болса, теореманың шарттары бойынша

$$|\varphi(x_o + h) - \varphi(x_o)| < \delta \tag{34}$$

Енді мына айырманы алайық:

$$F(x_o + h) - F(x_o) = f[\varphi(x_o + h)] - f[\varphi(x_o)].$$

Мұны былай жазуға болады:

$$F(x_o + h) - F(x_o) = f(u_o + \Delta u) - f(u_o)$$

(33) және (34) теңсіздіктерді еске алайық. Сонда, егер $|h| < \eta$ болса:

$$|F(x_o + h) - F(x_o)| < \varepsilon.$$

Сонымен, теорема дәлелденді.

Егер функциялар $f(u)$ және $\varphi(x)$ бүкіл осьтің бойында анықталған және үздіксіз болса, онда дәлелденген теореманы қысқаша былай тұжырымдауға болады: *үздіксіз функцияның үздіксіз функциясы да үздіксіз болады.*

Мәселен күрделі функция $y = \sin x^2$ үздіксіз, өйткені мына функциялар $y = \sin u$ және $u = x^2$ үздіксіз. Күрделі функция $y = \cos \sin x^3$, бұл да үздіксіз, өйткені мына функциялар $y = \cos u$, $u = \sin v$, $v = x^3$ барлық жерде үздіксіз.

## §17. Үзілісті функциялар

1. *(a,b)* аралығында анықталған *y=f(x)* функцияны қарайық. $x_o$ *(a, b)* аралығының шектік нүктесі болсын және бұл нүкте аралықтың өзіне жататын болсын. Егер үздіксіздік шарты, яғни мына теңдік

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$$

орындалмаса, онда $x_o$ нүктені *f(x)* функцияның *үзіліс нүктесі* деп атайды, ал функцияның өзін $x_o$ нүктесінде *үзілісті функция* деп атайды:

Үздіксіздік шарты қай уақытта орындалмайды деген сұраққа былай жауап беруге болады: егер $x_o$ нүктесінде *f(x)* функцияның шектеулі шегі болмаса, нүкте *f(x)* функцияның анықталу облысына жатпаса, $x_o$ нүктесінде *f(x)* функцияның шегі болғанымен, бірақ ол шек осы нүктедегі функцияның мәніне, яғни мына $f(x_0)$ санға тең болмаса, онда үздіксіздік шарты орындалмайды.

Үзіліс нүктелерін бірнеше типке бөлуге болады.

а) Егер *(a, b)* аралығының $x_o$ нүктесінде *f(x)* функцияның оң жақты және сол жақты шектері бар болса, яғни

$$\lim_{x\to x_o+o} f(x) = f(x_o+o), \quad \lim_{x\to x_o-o} f(x) = f(x_o-o)$$

және бұл шектер өзара тең болмаса: $f(x_o+0) \neq f(x_o-0)$, онда $x_o$ нүктені *f(x)* функцияның бірінші тектес үзіліс нүктесі деп атайды.

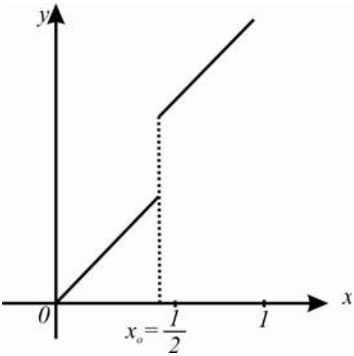
Мысал келтірейік:

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & \text{егер} \quad o \le x \le \dfrac{1}{2}; \\ x + \dfrac{1}{2}, & \text{егер} \quad \dfrac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

Бұл функцияның анықталу облысы − сегмент [0,1]. Осы сегменттің $x_o = \frac{1}{2}$ нүктесін қарайық. Келтірілген функция бізге бұрыннан белгілі функция. Қаралып отырған функцияның оң жақты және сол жақты шектерін тапқан болатынбыз:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-o} f(x) = \frac{1}{2}; \qquad \lim_{x\to\frac{1}{2}+o} f(x) = 1$$

Сонымен, берілген функция үшін $f\left(\frac{1}{2}+0\right) \neq f\left(\frac{1}{2}-0\right)$.



31-чертёж

Ендеше [0,1] сегметінің $x_o=\frac{1}{2}$ нүктесі қаралып отырған функцияның бірінші тестес үзілісті нүктесі болатын болды. Бұл функцияның графигі 31-чертёжде көрсетілген.

Енді мынадай

$$f(x)=\frac{1-e^{\frac{1}{x-a}}}{1+e^{\frac{1}{x-a}}}$$

функцияны қарайық, мұндағы $a$ − тұрақты сан. Осы функцияның $x$ $a$ санына ұмтылғандағы шегін табайық:

$$\lim_{x\to a+o} f(x)=\lim_{x\to a+o}\frac{e^{-\frac{1}{x-a}}-1}{e^{-\frac{1}{x-a}}+1}=-1,$$

$$\lim_{x\to a-o} f(x)=\lim_{x\to a-o}\frac{1-e^{\frac{1}{x-a}}}{1+e^{\frac{1}{x-a}}}=1.$$

Сонымен, берілген функция үшін $f(a+0)=-1, f(a-0)=1$, яғни $f(a+0)\neq f(a-0)$. Демек, $a$ нүктесі қаралып отырған функцияның бірінші тектес үзіліс нүктесі болады.

Мына $|f(x_o+0)-f(x_o-0)|$ айырманың абсолют шамасын $f(x)$ функцияның $x_o$ нүктесінде кенет өзгерісі дейді.

Келтірілген мысалдарда функциялардың кенет өзгерістері $\frac{1}{2}$-ге және 2-ге тең.

Кейде функцияның үзіліс нүктелері бүтін аралықтарды құрады. Мәселен, Дирихле функциясын қарайық:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{егер} \quad x \quad \text{рационал сан болса,}\\ 0, & \text{егер} \quad x \quad \text{иррационал сан болса.}\end{cases}$$

Бұл функцияның анықталу облысы бүкіл ось $(-\infty,\infty)$. $x_o$ − осы аралықтың кез келген нүктесі болсын. Бұл арада екі жағдай болу мүмкін: 1) $x_o$ − рационал сан, 2) $x_o$ − иррационал сан. 1-жағдайда $f(x_0)=1$. Осы рационал нүктенің тым жақын маңайында толып жатқан шексіз көп иррационал нүктелері бар, ал бұл нүктелерде $f(x)=0$, сондықтан $|f(x_o)-f(x_o)|=1$. 2) жағдайда $f(x_o)=0$. Осы иррационал $x_o$ нүктеге өте жақын сансыз көп рационал нүктелер бар, бұл нүктелерде $f(x)=1$, сондықтан $x_o$ нүктесінің кішкентай аймағында $|f(x_o)-f(x)|=1$. Ендеше, Дирихле функциясы үшін $(-\infty,\infty)$ интервалдың әрбір нүктесі үзіліс нүктесі болатын болды.

Егер $f(x_o-0)=f(x_o+0)$ болса, онда $x_o$ нүктесі $f(x)$ функцияның үзіліс нүктесі болмайды, қайта үздіксіздік нүктесі болады.

Егер аргумент $x$ $x_o$-ге ұмтылғанда, $f(x)$ функцияның шектеулі шегі болса, яғни

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = A,$$

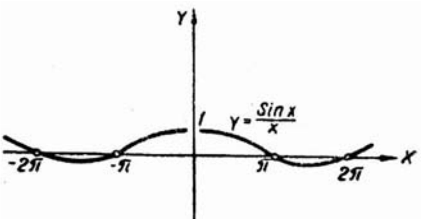
бірақ $x_o$ нүктесі қаралып отырған функцияның анықталу облысына жатпаса, онда $x_o$ нүктесі $f(x)$ функцияның үзіліс нүктесі болады.

Көмекші $F(x)$ функцияны келесі сәйкестік заңмен құрайық:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{егер } x \neq a, \\ A, & \text{егер } x = a. \end{cases}$$

$F(x)$ және $f(x)$ − әртүрлі функциялар, өйткені олардың анықталу облыстары әртүрлі.

$f(x)$ функцияның бүкіл анықталу облысында оған көмекші функция $F(x)$ тең және бұл кейінгі функция $x=a$ нүктесінде үздіксіз.



32-чертеж

Көмекші, $F(x)$ функцияны $f(x)$ функцияның үздіксіздігі бойынша жалғасы деп атайды.

Бұл жағдайда $x_o$ жойылатын үзіліс нүктесі деп аталады. Егер функция $f(x)$ анықталу облысы көрсетілмей аналитикалық формуламен берілсе және $x$-тің орнына бірден $x_o$-ді қойғаннан формула өзінің мағынасын жоғалтса, бірақ функцияның шектеулі шегі $\lim_{x\to x_o} f(x)$ болса, онда үздіксіздік жалғасуы принципін қолданып, мына $\lim_{x\to x_o} f(x)$ шекті $f(x_o)$ санына тең деп, яғни $\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$ есептеу керек.

Мәселен, мына $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ функцияны қарайық, Бұл функцияның графигі 32-чертёжде көрсетілген.

Егер осы функциядағы аргумент $x$-тің орнына бірден нольді қойсақ, функция өзінің мағынасын жоғалтады, бірақ $\frac{lim}{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

Сондықтан 0 − жойылатын үзіліс нүктесі болып табылады. Егер үздіксіздік жалғасуы принципін қолданып, *f(0)=1* деп ұйғарсақ, онда функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ мына *x=0* нүктесінде үздіксіз болады.

2. Егер *f(x)* функцияның $x_o$ нүктесінде оң жақты я болмаса сол жақты, айта берсе тіпті ешқандай тиянақты шегі болмаса, онда $x_o$ нүктені қаралып отырған функцияның екінші тектес үзіліс нүктесі деп атайды.

Мәселен, мына $y = \sin\frac{1}{x}$ функцияны қарайық. Аргумент $x$ мәндерінің келесі екі тізбегін қарайық:

$$\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \dots, \frac{1}{n\pi}, \dots$$

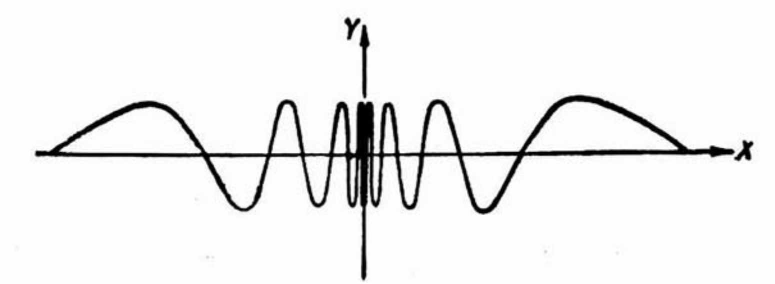
$$\frac{1}{2\pi + \frac{\pi}{2}}, \frac{1}{4\pi + \frac{\pi}{2}}, \frac{1}{6\pi + \frac{\pi}{2}}, \dots, \frac{1}{2\pi + \frac{\pi}{2}}, \dots$$

Бірінші тізбектің жалпы мүшесі $x_n = \frac{1}{n\pi}$ ол $n$ шексіздікке ұмтылғанда нольге ұмтылады, яғни $\lim x_n = 0$ және

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin n\pi = 0$$

Екінші тізбектің жалпы мүшесі $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n$ шексіздікке ұмтылғанда, ол да нольге ұмтылады. Ал

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

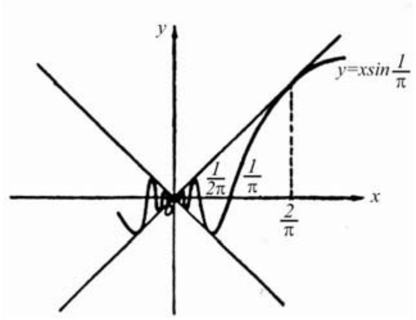


33-чертёж

Сонымен, $y = \sin\frac{1}{x}$ функцияның тиянақты шегі жоқ. Ендеше нүкте *x=0* қаралып отырған функцияның екінші тектес үзіліс нүктесі болып табылады.

Бұл функцияның графигі 33-чертёжде көрсетілген.

Енді мына $y = x\sin\frac{1}{x}$ функцияны қарайық. Бұл функцияның графигі 34-чертёжде көрсетілген және оның анықталу облысы бүкіл сан осі (–∞, ∞).



34-чертёж

Бұл қаралып отырған функция *x=0* нүктесінде үздіксіз, өйткені.

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|.$$

Кейінгі теңсіздіктен мынадай қортындыға келеміз:

$$\lim_{x\to o} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Егер бастапқы бір сәйкестік заңмен берілген қандай болсын функция бір нүктеде анықталмай қалса (мәселен, қарастырып отырған екі функция сияқты), онда қосымша шартпен бұл функцияның осы ерекше нүктеде анықталуын толықтыруға тура келеді. Мысалы, $y = x\sin\frac{1}{x}$ функциясын *x = 0* ерекше нүктеде былай анықтаймыз:

$$y = 0$$

Осылай толықтырғаннан кейін қарастырып отырған функция жаңағы ерекше нүктеде үздіксіз болу керек. Ол үшін оның оң жақты және сол жақты шектері бар болып, өзара тең болуы керек. Осы ерекше нүктедегі функцияның мәнін жаңағы айтылып отырған шектерге теңеп функцияның ондағы үздіксіздігін қамтамасыз етеміз.

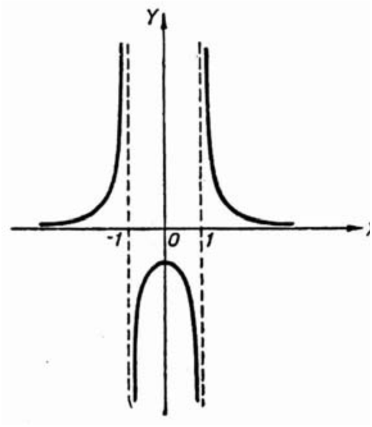
Сөйтіп, мына $y = f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ функцияны былай анықтауға болады:

$$y = f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{егер}\, x \ne o \text{ болса} \\ 0, & \text{егер}\, x = o \text{ болса.} \end{cases}$$

3. Бірінші және екінші тектес үзіліс нүктелерден басқа, функцияның мәнін шексіздікке айналдырып жіберетін үзіліс нүктелері де болуы мүмкін. Мәселен, мына $y = \frac{1}{x^2-1}$ функцияны алсақ, бұл функция *x=1* және *x=−1* нүктелерде шексіздікке

айналып кетеді. Бұл функцияның графигі 35-чертёжде келтірілген.

4. *(a, b*) аралығында біркелкі үдеме *y=f(x)* функцияны қарайық.



35-чертеж.

Бұл функция жөнінде келесі теорема орын алады: *Біркелкі үдеме және кеміме функциялардың үзілісі тек бірінші тектес қана үзіліс болады.*

Бұл теореманы былай дәлелдеуге болады; *(a, b)* аралығынан $x_o$ нүктені алайық және бұл *a* санына тең болмасын. (*a, b)* аралығының осы $x_o$ нүктесінің сол жағында жатқан бөлігі үшін §13 тағы (7) қасиетті, яғни біркелкі үдеме функцияның шегі турасындағы теореманы қолданамыз. Сонда функция үдемелі болғандықтан, мына теңсіздік $x<x_o$ өзінің артынан мына $f(x)\leq f(x_o)$ теңсіздікті ертеді. Олай болса мына шек

$$f(x_o-o)=\lim_{x\to x_o-o}f(x)\leq f(x_o)$$

әрқашан да бар.

Дәл осы сияқты мына шектің де

$$f(x_o+o)=\lim_{x\to x_o+o}f(x)\geq f(x_o)$$

барлығын дәлелдеуге болады.

## §18. Үздіксіз функциялардың негізгі қасиеттері

1. Математикалық анализде зерттелінетін, тексерілетін және тәжірибеде қолданылатын функциялар көбінесе үздіксіз функциялар болады. Үзілісті функциялармен істес болу жағдайы өте сирек болады. Үздіксіз функциялар үзілісті функцияларда жоқ қасиеттерге ие болады.

Бұл қасиеттерді зерттеу, тексеру үздіксіз функцияларды математикалық анализдің өзіне және жаратылыстану ғылымы істеріне қолдану мәселелерін көп жеңілдетеді.

*(a, b)* аралығында анықталған *y=f(x)* функцияны қарайық. Функцияның көрсетілген аралықта қабылдайтын мәндерінің жиыны шектелген (шекараланған) жиын болса, *y=f(x)* функцияны (*a,b)* аралығында шектелген функция дейді.

Шектелген функция үшін келесі теорема орын алады:

**Теорема.** *Егер f(x) функциясы (a, b*) *аралығында шектелген болса, онда бұл функцияның дәл жоғарғы және дәл төменгі шекаралықтары бар.*

Осы келтірілген теореманы дәлелдеу үшін I тараудағы §7 қараңыздар.

*f(x)* функцияның *(a, b)* аралығындағы дәл жоғарғы шекаралығын *M* арқылы, дәл төменгі шекаралығын $m$ арқылы белгілейік және мұны былай жазайық:

$$M = \sup_{(a,b)} f(x), \qquad m = \underset{(a,b)}{\text{in}} f(x).$$

Сонда *(a, b)* аралығындағы барлық $x$-тер үшін төмендегі теңсіздік орындалады:

$$m \leq f(x) \leq M.$$

I тараудың §7 айтылған жиынның дәл жоғарғы шекаралықтары туралы қасиеттер осы *M* және $m$ сандарына да тән. Дегенмен оларды еске түсіріп кетейік.

Алдын ала берілген оң ε саны қаншама аз болса да *(a, b)* аралығынан ең болмағанда бір нүкте *x* табылып, осы нүктедегі функцияның мәні төмендегі теңсіздікті

$$f(x) > M - \varepsilon$$

қанағаттандырады.

Мәселен, $[0{,}2\pi]$ сегментінде анықталған $y = \sin x$ функцияны қарайық. Бұл функцияның осы сегменттегі дәл жоғарғы шекаралығы 1-ге тең, ал дәл төменгі шекаралығы 1-ге тең. Функцияның графигіне көңіл аударыңыздар.

Функцияның дәл жоғарғы шекаралығымен дәл төмендегі шекаралығының айырмасын, яғни $\mathrm{M} - m$ айырманы, оның *(a, b)* аралығындағы тербелісі деп атайды, оны былай белгілейді:

$$\omega = M - m.$$

2. Енді үздіксіз функциялардың негізгі қасиеттеріне көшейік. Бұл қасиеттерді келесі теоремалар арқылы тұжырымдаймыз.

**1-теорема.** *Егер f(x) функциясы [a, b] сегментінде үздіксіз болса, онда ол осы сегментте шектелген де болады.*

Келтірілген теореманы дәлелдеу үшін оған қарсы ұйғарайық, атап айтқанда, *[a, b]* сегментінде функция *f(x)* шектелмеген болсын. Онда осы сегменттің ішінде жатқан ең болмағанда бір нүктесі табылып, осы нүктедегі функцияның мәні төмендегі теңсіздікті

$$|f(x_n)| > M_n$$

қанағаттандырады. Мұнда $M_n$ − оң, соншама үлкен сан.

*n*-ге 1, 2, 3, 4, 5,... мәндерді беріп келесі тізбекті құрамыз:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \tag{35}$$

Бұл тізбек *[a, b]* сегментінің, ішінде жатқан тізбек. Сондықтан осы тізбектің барлық элементтерінен тұратын жиын шектелген жиын. Олай болса, бұл жиынның ең болмағанда бір шектік ξ нүктесі болады және осы шектік нүкте сегменттің өзіне жатады. Шектік нүкте ξ, *[a, b]* сегментіне жататын болғандықтан, бұл нүктеде функция *f(x)* үздіксіз, яғни алдын ала берілген оң құнарсыз аз ε санына сәйкес δ саны табылып, мына (ξ − δ, ξ + δ) аймақтың ішінде жатқан барлық *x* нүктелер үшін келесі теңсіздік

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon \tag{36}$$

орындалуға тиіс.

Екінші жағынан (35) тізбек ξ санына жинақталымды болғандықтан, осы тізбектің барлық мүшелері бір номерден бастап (ξ − δ, ξ + δ) аймақтың ішінде жатады. Ол нүктелер үшін біздің ұйғаруымыз бойынша

$$|f(x_n) - f(\xi)| \geq |f(x) - f(\xi)| > M_n - l.$$

Бұл кейінгі теңсіздіктің орындалуы (36) теңсіздікке қайшы келеді. Ендеше біздің ұйғаруымыз дұрыс емес.

Сонымен, теореманың дұрыстығы дәлелденеді.

Дәлелденген теорема тек сегмент үшін дұрыс та, ал интервал үшін дұрыс болмай қалуы мүмкін. Мәселен, (0,1) интервалында анықталған $f(x) = \frac{1}{x}$ функцияны қарайық. Бұл функция өзінің (0,1) анықталу облысында шектелген болып табылмайды, себебі тәуелсіз айнымалы *x* нольге жақындаған сайын берілген функцияның шамасы кез келген қандай болса да оң саннан асып кетеді.

**2-теорема.** *Егер f(x) функциясы [a, b] сегментінде үздіксіз болса және сегменттің ұштарындағы қабылдайтын мәндерінің таңбалары әртүрлі болса, онда [a, b] сегментінің бойында жатқан, функцияны нольге айналдыратын ең болмағанда бір с нүктесі табылады.*

Бұл теореманы *Кошидің бірінші* теормасы дейді. Енді соның дәлелдеуіне келейік.

Теореманың шарттары бойынша *[a, b]* сегментінің ұштарындағы функцияның қабылдайтын *f(a)* және *f(b)* мәндерінің таңбалары әртүрлі. Айталық, *f(a)*<0, ал *f(b)*>0 болсын.

*[a, b]* сегментін $\frac{a+b}{2}$ нүктесімен қақ бөлейік. Сонда сегменттің осы қақ ортасында, яғни нүктесінде, *f(x)* функцияның нольге айналуы мүмкін, онда теорема дәлелденді.

Егерде $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, онда мына $\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ сегменттердің біреуінің ұштарындағы. *f(x)* функцияның қабылдайтын мәндерінің таңбалары әртүрлі болады. Айталық, былай болсын $f(a) < 0, f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$. Бұл сегментті $[a_1, b_1]$ арқылы белгілейік. Сонда сегмент $[a_1, b_1]$ мына *[a, b]* сегментінің ішінде жатады және оның ұзындығы

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}, f(a_1) < o, \qquad f(b_1) > 0.$$

$[a_1, b_1]$ сегментін қақ бөлеміз. Сонда $\frac{a_1+b_1}{2}$ нүктесіндегі функцияның мәні не оң, не теріс. Егер осы мән теріс болса, онда $[a_1, b_1]$ сегментінің оң жақ жартысын аламыз және оны $[a_2, b_2]$ арқылы белгілейміз.

Сонымен,

$$f(a_2) < o, \qquad f(b_2) > o, b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}.$$

$[a_2, b_2]$ сегментін тағы да қақ бөлеміз, мұның нәтижесінде мына қатыстарға

$$f(a_3) < o, \qquad f(b_3) > o, b_3 - a_3 = \frac{b-a}{2^3}.$$

келеміз.

Осы процесті одан әрі шексіздікке дейін соза берсек, онда осы операцияның нәтижесінде бірінің ішінде бірі жатқан саны шексіз сегменттер тізбегі

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

келіп шығады. Бұл сегменттердің сол ұштарындағы *f(x)* функция мәндерінің таңбасы теріс те, ал оң ұштарындағы мәндерінің таңбасы оң, яғни

$$f(a_n) < 0, \; f(b_n) > 0.$$

Мұнымен бірге айтылып отырған сегменттердің ұзындықтары *n* шексіздікке ұмтылғанда

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2n} \to 0.$$

Кантор аксиомасы бойынша

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c \quad \text{және } a < a_n \leq c \leq b_n < b.$$

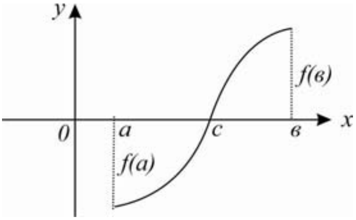
Теореманың шарттары бойынша *f(x) функциясы [a, b]* сегментінде үздіксіз. Сондықтан Гейне анықтамасы бойынша

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0,$$

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0.$$

Сонымен, бір жағынан *f(c)*≤0, екінші жағынан *f(c)≥0* олай болса, *f(c)*= 0. Теорема дәлелденді.

Бұл теореманың геометриялық мағынасы былай: *егер үздіксіз функцияны кескіндейтін қисық ОХ осінің үстіңгі және астыңғы жағында жатқан нүктелер арқылы өтетін болса, онда ол ОХ осін қиып өтеді (36-чертёж).*



36-чертёж

**3-теорема.** *Егер f(x) функциясы [a, b*] *сегментінде* үздіксіз болса және *f(a)=A, f(b) = B болса, онда функция f(x) осы A мен B-нің арасында жатқан барлық сандарды қабылдайды.*

Бұл тұжырымдалған теореманы *Кошидің екінші теоремасы* дейді.

*A* санын *B* санынан кіші деп ұйғарайық: *A<B. C* саны *A* мен Б-нің арасында жатқан кез келген саны болсын: *A<C<B.*

Енді мынадай тендікпен *φ(x)=f(x)−C* анықталған көмекші *φ(x)* функцияны құрайық. Функция *f(x), [a, b]* сегментінде үздіксіз болғандықтан, көмекші функция *φ(x)* да осы сегментте үздіксіз және

$$\varphi(a) = f(a) - c = A - C < 0, \qquad \varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Сонымен көмекші функция *φ(x)* осының алдындағы Кошидің бірінші теоремасының барлық шарттарын қанағаттандыратын болды. Ендеше *[a, b]* сегментінің бойында *c* нүктесі табылып, осы нүктеде $\varphi(x) = f(c) - c = 0$. Бұдан

$$f(c) = c.$$

Теорема дәлелденді.

Бұл теоремаға мынадай геометриялық мағына беруге болады: *егер f(x) функциясы [a, b] сегментінде үздіксіз болса, онда осы функцияны кескіндейтін геометриялық орын жазықтықта тұтас жатқан f(a) және f(b) ординаталар ұштарын біріктіретін қисық болып табылады.*

**4-теорема.** *Егер f(x) функциясы* $x_o$ *нүктесінде үздіксіз болса және* $f(x_o)$ *нольге тең болмаса, онда осы* $x_0$ *нүктесінің белгілі бір аймағында жатқан барлық x-тер үшін f(x)-тің таңбасы* $f(x_o)$*-дің таңбасымен дәл келеді.*

*f(x)* функциясы $x_o$ нүктесінде үздіксіз болғандықтан, кез келген оң мейлінше аз ε санына сәйкес δ саны табылып, мына $(x-a)<\delta$ теңсіздіктің орындалуынан келесі теңсіздік

$$|f(x)-f(x_o)|<\varepsilon$$

орындалады.

Айталық, $f(x_o)>0, \varepsilon=\frac{f(x_o)}{2}$ болсын. $\varepsilon$-ның осы мәніне сәйкес $\delta$-нің мәнін $\delta_1$ арқылы белгілейік. Сонда мына $(x_o-\delta, x_o+\delta)$ аймақтың ішінде жатқан барлық $x$-тер үшін төмендегі теңсіздік

$$|f(x)-f(x_o)|<\frac{f(x_o)}{2}$$

немесе

$$f(x_o)-\frac{f(x_o)}{2}<f(x)<f(x_o)+\frac{f(x_o)}{2},$$

бұл арадан

$$\frac{f(x_o)}{2}<f(x)<\frac{3f(x_o)}{2}$$ орындалады.

Мына $\frac{f(x_o)}{2}, \frac{3f(x_o)}{2}$ сандардың таңбасы оң, сондықтан $(x_o-\delta, x_o+\delta)$ интервалдың ішінде жатқан барлық $x$-тер үшін *f(x)* функцияның да таңбасы оң болады.

Егер $f(x)<0$ болса, онда дәлелдеуді $-$ *f(x)* функция үшін жүргіземіз.

**5-теорема.** *Егер [a, b] сегментінде анықталған f(x) функцияның дәл жоғарғы шекаралығы M болса* $\left[M=\sup_{[a,b]} f(x)\right]$, *онда [a, b] сегментінің бойында жатқан* $x_o$ *нүктесі табылып, оның кішкентай аймағындағы функцияның дәл жоғарғы шекаралығы осы M санына тең болады.*

Бұл теорема Вейерштрастың үздіксіз функциялар жайындағы *бірінші теоремасы* деп аталады.

Теореманы дәлелдеу үшін *[a, b]* сегментін қақ бөлеміз. Сонда сегменттің екі жартысының біреуінде функцияның дәл жоғарғы шекаралығы *M*-ге тең болады. Міне, осы жартыны $[a_1, b_1]$ арқылы белгілейік. Егер функцияның дәл жоғарғы шекаралығы жартылардың екеуінде де болатын болса, онда $[a_1, b_1]$ үшін олардың кез келгенін аламыз. Сонымен,

$$\sup_{[a_1 b, b_1]} f(x) = M, \qquad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Енді $[a_1, b_1]$ сегментін қақ бөлеміз. Сонда жаңағыдай $[a_1, b_1]$ сегментінің екі жартысының біреуінде функцияның дәл жоғарғы шекаралығы *M*-ге тең болады. Міне, осы жартыны $[a_1, b_1]$ арқылы белгілейміз. Сөйтіп,

$$\sup_{[a_2, b_2]} f(x) = M, \qquad b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}.$$

Бұл процесті одан әрі шексіздікке шейін созсақ, онда бірінің ішінде бірі жатқан саны шексіз сегменттер тізбегі пайда болады:

$$[a_1, b_1] \ni [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

Бұл сегменттердің ұзындықтары *n* шексіздікке ұмтылғанда, $b_n - a_n = \frac{v-a}{n} \to 0$ мұнымен бірге

$$\sup_{[a_n, b_n]} f(x) = M, \qquad (n = 1,2, \dots).$$

Кантор аксиомасы бойынша осы сегменттердің барлығына бірдей ортақ бір, тек бір ғана, $x_0$ нүктесі болады, яғни

$$a \le a_n \le x_o \le b_n \le b.$$

Кез келген оң құнарсыз аз δ санын алайық және *[a, b]* сегментінің ішінде толығымен жатқан $(x_o - \delta,\ x_o + \delta)$ аймақты қарайық. Номер *n* шексіздікке ұмтылғанда, $a_n$ және $b_n$ $x_o$-ге ұмтылады, сондықтан $\delta$ саны бойынша *N* саны табылып, осы *N* санынан артық барлық *n*-дер *(n≥M)* үшін төмендегі теңсіздіктер

$$x_o - a_n < \delta, \quad b_n - x_o < \delta$$

орындалуға тиіс. Осы кейінгі теңсіздіктерден мынадай қоры тындыға келеміз: сегмент $[a_n, b_n]$ толығымен $(x_o - \delta,\ \ x_o + \delta)$ аймағының ішінде жатады.

Ендеше

$$M = \sup_{[a_n, b_n]} f(x) \ge \sup_{(x_o - \delta, x_{o+\delta})} f(x) \ge \sup_{[a,b]} f(x) = M.$$

Бұл арадан δ саны қаншама аз болса да,

$$\sup_{(x_o - \delta,\, x_{o+\delta})} f(x) = M.$$

Теорема дәлелденді.

**6-теорема.** *Егер f(x) функциясы [a, b] сегментінде үздіксіз болса, онда ол осы сегментте өзінің дәл жоғарғы және дәл төменгі шекаралықтарын қабылдайды, Басқа сөзбен айтқанда, үздіксіз функцияның [a, b] сегментінде қабылдайтын мәндерінің ішінде ең үлкені және ең кішісі бар.*

Бұл теореманы Вейерштрастың үздіксіз функциялар жайындағы *екінші теоремасы* дейді.

Тұжырымдалған теореманы дәлелдеу үшін *[a, b]* сегментінің бойында жатқан $x_o$ және $x'_o$ нүктелердегі *f(x)* функцияның мәндері *M*-ге және $m$-ге тең болатындығын, яғни

$$f(x_o) = M, \qquad f(x'_o) = m$$

дәлелдеу керек, мұнда

$$M = \sup_{[a,b]} f(x), \qquad m = \inf_{[a,b]} f(x).$$

Мұны дәл жоғарғы шекаралық үшін дәлелдейік.

$x_0 - [a, b]$ сегментінің бір тиянақты нүктесі болсын. Теореманың шарттары бойынша бұл нүктеде функция *f(x)* үздіксіз. Олай болса, алдын ала берілген оң құнарсыз аз ε санына сәйкес δ>0 саны табылып, $(x_o - \delta,\ x_o + \delta)$ аймақтың ішінде жатқан барлық *x*-тер үшін келесі теңсіздік

$$|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

немесе

$$f(x_o) - \varepsilon < f(x) < f(x_o) + \varepsilon$$

орындалады.

Осы кейінгі теңсіздіктен мынадай қорытындыға келеміз: $f(x_o) + \varepsilon$ саны *f(x)* функцияның $(x_o - \delta,\ x_o + \delta)$ аймағындағы жоғарғы шекаралығы, ал *M* оның дәл жоғарғы шекаралығы. Ендеше

$$M < f(x_o) + \varepsilon$$

және

$$f(x_o) \leq M < f(x_o) + \varepsilon.$$

Бұл арадан

$$0 \leq M - f(x_o) < \varepsilon.$$

Екі тұрақты санның айырмасы $M - f(x_o)$ бір жағынан нольден артық, екінші жағынан кез келген оң құнарсыз аз ε санынан кіші. Олай болса,

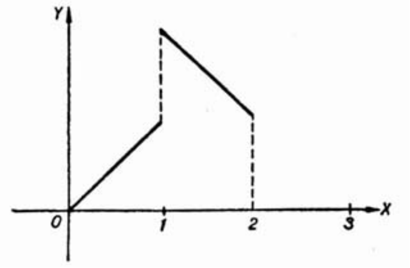
$$M - f(x_o) = 0 \text{ немесе } f(x_o) = M.$$

Сонымен, теорема дәлелденді.

Үзілісті функция үшін Вейерштрастың *екінші теоремасы* дұрыс болмайды. Мәселен, [0,2] сегментінде берілген келесі функция

$$f(x) = \begin{cases} o \leq x \leq 1, \\ \quad x, \text{егер} \\ 1 < x \leq 2, \\ 3 - x, \text{егер} \end{cases}$$

осы сегментте өзінің ең үлкен мәнін қабылдамайды.



37-чертёж

Бұл келтірілген функция [0,2] сегментінің $x_o = 1$ нүктесінде үзілісті (37- чертёж).

**7-теорема.** *Егер f(x) функциясы [a, b] сегментінде үздіксіз болса және тұрақты болмаса, онда бұл сегменттің бейнесі де сегмент болады.*

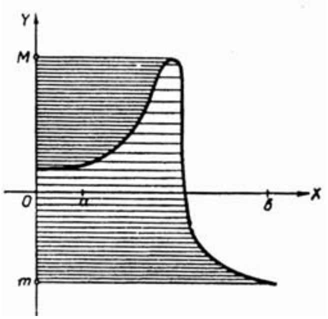
Функция *f(x), [a, b*] сегментінде үздіксіз болғандықтан, 1-інші теорема бойынша *f(x)* функцияның мәндерінің жиыны (сегменттің бейнесі) шектелген жиын болады. Вейерштрастың екінші теоремасы бойынша *f(x)* өзінің дәл жоғарғы шекаралығы *M*-ді және төменгі шекаралыры *m*-ді қабылдайды. Демек, *[a, b]* сегментінде функцияның қабылдайтын мәндерінің жиыны *[m, M]* сегментін құрады.

Сөйтіп, *OX* осі бойында жатқан *[a, b]* сегменті үздіксіз *f(x)* функция көмегімен *OУ* осінде жатқан *[m, M]* сегментіне бейнеленетін болды.

*[a, b]* сегментінің бойында жатқан $x_0$ және $x_0'$ нүктелері үшін $f(x_o) = M, f(x_o') = m$. Сондықтан *[m, M]* сегментінің ұштары *[a, b]* сегментінің бейнесіне жатады.

Кошидің екінші теоремасы бойынша *[m, M]* сегментінің ішінде жатқан әрбір *C(m<C<M)* нүкте *[a, b]* сегментінің бойында жатқан бір ξ нүктесінің бейнесі болып табылады, яғни *f(ξ) = C.*

Сонымен, $[m_1M]$ сегменттің әрбір нүктесі аргумент *x*-тің ең болмағанда бір мәнінің бейнесі болатын болды. *[a, b]* сегментінің ешбір нүктесі *[m, M]* сегменттің сыртында жатқан нүктеге бейнеленбейді. Ендеше *[a, b]* сегментінің бейнесі *[m, M]* сегменті болады.



38-чертёж

Егер $f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментінде тұрақты болса, онда $m = M$ және $[m, M]$ сегменті нүктеге айналады.

Егер $[a, b]$ сегментіндегі үздіксіз $y=f(x)$ функцияның графигін $OY$ осіне проекциялаcа, онда осы проекциялардың жиыны $[m,$ М] сегментті құрады (38- чертёж).

$[m, M]$ сегменттің бір нүктесінде $[a, b]$ сегментінің бір немесе бірнеше, тіпті шексіз көп нүктесі сәйкес келуі мүмкін.

**8-теорема.** *Егер $y=f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментінде үздіксіз, біркелкі үдемелі болса және $f(a) = m, f(b) - M$* болса, онда *$[m, M]$ сегментінде анықталған бірмәнді, үздіксіз және біркелкі үдемелі бастапқы берілген функцияға кері функция $x=\varphi(y)$ болады.*

7-теорема бойынша $[a, b]$ сегментінің бейнесі $[m, M]$ сегмент болады. Осы $[m, M]$ сегменттен $y=y_o$ санды алып ($m \le y_o \le M$) $x$-тің сәйкес мәнін табайық. Берілген $f(x)$ функцияға Кошидің 2-теоремасын қолдансақ: $f(x_0)=y_0,$ мұнда $(a \le x_0 \le b).$ Функция $f(x)$ үдемелі болғандықтан, мұндай $x_0$ нүкте біреу-ақ болу керек. Кері функцияның анықтамасы бойынша осы $x_0$ саны $y_0$ нүктесіндегі оның бір ғана мәні $x_0=\varphi(y_0)$ болуы керек. Бұл арадан

$$\varphi(m) = a, \quad \varphi(M) = b.$$

Сонымен, бастапқы берілген $y=f(x)$ функцияға кері және бірмәнді $x=\varphi(y)$ кері функцияның біркелкі үдемелігін дәлелдейміз. Ол үшін $[m, M]$ сегментінен мына теңсіздікті $y_1<y_2$ қанағаттандыратын екі $y_1$ және $y_2$ мәнді алайық. $x$-тің бұларға сәйкес мәндері $x_1=\varphi(y_1)$ мен $x_2=\varphi(y_2)$ болсын.

Бізге $x_2>x_1$ болатындығын дәлелдеу керек. Егер $x_1>x_2$ болса, онда бастапқы берілген $y=f(x)$ функция үдеме болғандықтан, $y_1=f(x_1)>f(x_2)=y_2$ болу керек. Ал бұл теңсіздік мына берілген $y_1<y_2$ шартқа қайшы келеді. Олай болса,

$$x_2 = \varphi(y_2) > \varphi(y_1) = x_1.$$

Сөйтіп, кері функция $x=\varphi(y)$ біркелкі үдемелі болатын болды.

Енді $x=\varphi(y)$ кері функцияның $[m, M]$ сегментінде үздіксіздігін дәлелдейік. Тағы да $[m, M]$ сегментінен $y=y_0$ санын алайық, кері функцияның бұған сәйкес мәні: $x_0=\varphi(y_0).$

$\varepsilon$ − алдын ала берілген оң мейлінше аз сан болсын. Оның аздығы сондай, аймақ $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ түгелінен $[a, b]$ сегментінің ішінде жатады. Сонда

$$x_o - \varepsilon < x_o < x_o + \varepsilon.$$

Бастапқы берілген функция $y=f(x)$ біркелкі үдемелі болғандықтан, мына теңсіздік

$$f(x_o - \varepsilon) < y_o < f(x_o + \varepsilon)$$

орындалуға тиіс.

Келесі теңсіздік

$$f(x_0 - \varepsilon) \angle y_0 - \delta < y_0 + \delta < f(x_0 + \varepsilon)$$

орындалатындай етіп $\delta>0$ санын $\varepsilon$ саны бойынша сайлап алайық. Сонда $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ аймақтың ішіндегі барлық $y$-тер үшін төмендегі қос теңсіздік

$$f(x_o - \varepsilon) < y < f(x_o + \xi)$$

орындалады. Енді осы кейінгі теңсіздікті қанағаттандыратын мәндерден кері функцияны алсақ, сонда

$$\varphi[f(x_o - \varepsilon)] < \varphi(y) < \varphi[f(x_o + \varepsilon)]$$

немесе функциялар $f(x)$, $\varphi(y)$ бір-біріне өзара кері болғандықтан, кейінгі теңсіздік мына түрге көшеді:

$$x_o - \varepsilon < \varphi(y) < x, + \varepsilon$$

немесе

$$|x_o - \varphi(y)| = |\varphi(y_o) - \varphi(y)| < \varepsilon$$

Міне, бұл теңсіздіктің орындалуы $x=\varphi(y)$ кері функцияның $y_o$ нүктесінде үздіксіздігін дәлелдейді.

Осы кері функцияның $m$ және $M$ нүктелеріндегі үздіксіздігі дәл осылай дәлелденеді, тек $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ аймақтардың орнына мына $[a, a + \varepsilon], [m, m + \delta]$ және $[b - \varepsilon, b], [M - \delta, M]$ аралықтарын алуға тура келеді.

Сонымен, $x = \varphi(y)$ кері функцияның $[m, M]$ сегментіндегі үздіксіздігі дәлелденді.

Бұл теореманы біркелкі кеміме функция үшін де дәлелдеуге болады.

Дәлелденген теоремаға сүйеніп, мына $y=a^x$ көрсеткіштік функцияға кері $y=lg_a x$ логарифмдік функцияның үздіксіздігі туралы қорытынды жасай аламыз.

**9-теорема.** *Егер $f(x)$ функция $[a, b)$ сегментінің ішінде жатқан $x_0$ нүктесінде үздіксіз болса, онда осы нүктедегі оның тербелісі $\omega_{xo}$ нольге тең болады, яғни $\omega_{xo} = 0$.*

Алдын ала берілген оң мейлінше аз ε саны бойынша δ санын сайлап алып, мына $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ аймақты қарайық. Вейерштрастың бірінші теоремасы бойынша $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ аймағында *f(x)* функцияның дәл жоғарғы шекаралығы *M,* дәл төменгі шекаралығы $m$ болады. *f(x)* функциясы *x₀* нүктесін, үздіксіз болғандықтан, жаңағы сайланып алынған $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ аймағындағы барлық *x*-тер үшін келесі теңсіздік

$$f(x_o)-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<f(x_o)+\frac{\varepsilon}{2}$$

орындалады. Бұл теңсіздіктен мынадай қорытындыға келеміз: $f(x_o)-\frac{\varepsilon}{2}$ саны *f(x)* функцияның $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ аймағындағы жоғарғы шекаралығы, ал $f(x_o)-\frac{\varepsilon}{2}$ саны оның төменгі шекаралығы. Сондықтан

$$M_\delta \leq f(x_o)+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$m_\delta \geq f(x_o)-\frac{\varepsilon}{2},$$

бұл арадан

$\omega_\delta = M_\delta - m_\delta < \varepsilon$, олай болса $\omega_{xo}=0$.

Теорема дәлелденді.

**10-теорема.** *Егер f(x) функциясы [a, b) сегментінде үздіксіз болса, онда әрбір алдын ала берілген оң құнарсыз аз ε саны бойынша δ>0 санын тауып, [a, b) сегментін саны шектеулі, әрқайсысының ұзындығы δ санынан аспайтын ұсақ сегменттерге бөлуге болады және осы ұсақ сегменттердің әрқайсысындағы функцияның тербелісі ε санынан кіші болады.*

Бұл тұжырымдалған теореманы *Кантордың бірінші* теоремасы деп атайды.

Мұны дәлелдеу үшін 9-теоремаға сүйенуге тура келеді.

2. *[a, b]* сегментінде берілген *y=f(x)* функцияның осы сегменттегі тербелісін біз былай анықтадық:

$$\omega = M - m,$$

мұнда

$$M=\sup_{[a,b]} f(x),\ \ m=\inf_{[a,b]} f(x).$$

Егер $x', x", (a,b)$ сегментінің кез келген екі нүктесі болса, онда $f(x)\leq M, f(x")\geq m,$ сондықтан

$$\omega \geq f(x')-f(x").$$

Екінші жағынан оң ε саны қаншама аз болса да

$$f(x') > M - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad f(x") < m + \frac{\varepsilon}{2}$$

бұл арадан

$$f(x°) - f(x") > \omega - \varepsilon.$$

Ендеше ω мына *f(x')−f(x")* айырманың дәл жоғарғы шекаралығы:

$$\omega = \sup_{\substack{a \le x' \le b \\ a \le x" \le b}} [f(x') - f(x")]$$

немесе

$$\omega = \sup_{\substack{a \le x' \le b \\ a \le x" \le b}} |f(x') - f(x")|$$ болады.

10-теореманы былай дәлелдеуге де болады. Теоремаға қарсы *[a, b)* сегментін саны шектеулі, ұзындықтары δ санынан кіші, әрқайсысындағы функцияның тербелісі ε санынан кіші болатындай етіп ұсақ сегменттерге бөлуге болмайды деп ұйғарайық. Енді *[a, b]* сегментін қақ бөлейік. Сонда бұл сегменттің ең болмағанда бір жартысы үшін біздің ұйғаруымыз орындалуға тиіс. Осы жартыны $[a_1, b_1]$ арқылы белгілейік. $[a_1,b_1]$ сегментін тағы да қақ бөлеміз. Сонда бұл сегменттің де ең болмағанда бір жартысы үшін біздің ұйғаруымыз орындалады. Осы жартыны $[a_2, b_2)$ деп белгілейік. Міне, осы процесті шексіздікке дейін созсақ, сонда бірінің ішінде бірі жатқан төмендегі сегменттер тізбегі:

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_н, b_н], \dots$$

келіп шығады. Бұлардың әрқайсысы үшін біздің ұйғаруымыз орындалады және $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Кантор аксиомасы бойынша, осы сегменттердің барлығына бірдей ортақ жалғыз ғана $x_0$ нүктесі болады, яғни $a_n \le x_0 \le b_n (n = 1,2, \dots)$. Теореманың шарттары бойынша осы $x_0$ нүктесінде функция *f(x)* үздіксіз. Сондықтан алдын ала берілген оң құнарсыз аз ε санына сәйкес δ саны табылып, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ аймағындағы барлық нүктелер үшін келесі теңсіздік орындалады:

$$|f(x) - f(x_o)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$x'$ және $x''$ мына $(x_0 - \delta, x^0 + \delta)$ аймақтың кез келген екі нүктесі болсын. Сонда алдыңғы өткен теңсіздік бойынша бұл нүктелер үшін төмендегі теңсіздіктер орындалады.

$$|f(x'') - f(x_o)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |f(x') - f(x_o)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сондықтан да

$$|f(x") - f(x')| \leq |f(x") - f(x_o)| + |f(x_o) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Екінші жағынан, егер *n* соншама үлкен болса, онда барлық сегменттер *[aₙ, bₙ]* бір номерден бастап $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ аймағының ішінде жатады. *f(x)* функцияның *[aₙ, bₙ]* сегментіндегі тербелісі

$$\sup_{[a_n, b_n]} |f(x') - f(x")|$$

болады да,

$$\sup_{[a_н, b_н]} |f(x') - f(x")| \leq \sup_{(x_o - \delta\, x_o + \delta)} |f(x') - f(x")| < \varepsilon$$

Біздің ұйғаруымыз бойынша *f(x)* функцияның *[aₙ, bₙ]* сегментіндегі тербелісі ε санынан артық болу керек еді. Бірақ олай болмай шықты, қайшылық теореманы дәлелдейді.

Функцияның нүктедегі үздіксіздігінің анықтамасын бергенде әрбір алдын ала берілген оң құнарсыз аз ε саны бойынша сайланып алынатын δ саны жалғыз ε-ға ғана тәуелді емес, сол қаралып отырған нүктеге де тәуелді. Бұл арада мына сұрақ тууы мүмкін: берілген ε бойынша аралықтың барлық нүктелеріне жарамды δ санын табуға бола ма?

Егер әрбір алдын ала берілген оң құнарсыз аз ε санына сәйкес δ>0 саны табылып, *x* пен *x₀ (a, b)* аралығының қай жерінде жатса да мына теңсіздіктің

$$|x - x_o| < \delta$$

орындалуынан келесі теңсіздік

$$|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

орындалса, онда *f(x)* функцияны *(a, b)* аралығында *бірқалыпты үздіксіз* деп атайды.

Бұл жағдайда δ саны тек ε санына ғана тәуелді болады және *x₀* нүктенің бәріне бірдей жарайды.

Бірқалыпты үздіксіздік, функцияның сәйкес екі мәнінің бір-біріне жуықтық дәрежесін берілген бағаға жеткізу үшін аралықтың барлық бөліктерінде аргументтің әрбір екі мәнінің бір-біріне жуықтық дәрежесі бар бағамен сипатталынатынын көрсетеді. Сондықтан функцияның берілген аралықтағы бірқалыпты үздіксіздігін былай анықтауға болады.

Егер алдын ала берілген оң құнарсыз аз ε санына сәйкес тек осы ε-ға ғана тәуелді δ саны табылып, *[a, b]* аралығының мына теңсіздікті

$$|x' - x"| < \delta$$

қанағаттандыратын кез келген екі $x'$ және $x''$ нүктелері үшін төмендегі теңсіздік

$$|f(x') - f(x")| < \varepsilon$$

орындалса, онда *f(x)* функцияны *(a, b)* аралығында бірқалыпты үздіксіз дейді.

Функция *(a, b)* аралығының барлық нүктелерінде үздіксіз болғанымен, онда ол бұл сегментте бірқалыпты үздіксіз болмауы мүмкін.

**11-теорема**. *Егер f(x) функциясы [a, b] сегментінде үздіксіз болса, онда ол бұл сегментте бірқалыпты үздіксіз болады.*

Бұл теореманы Кантордың екінші теоремасы дейді. Берілген оң ε саны бойынша бірқалыпты үздіксіздіктің анықтамасындағы теңсіздік орындалатындай етіп δ санын табуға болмайды деп, теоремаға қарсы ұйғарайық. Онда қандай болмасын δ>0 санын алсақ та *[a, b]* сегментінің бойында жатқан, мына теңсіздікті

$$|x' - x"| < \delta$$

қанағаттандыратын екі $x'$ және $x''$ нүктелер табылады және бұл нүктелердегі функцияның мәндері келесі теңсіздікті қанағаттандыруға тиіс.

$$|f(x') - f(x")| \geq \varepsilon$$

Нольге ұмтылатын мына сандардың

$$\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n, \dots \to 0$$

тізбегін қарайық. Осының алдында айтылған пікір бойынша әрбір саны үшін *[a, b]* сегментінен мына теңсіздікті

$$|x'_n - x"_n| < \delta_{\text{н}}, \quad (n = 1,2, \dots)$$

қанағаттандыратын екі $x'$ және $x''$ нүктелер табылады, ал бұл нүктелердегі функцияның мәндері төмендегі теңсіздікті

$$|f(x'_n) - f(x_n'')| \geq \varepsilon \tag{37}$$

қанағаттандырады.

Сонымен екі тізбек құрылады:

$$x_1', x_2', \dots, x_n', \dots,$$

$$x_1'', x_2'', \dots, x_n'', \dots,$$

бұлардың екеуі де *[a, b]* сегментінің бойында жатады. Сондықтан Больцано-Вейерштрасс теоремасы бойынша олардың ең болмағанда біреуінің шектік нүктесі болады. Бұл шектік нүктені

$x_0$ арқылы белгілейік. Номер $n$ аса үлкен болғанда, $x'_n$ мен $x''_n$-нің айырмасының абсолют шамасы құнарсыз аз болады, ендеше мына $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ аймақтың ішінде жоғарыда келтірілген екі тізбектің шексіз көп мүшелері жатады. Нүкте $x_0$, *[a, b]* сегментіне жататын болғандықтан, бұл нүктеде қаралып отырған функция *f(x)* үздіксіз. Олай болса, берілген әрбір оң ε саны үшін δ>0 саны табылып, мына теңсіздікті $|x-x_0|<\delta$ қанағаттандыратын, немесе бәрібір, мына $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ аймақтың ішінде жатқан барлық $x$-тер үшін келесі теңсіздік

$$|f(x)-f(x_o)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (38)$$

орындалады.

Екінші жағынан жоғарыдағы екі тізбектің мүшелері мына теңсіздіктерді

$$|x_n{}'-x_o|<\delta, |x_n{}''-x_o|<\delta \qquad (39)$$

қанағаттандыруы керектігін біз жоғарыда айттық, ал бұл тізбектердің мүшелері үшін (37) теңсіздік орындалады.

Енді келесі теңбе-теңдікті

$$f(x\,_n{}')-f(x_n")=f(x_n)-f(x_0)+f(x_o{}')-f(x_n{}'')$$

қарайық. Бұл арадан

$$|f(x\,_n{}')-f(x_{\text{н}}{}'')|\leq|f(x_n{}')-f(x_0)|+|f(x'')-f(x_0{}'')|$$

(38) және (39) теңсіздіктерді еске алсақ, онда

$$|f(x_n{}')-f(x_n{}'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\delta}{2}=\varepsilon.$$

Осы кейінгі теңсіздіктің орындалуы (37) шартқа қайшы келеді. Ендеше біздің ұйғаруымыз дұрыс емес. Теорема дәлелденді.

### ***Жаттығулар***

Келесі функциялардың облысын табу керек:

1. $f(x)=\sqrt[4]{4-x}+\sqrt[6]{9-x^2}.$ Жауабы: [−3,3].

2. $f(x)=\sqrt{x+3}-\sqrt[5]{\frac{1}{x+2}}+\frac{1}{\lg{(4x+5)}}.$ Жауабы: $\left[-\frac{5}{4},-1\right].$

3. $f(x)=x^3+\ln x+\frac{1}{x+4}.$ Жауабы: [0,4]; [4,+∞].

4. $f(x)=\sqrt{5-x.}$ Жауабы: [−∞,5].

5. $f(x)=\sqrt[4]{x^2-9.}$ Жауабы: [3,∞], [−∞,−3].

6. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{2-x.}$ Жауабы: [−1,2].

7. $f(x)=arc\sin(x^2+2).$ Жауабы: бұл формула ешқандай функцияны анықтамайды.

Мына функциялардың графиктерін құрыңдар:

8. $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$.

9. $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

10. $y = x + \sin x$.

*Нұсқау.* Алдымен *XOY* координаталар жазықтығында мына $y$=$x$, $y$=sin $x$ екі функцияның графиктерін құру керек; ол графиктерді пунктир арқылы сызса да болады. Содан кейін құрылған графиктердің ординаталарын қосу керек.

11. $y = 2^x + \cos x$.

12. $y = x \sin x$.

13. $y = \begin{cases} 2x + 4 \text{ егер} - \infty < x < -2; \\ 3x \qquad \text{"} \qquad -2 < x < 0; \\ 4x \qquad \text{"} \qquad\qquad x > 0 \end{cases}$

14. $y = \begin{cases} 2x + 4 \ \ \text{егер} \ x \leq -1; \\ x^2 \qquad \text{"} \quad -1 \leq x \leq 1; \\ 3 - 2x \quad \text{"} \qquad x \geq 1. \end{cases}$

15. $y = arc\sin(\sin x)$.

16. $y = x^2 \cos x$.

17. Гейне анықтамасына сүйеніп, мына $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ функцияның $x$ нольге ұмтылғанда шегі жоқ екенін дәлелдеу керек.

18. Мына $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ функция аргументі $x$ плюс шексіздікке ұмтылғанда $\frac{1}{2}$-ге ұмтылатынын дәлелдеу керек.

Шек анықтамасына сүйене отырып, функциялардың шектерін табу оңай емес. Сондықтан, функциялардың шектерін табу үшін анықтамадан тыс басқа тәсілдерді де қолдануға тура келеді.

Кейбір есептерді шығару үшін мына екі формуланы пайдалану тиімді болады:

$$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} = \frac{x - a}{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}} \cdot \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{x^{n-3}}\sqrt[n]{a^2} + \cdots + \sqrt[n]{a^{n-1}}} \cdot (A)$$

$$\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{a} = \frac{x + a}{\sqrt[n]{x^{n-1}} - \sqrt[n]{x^{n-2}}\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{x^{n-3}} \cdot \sqrt[n]{a^2} - \cdots + (-1)^{n-1}\sqrt[n]{a^{n-1}}} \cdot (B)$$

Төмендегі функциялардың шектерін табу керек.

19. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}$.

*Нұсқау.* (В) формуланы қолдану керек. Сонда

$$\lim_{x \to -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}} = \lim_{x \to -1} \frac{\frac{1+x}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}}{\frac{1+x}{\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[5]{x^2} - \sqrt[5]{x} + 1}}.$$

20. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[q]{x^p} - 1}{\sqrt[s]{x^r} - 1}$. Жауабы: $\dfrac{\mathrm{sp}}{\mathrm{rq}}$.

21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$ Жауабы: $\dfrac{4}{9}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$. Жауабы: $\dfrac{15}{2}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$ Жауабы: $\sin a$.

24. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$. Жауабы: $\dfrac{2}{\pi}$

25. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$. Жауабы: $\dfrac{1}{4}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$ Жауабы: $\alpha-\beta$

27. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. Жауабы: $e^3$

28. $\lim\limits_{x\to \alpha}\left(\dfrac{\sin x}{\sin \alpha}\right)^{\frac{1}{x-\alpha}}$. Жауабы: $e^{\operatorname{ctg}\alpha}$

29. Мына $f(x)=\frac{1}{2-2^{\frac{1}{x}}}$ функцияның егер $x\to 0$ болса, оң жақты және сол жақты шектерін табу керек.

Жауабы: $\frac{1}{2}, 0$.

30. Мына $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ функцияның *x=4* нүктесіндегі үздіксіздігін дәлелдеу керек.

31. Мына функцияның

$$f(x)=\begin{cases}2+-\dfrac{1}{3+5^{\frac{1}{3-x}}}, \text{егер } x\neq 3,\\ \qquad\qquad 2, \text{егер } x=3.\end{cases}$$

*x=3* нүктенің сол жағынан үздіксіз, оң жағынан үзілісті екенін дәлелдеу керек.

32. Мына функцияның

$$f(x)=\begin{cases}3+\dfrac{1}{2+3^{\frac{1}{2-x}}}, \text{егер } x\neq 2\\ 3{,}25, \qquad \text{егер } x=2\end{cases}$$

үзіліс тегін зерттеу керек.

### *Екінші бөлім*

# БІР АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАРЫНЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУІ

## IV ТАРАУ

## ТУЫНДЫ ЖӘНЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

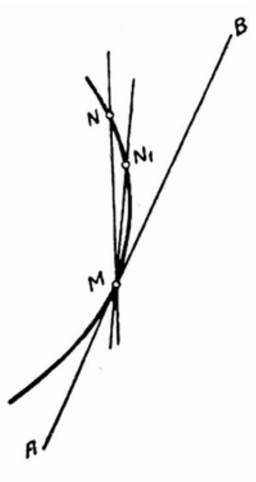
### §1. Туынды ұғымына келтіретін есептер

1. Дифференциалдық есептеудің тууына себеп болған тәжірибелік есептердің бірі − берілген қисыққа оның кез келген нүктесінде жанама жүргізу есебі. Көп ғасырлар бойы бұл есептің шешуі табылмай келді. Дифференциалдық есептеудің негізгі ұғымдары − туынды, дифференциал тағы басқаларының тууы және онан әрі қарай дамуы геометрияның, физиканың, механиканың және техниканың алуантүрлі есептерін шығарумен тығыз байланысты болды.

Берілген қисыққа оның кез келген нүктесінде жанама жүргізу есебін шығару үшін, жанама деп нені айтады, соған анықтама беру керек.

Жазықтықта жатқан бір үздіксіз *(К)* қисық сызықты қарайық. Осы қисықтың бойында жатқан, қозғалмай бір жағдайда болатын *M* нүктені және үнемі қисықтың бойымен қозғалып, бір орында болмайтын *N* нүктені алайық (39-чертёж).

Осы, *M* және *N* екі нүкте арқылы қисыққа қиюшы жүргізейік. Сонда нүкте *N* қисықтың бойымен *M* нүктесіне қарай қозғалғанда, қиюшы *MN* түрлі жағдайларда болады (мәселен $MN_1$). Нүкте *N* қисықтың бойымен *M* нүктесіне ылғи жуықтай берсе, онда бара-бара қиюшы *MN* белгілі бір тиянақты жағдайға, мәселен *AB* жағдайына келуі мүмкін.



39-чертёж

Егер қиюшының алғашқы жағдайы мен «ақырғы жағдайының» (мәселен, *AB* жағдайындағы) арасындағы бұрышты $\beta$ арқылы белгілесек, онда осы бұрыш бара-

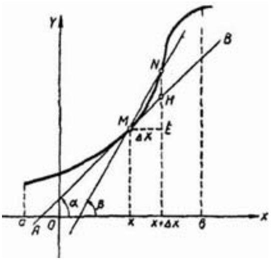
бара нольге ұмтылған болар еді. Бұл бұрыштың нольге ұмтылуы *N* нүктесінің *M* нүктесіне оның қай жағынан ұмтылатындығына тәуелді емес. Осы *AB* түзуін *MN* қиюшының шектік жағдайы деп атайды.

Қозғалмалы нүкте *N* қисықтың бойымен *M* нүктесіне түйісуге ұмтылғандағы *MN* қиюшының шектік *AB* жағдайын *(К)* қисыққа оның *M* нүктесінде жүргізілген жанама деп атайды.

Сөйтіп, біздің жанама деп отырғанымыз түзудің бойында жатқан және жанау нүкте деп аталатын нүкте арқылы өтетін түзу болды.

Берілген қисыққа жанаманы қалай құру керек, міне, енді соған келейік.

*ХОУ* жазықтығында жатқан, *у=f(х)* теңдеумен берілген үздіксіз қисықты қарайық. Мұнда *f(х)−(a,b)* аралығында анықталған және осы аралықта үздіксіз функция. Қисықтың бойында жатқан *M(х, у)* нүктені және оған жақын *N(х+Δх, у+Δу)* нүктені алайық та (кейінгі *N* нүктені *M* нүктесінің қай жағынан алса да болады), олар арқылы қисыққа қиюшы жүргізейік (40-чертёж). Мұнда *M(х, у)* жанау нүктесі болып есептеледі.



40-чертёж

Жазықтықтағы берілген екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін құру аналитикалық геометриядан белгілі. Міне, осыны еске алып, айтылып отырған қиюшының теңдеуін құрамыз:

$$\frac{\text{У} - y}{y + \Delta y - y} = \frac{X - x}{x + \Delta x - x}$$

немесе бұл арадан

$$\text{У} = y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x). \qquad (1)$$

Мұндағы *Х, У* − ақпа координаталар, ал *х, у* жанау нүктесінің координаталары (бұлар берілген сандар).

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынасы $\beta =< EMN$ бұрыштың тангенсін береді, яғни

$$\text{tg}\,\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x}.$$

Бұл арадан *tg β* үшбұрыштың қабырғаларына тәуелді емес, олардың қатынасына ғана тәуелді екенін байқаймыз.

Қисыққа оның берілген нүктесінде жүргізілетін жанаманың анықтамасына сүйеніп, киюшының (1) теңдеуінен жанаманың теңдеуіне көшуге болады: егер *N* нүктесін қисықтың бойымен *M* нүктесіне шексіз жақындатсақ, онда қиюшы *MN* өзінің шектік жағдайы *MH* жанамаға ұмтылады. Олай болса берілген қисыққа, оның *M (x,y)* нүктесінде жүргізілген *MH* жанаманың теңдеуі

$$У - y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x). \qquad (2)$$

болады.

Бұл арадан

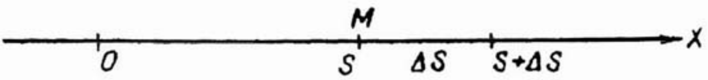
$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\beta \to \alpha} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (3)$$

болатындығы айқын.

*Сонымен, қисыққа оның берілген нүктесінде жанама жүргізу мәселесі екі шексіз аз шама (Δу пен Δх-тің) қатынасының шегін табуға әкеп соқты.*

2. Осындай шекті табуға келтіретін тағы да бір мысалды физика саласынан қарайық.

Айталық, материалды нүкте *M* түзудің бойымен козғалатын болсын. Осы *M* нүктенің бастапқы *O* нүктесінен қашықтығын *S* арқылы белгілесек (41-чертёж), онда бұл қашықтық уақыт *t*-нің функциясы болып табылады: *s=f(t).* Осы кейінгі теңдеуді *M* нүктесінің қозғалыс заңы деп атайды.



41-чертеж

*M* нүктесінің берілген *t* мезгілдегі жылдамдығын табу керек. Ол үшін *t* мезгілден *t+Δt* мезгілге көшеміз. Осы мезгілдің ішінде *M* нүктесінің жүрген жолының ұзындығы

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

болады. Мұнда $\Delta s$ мына *f(t)* функцияның өсімшесін сипаттайды. Кейінгі теңдіктің екі жағын *Δt*-ге бөліп, нүктенің *t* мезгілден *t+Δt* мезгілге дейінгі уақыттың ішіндегі орта жылдамдығын табамыз:

$$v_{op} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Егер тексеріліп отырған қозғалыс бірқалыпты болмаса, онда *Δt*-нің өзгеруіне байланысты $v_{op}$-да өзгереді және мұнда былай: неғұрлым *Δt* аз болған сайын, солғұрлым *v* шама нүктенің *t* мезгілдегі жылдамдығын жақсы сипаттайды. Олай болса, материалды $M$ нүктенің $t$ мезгілдегі жылдамдығы деп нольге ұмтылғандағы $v_{op}$ орта жылдамдықтың ұмтылатын шегін айтады.

Сөйтіп, $M$ нүктесінің $t$ мезгілдегі жылдамдығы $v$ былай анықталатын болды:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{op} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \qquad (4)$$

Сонымен, бұл есеп те нольге бірдей ұмтылушы екі шаманың ($\Delta s$ пен $\Delta t$-нің) қатынасының шегін іздеуге әкеп соқты.

## § 2. Туынды

1. Өткен параграфта қаралған есептің екеуі де мазмұндары әр түрлі болғанымен бір амалға әкеп соқты, атап айтқанда, функцияның өсімшесі мен оның аргументінің өсімшесінің қатынасының шегін табуға келтірді.

$(a, b)$ аралығында анықталған бірмәнді үздіксіз $y=f(x)$ функцияны қарайық. Егер біз $(a, b)$ аралығының $x$ нүктесінен $x+\Delta x$ нүктесіне көшетін болсақ, онда функция $y=f(x)$ мынадай өсімше $\Delta y=f(x+\Delta x) -f(x)$ алған болар еді.

Тәуелсіз айнымалы $x$-тің өзгеруіне байланысты $y$-тің шамасы қалай өзгеретінін байқау үшін, $y=f(x)$ функцияның өсімшесі мен сол өсімшені туғызып отырған $\Delta x$ өсімшесін салыстыруымыз керек; міне, осы мақсатпен төмендегі қатынасты

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (5)$$

зерттейміз. Бұл қатынас $y=f(x)$ функцияның, $x$ шамасы өсімшесінің бірлігіне есептелген орта өсімшесін көрсетеді; ал бұл есептеу $\Delta x$-тің тиянақты мәніне тура келгенімен, оның түрлі мәндерінде түрліше болады. Сондықтан алдымызға қойып отырған мәселені бірмәнді етіп шешу үшін $\Delta x$-тің мәнін бірыңғай принцип негізі бойынша сайлап алуымыз керек.

Егер біздің мақсатымыз $x$ нүктесіне көршілес, оған жуық жатқан нүктелердегі $f(x)$ функцияның өзгерісін зерттеу болса, онда (5) қатынас $y=f(x)$ функцияның «өзгергіштік» өлшеуіші болып табылып, біздің тілегімізді қанағаттандырған болады; неғұрлым $\Delta x$-тің абсолют шамасы аз болса, (5) қатынас $y=f(x)$ функцияның мына $[x_0 - |\Delta x|, x_0 + |\Delta x|]$ кесіндісіндегі «орта өзгергіштігін» солғұрлым дұрыс сипаттайды.

*x* нүктесіне көршілес, оған жуық жатқан нүктелердегі *y=f(x)* функцияның өзгергіштігін сипаттау үшін *Δx*-ті нольге ұмтылып *(Δx→*0) (1) қатынастан шек аламыз; егер осы шек бар болатын болса, онда *ол шекті y=f(x) функцияның x нүктесіндегі туындысы деп атайды да, былай белгілейді:*

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (6)$$

(Бұл символ оқылады: «игрек штрих» немесе «эф штрих *x*-тен»). *y=f(x)* функциясы *(a, b)* аралығында үздіксіз болғандықтан, аргумент *x*-тің өсімшесі *Δx* нольге ұмтылғанда функцияның оған сәйкес өсімшесі *Δy*-те нольге ұмтылады.

Сонымен, *y=f(x)* функцияның *x* нүктесіндегі туындысы деп, *Δx* нольге ұмтылғандағы (5) қатынастың, яғни функцияның өсімшесі мен аргумент өсімшесі қатынасының шегін айтатын болдық (әрине, егер ол шек бар болса).

Осы берілген анықтамадан біз мынадай қорытындыға келеміз: *y=f(x)* функцияның берілген нүктедегі туындысы осы нүктедегі оның өзгеру жылдамдығын сипаттайды. $f'(x)$ туындының шамасы оң да, теріс те болуы мүмкін: егер *x*-тің азырақ өсуінен функция да өсетін болса, онда туынды $f'(x)$ оң болады; ал егер *x*-тің азырақ өсуінен функция кемитін болса, онда туынды $f'(x)$ теріс болады.

(3) теңдіктен *туындының геометриялық мағынасын* тағайындауға болады, атап айтқанда, туынды $f'(x)$, *y=f(x) функцияның графигіне оның M (x,y) нүктесінде жүргізілген жанама мен OX осінің оң бағытының арасындағы* **бұрыштың тангенсін** *кескіндейді.*

(4) теңдіктен туындының физикалық мағынасын тағайындауға болады: туынды $f'(i)$ материалды нүктенің **лездік жылдамдығын** сипаттайды.

Егер *(a, b)* аралығының $x=x_0$ нүктесінде *y=f(x)* функцияның шектеулі $f'(x_0)$ туындысы болса, онда мұндай функцияны $x_0$ нүктесінде *дифференциалданатын функция* деп атайды. Егер функция *f(x), (a, b)* аралығының әрбір ішкі нүктесінде дифференциалданатын болса, онда мұндай функцияны *(a, b)* аралығында дифференциалданатын функция деп атайды.

Осы айтылған сөйлемдерді қысқаша, математикалық түрде, былай тұжырымдауға болады. Егер *y=f(x)* функцияның *(a, b),* аралығынан алынған *x* нүктесіндегі өсімшесі *Δy* келесі қатыс

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x \qquad (7)$$

арқылы өрнектелсе, онда бұл функция көрсетілген аралықта дифференциалданатын функция деп аталады. Мұнда α шама $\Delta x$ пен бірге, нольге ұмтылады, яғни оған тәуелді шексіз аз шама. Ал көбейтінді $\alpha\Delta x$ жоғары ретті шексіз аз шама.

Туындының анықтамасы берілгеннен кейін, $y=f(x)$ теңдеумен берілген қисыққа оның белгілі $M\ (x_0,\ y_0)$ нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуін табу қиын емес. (2) теңдеуді еске алсақ, онда осы айтылып отырған жанаманың теңдеуі мынадай болады:

$$У - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0) \qquad (8)$$

*Жанау нүктесіндегі жанамаға түскен перпендикулярді нормаль деп атайды.* Нормальдың теңдеуі сонда мынадай болады:

$$У - f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(X - x_0). \qquad (9)$$

2. Жоғарыда берілген туындының анықтамасынан, осы туындының өзін табу ережесіне келеміз. Берілген $y=f(x)$ функцияның туындысын табу үшін, алдымен аргумент $x$-ке еркімізше $\Delta x$ өсімшені беріп, функцияның оған сәйкес $\Delta y$ өсімшесін табамыз:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Бұдан кейін осы теңдіктің екі жағын $\Delta x$-ке бөліп және $\Delta x$-ті нольге ұмтылып, шекке көшеміз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Егер осы шек бар болса, онда ол ізделініп отырған $y' = f'(x)$ туындыны береді.

Мысалдар келтірейік.

1) Мына $y=x$ функцияның туындысын табу керек. Ол үшін аргумент $x$-ке еркімізше $\Delta x$ өсімшені беріп, функцияның оған сәйкес $\Delta y$ өсімшесін табамыз:

$$\Delta y = (x+\Delta x) - x = \Delta x.$$

Кейінгі теңдіктің екі жағын $\Delta x$-ке бөліп және оны нольге ұмтылтып шекке көшсек,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Сонымен, қаралып отырған функцияның туындысы

$$y'=(x)'=1.$$

2) Енді мына $y=x^n$ функцияны қарайық:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}\Delta x^3 + \cdots + \Delta x^n - x^n.$$

Осы кейінгі теңдіктің[1] екі жағын $\Delta x$-ке бөліп және оны нольге ұмтылтып, шекке кешсек, онда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

Сонымен,

$$y' = (x^n)' = nx^{n-1}.$$

Бұл кейінгі қорытылып шыққан формула барлық $n$-дер үшін дұрыс болады. Енді осы формулаға сүйеніп, мына $y=\sqrt{x},\ y=\frac{1}{x}$ функциялардың туындыларын табуға болады.

$$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}.$$

Жаңағы қорытылып шыққан формула бойынша

$$y' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Сонымен,

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Енді екінші, $y=\frac{1}{x}$ функцияны алайық:

$$y=\frac{1}{x}=x^{-1}; y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Сонымен,

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

3) $y=\sin x$. Осы функцияның $y'=(\sin x)'$ туындысын табу керек. Ол үшін алдыңғыдай аргумент $x$-ке $\Delta x$ өсімшені беріп, функцияның оған сәйкес $\Delta y$ өсімшесін табамыз:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

бұл арадан

---

[1] Бином теоремасын нақты $n$ дәрежелердің бәріне де қолдануға болады, ол кейінірек, *XV* тараудың 7-параграфында дәлелденеді.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Енді $\Delta x$-ті нольге ұмтылтып, шекке көшеміз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cos x.$$

Сонымен, sin$x$-тің туындысы cos$x$ болатын болды, яғни (4)

$$y' = (\sin x)' = \cos x.$$

4) $y = \cos x.$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin\frac{\Delta x}{2} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Кейінгі теңдіктің екі жағын $\Delta x$-ке бөліп және оны нольге ұмтылтып, онан соң шекке көшіп табамыз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \sin x.$$

Сонымен,

$$y' = (\cos x)' = -\sin x.$$

5) $y$=tg$x$-тің туындысын табу керек. Ол үшін алдымен $\Delta y$-ті табамыз:

$$\Delta y = \operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x = \frac{\sin \Delta x}{\cos(x + \Delta x) \cdot \cos x},$$

бұл арадан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\cos(x + \Delta x) \cos x}.$$

Енді $\Delta x$-ті нольге ұмтылтып, шекке көшеміз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x) \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Сонымен,

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

6) $y$=ctg $x$-тің туындысын табу керек. Ол үшін алдымен $\Delta y$-ті табамыз:

$$\Delta y = \operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \operatorname{ctg} x = \frac{-\sin \Delta x}{\sin(x + \Delta x) \sin x},$$

бұл арадан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\sin(x+\Delta x)\sin x}.$$

Енді $\Delta x$-ті нольге ұмтылтып, шекке көшеміз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin(x+\Delta x)\sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Сонымен,

$$y' = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

7) $y=a^x$ көрсеткіштік функцияның туындысын табу керек. Ол үшін алдымен $\Delta y$-ті табамыз:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

Бұл арадан

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}.$$

Енді осы шекті табу үшін былай ауыстыру жасаймыз: $a^{\Delta x} - 1 = \alpha$; егер $\Delta x$ нольге ұмтылса, $\alpha$ да нольге ұмтылады және $\Delta x = \frac{ln\,(1+\alpha)}{ln\,a}$. Бұдан соң:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha\, ln\, a}{ln\,(1+\alpha)} = a^x\, ln\, a\, \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{ln\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

Логарифмдік функция үздіксіз болғандықтан,

$$\lim_{\alpha \to 0} - \frac{1}{ln\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{ln \lim\limits_{\alpha \to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{ln\, e} = 1.$$

Сонымен,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\, ln\, a$$

немесе

$$y' = (a^x)' = a^x\, ln\, a.$$

Енді осы формулаға қарап, мына $y=e^x$ көрсеткіштік функцияның туындысын табайық:

$$y' = (e^x)' = e^x \ln e = e^x.$$

8) Мына $y = \lg_{\mathrm{a}} x$ логарифмдік функцияның туындысын табу керек. Ол үшін алдымен $\Delta y$-ті табамыз:

$$\Delta y = lg_a(x+\Delta x) - lg_a\, x = lg_a \frac{x+\Delta x}{x} = lg_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Бұл арадан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} lg_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Енді $\Delta x$-тің орнына мына теңдік $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$ арқылы жаңа шексіз аз $\alpha$-ны енгізейік. Сонда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x^{\alpha}} \mathrm{lg}_{\alpha}(1 + \alpha) = \frac{1}{x} \mathrm{lg}_{\alpha}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Енді $\Delta x$-ті нольге ұмтылтып, шекке көшеміз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\alpha \to 0} lg_a (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x} lg_a \lim_{a \to 0} (1 + a)^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{x} lg_a e$$

Сөйтіп,

$$y' = (lg_a\, x)' = \frac{1}{x} lg_a\, e.$$

Енді осы формулаға сүйеніп, мына $y = \ln x$ функцияның туындысын табайық:

$$y' = (ln\, x)' = \frac{1}{x} ln\, e = \frac{1}{x}.$$

## §3. Дифференциал ұғымы және оның геометриялық мағынасы

1. *(a, b)* аралығының әрбір нүктесінде дифференциалданатын *y=f(x)* функцияны қарайық. *y=f(x)* функциясы (*a*, *b)* аралығында дифференциалданатын болғандықтан, онық өсімшесі *Δy* (7) теңдік арқылы өрнектеледі, яғни ,

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x. \tag{7}$$

*(7) теңдіктің оң жағында тұрған бірінші* $f'(x)$ *Δx қосылғышты y=f(x) функцияның басты өсімшесі немесе дифференциалы деп атайды* және оны былай белгілейді: *dy* немесе *df(x)* (бұл символ былай оқылады: «дэ игрек» немесе «дэ эф х-тен»). Сонымен, *y=f(x)* функцияның *x* нүктесіндегі дифференциалы деп оның осы нүктедегі туындысы мен тәуелсіз айнымалы *x*-тің өсімшесінің көбейтіндісін айтатын болдық.

Анықтама бойынша:

$$dy = df(x) = f'(x)\Delta x \tag{10}$$

(7) теңдік пен (10) теңдікті салыстырып, мынадай қорытындыға келеміз: функцияның өсімшесі мен оның дифференциалының айырмасы:

$\Delta y - dy = \Delta f(x) - df(x)$ жоғары ретті шексіз аз шама.

Енді мына, $y=x$ функцияны қарайық. Жаңағы берілген анықтама бойынша, бұл функцияның дифференциалы болады:

$$dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

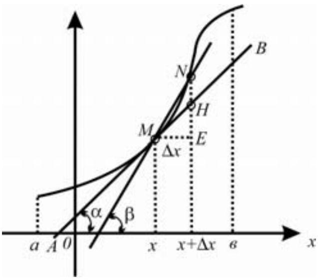
Сөйтіп, бұл функцияның дифференциалы өзінің өсімшесіне тең болатын болды. Ендеше (10) формуланы былай жазуға болады:

$$dy = df(x) = f'(x)dx = y'dx \qquad (11)$$

(11) теңдіктің екі жағын $dx$-ке бөліп жіберіп, туындының екінші түрдегі белгілеуін табамыз;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = y'$$

Осылай етіп белгілеуден мынадай қорытындыға келеміз: $y=f(x)$ функцияның $x$ нүктесінде алынған туындысын оның осы нүктедегі дифференциалымен аргумент дифференциалының қатынасы деп қарауға болады. Туындыны бұлай белгілеудің көп артықшылығы бар, оны келешекте көреміз. (Символ $\frac{dy}{dx}$ былай оқылады: «дэ игрек дэ икс бойынша»).



42-чертёж

2. Енді функцияның дифференциалының геометриялық мағынасын көрсетейік. Ол үшін, өзінің әрбір нүктесінде тиянақты жанамасы бар $y=f(x)$ теңдеумен берілген қисықты қарайық (42-чертёж).

Мұнда $f(x)$ $(a, b)$ аралығының әрбір нүктесінде дифференциалданатын функция.

$MEH$ үшбұрышынан $EN=ME\ \mathrm{tg}a;$ ал $ME=\Delta x$ және туындының геометриялық мағынасы бойынша $\mathrm{tg}\alpha=y'=f'(x),$ сондықтан $EH=f'(x)\Delta x=dy.$

Осы кейінгі тендік функция дифференциалының геометриялық мағынасын тағайындайды.

Сонымен, функцияның дифференциалы осы функцияны кескіндейтін қисыққа жүргізілген жанама мен жанау нүктесінен $N$ ординатасымен түйіскенше $OX$ осіне параллель етіп жүргізген түзудің арасындағы кесінді болатын болды.

Мысалдар келтірейік:

1) $y=x^n$ функцияның дифференциалын табу керек. Ол үшін бірден дифференциалдың анықтамасын пайдаланамыз. Сонда

$$dy = d(x^n) = nx^{n-1}dx.$$

2) $y=a^x$ көрсеткіштік функцияның дифференциалын табу керек. Жаңағыдай

$$dy = d(a^x) = a^x \, ln\, a \, dx.$$

3) $y$=sin$x$-тің дифференциалын табу керек.

$$dy = d \sin x = \cos x \, dx.$$

Сол сияқты

$$dy = d \cos x = -\sin x \, d\, x.$$

4) $y = \mathrm{tg}\, x, \quad dy = d\, \mathrm{tg}\, x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$

5) $y = \mathrm{ctg}\, x, \quad dy = d\, \mathrm{ctg}\, x = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$

6) $y = l\mathrm{g}_\alpha\, x, \quad dy = d\, l\mathrm{g}_\alpha\, x = \frac{l\mathrm{g}_\alpha\, e}{x} dx.$

$$y = ln\, x, \quad dy = d\, ln\, x = \frac{dx}{x}.$$

## §4. Күрделі функцияның туындысы мен дифференциалы

1. $y = f[\varphi(x)]$ күрделі функцияны қарайық, мұнда $u = \varphi(x)$. Ендеше $y = f(u)$, ал $u = \varphi(x)$.

Мәселе осы $y = f[\varphi(x)]$ күрделі функцияның тәуелсіз айнымалы $x$ бойынша алынған туындысын табуда. Күрделі функцияның $x$ бойынша алынған туындысын $y'_x$ арқылы, ал $y$-тің аргумент $u$ бойынша алынған туындысын $y'_u$ арқылы және $u$-дың $x$ бойынша алынған туындысын $u'_x$ арқылы белгілейік.

$u = \varphi(x)$ функциясы *(a, b)* аралығының әрбір нүктесінде, ал функция *y=f(x), (c, d)* аралығының әрбір нүктесінде дифференциалданатын болсын. Тәуелсіз айнымалы *x, (a,b)* аралығында өзгергенде, айнымалы *u, (c, d)* аралығында өзгеру керек, оның сыртына шықпауы керек, мұны тағы да еске түсіріп кетейік. Міне, осы айтылған шарттар орындалса, күрделі функцияның туындысы төмендегі формуламен анықталады:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \tag{12}$$

немесе

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Функция *y=f(u), (c, d)* аралығының әрбір нүктесінде дифференциалданатын болғандықтан,

$$\Delta y = y'_u \Delta u + a\Delta u,$$

мұнда $\alpha - \Delta u$ және *Δx* пен бірге нольге ұмтылады. Осы кейінгі теңдіктің екі жағын *Δx*-ке бөліп табамыз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Енді бұл арадан *Δx*-ті нольге ұмтылтып, шекке көшейік, сонда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\ \alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Бұл арадан

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Сонымен, (12) формула дәлелденді.

Мысалдар келтірейік.

Мына $y = ln \sin x$ функцияның туындысын табу керек. Мұнда былай: $y = \ln u$ , ал $u = \sin x$.

Бұл арадан

$$y'_u = \frac{1}{u}. \text{ ал } u'_x = \cos x.$$

(12) формуланы пайдаланып табамыз:

$$y' = \frac{1}{u} \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = ctg\ x.$$

Күрделі функцияның туындысын (12) формуланы қолданбай-ақ та тікелей табуға болады. Мәселен, мына $y = tg\sqrt{x^2 - 1}$ функцияның туындысын тауып көрейік. Алдымен біз тангенстің туындысын тауып, сонан кейін оны аргументтің туындысына көбейтеміз. Сонда

$$y' = \frac{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)'}{cos^2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{(x^2 - 1)'}{2\sqrt{x^2 - 1 \cos^2 \sqrt{x^2 - 1}}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1\ \cos^2 \sqrt{x^2 - 1}}}$$

2. Енді *y=f[φ(x)]* күрделі функцияның дифференциалын есептеп шығарайық. Функциялар *y=f(u)* және *u=φ(x)* (1-пункттегі шарттарды қанағаттандырады деп есептейміз Дифференциалдың анықтамасы бойынша

$$d\,y = y'_x d\,x$$

Ал (12) формула бойынша $y'_x = y'_u u'_x = f'(u)\varphi'(x)$. Ендеше

$$d\,y = f'(u)\varphi'(x)dx.$$

Кейінгі теңдіктегі $\varphi'(x)dx$ мына $u = \varphi(x)$ функцияның дифференциалы, яғни $dy = \varphi'(x)dx$.

Демек,

$$dy = f'(u)du.$$

Күрделі функцияның дифференциалын өрнектейтін формуланың сыртқы пішіні жай функцияның дифференциалын өрнектейтін (12) формуланың сыртқы пішінімен бірдей болды. Сонымен, дифференциалды өрнектейтін формула аргументтің қалай сайланып алуына тәуелді емес. Функция дифференциалының осы қасиетін *дифференциалдың инварианттығы* деп атайды.

Мысал келтірейік.

Мына $y = sin^3x$ функцияның дифференциалын табу керек. Ол үшін бұл функцияны күрделі деп қарап, алдымен оның туындысын табамыз да, сонан кейін оны аргументтің дифференциалына көбейтеміз. Сонда

$$dy = 3\sin^2 x \cos x\, d\, x.$$

## §5. Кері функцияның туындысы

1. *f(x)* және *ψ(x)* өзара кері функциялар болсын. Бірінің туындысын біліп, екіншісінің туындысын табу керек. Мәселен, *f(x)* функцияның туындысын біліп, *φ(x)*-тің туындысын іздейік.

Өзара кері функциялардың анықтамасы бойынша

$$f[\psi(x)] = x.$$

Осы кейінгі теңбе-теңдіктің сол жағын күрделі функция деп қарап, оны *x* бойынша дифференциалдайық. Сонда

$$f'[\psi(x)]\psi'(x) = 1,$$

бұл арадан

$$\psi'(x) = \frac{1}{f'[\psi(x)]}. \tag{13}$$

*Сонымен, кері функцияның туындысы тура функция туындысының кері шамасына тең.*

(13) формуланы екінші түрде де жазуға болады. Егер тура функция мынадай сәйкестік *y=f(x)* заңмен берілсе, онда оған кері функция *x=ψ(y)* болады. Ал бұл кері функция көпмәнді болуы мүмкін, сондықтан оның бір тармағын ғана қараймыз.

*x=ψ(y)* көпмәнді функцияның бір тармағы деп қарап, оның *y* бойынша дифференциалын табамыз. Сонда

$$dx = \psi'(y)dy,$$

бұл арадан

$$\frac{dx}{dy} = \psi'(y).$$

Егер $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ болса, онда кері функцияның туындысын табу ережесі мына түрде жазылады:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\psi'(y)}. \qquad (13^1)$$

Енді осы ($13^1$) формуланы пайдаланып, кері тригонометриялық функциялардың туындыларын табайық.

1) $y=\arcsin x$-тің туындысын табу керек. Бұған кері функция болады: $x=\sin y$. Мұның туындысы

$$\frac{dx}{dy}=\cos y.$$

(13) формула бойынша

$$y'=(arc\sin x)'=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Сонымен,

$$(arc\sin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) $y=arc\cos x$, бұған кері функция болады: $x=\cos y$, кейінгі функцияның туындысы болады:

$$\frac{dx}{dy}=-\sin y.$$

Ендеше

$$y'=(arc\cos x)'=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Сонымен,

$$(arc\cos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Осы табылған екі формуладағы квадрат түбірдің алдына плюс таңбасын алу керек, өйткені біз arcsin $x$ пен arccos$x$-тің басты мәнін алып отырмыз.

3) $y=arctg\,x$-тің туындысын табу керек. Бұл функцияға кері функция $x=tg\,y$ болады. Осы кейінгі функцияның туындысы: $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cos^2 y}$. Ендеше

$$\frac{dy}{dx}=(arc\,\mathrm{tg}\,x)'=\cos^2 y=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Сонымен,

$$(arc\,\mathrm{tg}\,x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

4) $y=arcctgx$. Бұл функцияның туындысы болады:

$$(arc\,\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Бұл қаралған функциялардың дифференциалдары

$$d\,arc\sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad d\,arc\,\mathrm{tg}\,x = \frac{dx}{1+x^2},$$

$$d\,arc\ \cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad d\,arc\,\mathrm{ctg}\,x = -\frac{dx}{1+x^2}$$

болады.

2) Енді осы табылған барлық формулаларды реттеп, бір системаға келтіріп жазайық:

1) $(u^a)' = \alpha u^{a-1}u'$.

2) $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

3) $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

4) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ .

5) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

6) $(\mathrm{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.

7) $(\mathrm{ctg}\,u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.

8) $(a^u)' = a^u\,\ln u \cdot u'$.

9) $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

10) $(lg_a u)' = \frac{lg_{\alpha e}}{u} \cdot u'$.

11) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

12) $(arc\sin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

13) $(arc\cos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

14) $(arc\,\mathrm{tg}\,u)' = \frac{u'}{1+u^2}$.

15) $(arc\,\mathrm{ctg}\,u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

Келтірілген формулалар жинағын элементар функциялар туындыларының таблицасы деп атайды. Бұл формулалардың барлығын жатқа білу керек.

## § 6. Функцияларды дифференциалдау ережелері

*Берілген функцияның туындысын немесе дифференциалын табуды оны дифференциалдау деп атайды.*

*1) Тұрақты шаманың туындысы және дифференциалы нольге тең.*

Айталық, $y = c = \mathrm{con}\,st$. Туындыны табу ережесі бойынша аргументке кез келген өсімшені беріп, функцияның оған сәйкес өсімшесін табатынбыз. Ал қарастырылып отырған функция ылғи бір тұрақты санды ғана қабылдайды, сондықтан оның өсімшесі $\Delta y$ нольге тең. Олай болса,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0.$$

Сонымен, $(c)'=0$ және

$$dc=0$$

*2) Әрбір тұрақты санды туынды таңбасының сыртына шығаруға және оның ішіне енгізуге болады.*

$y=cf(x)$ функцияны қарайық, мұнда $c$ − тұрақты сан. Туындының анықтамасы бойынша

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}c\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=c\lim_{\Delta x\to 0}\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=c\cdot f'(x)$$

*3) Саны шектеулі, дифференциалданатын функциялардың алгебралық қосындысының туындысы жеке қосылғыш функциялардың туындыларының қосындысына тең.*

Дифференциалданатын үш $u=f(x)$, $\upsilon=\psi(x)$, $\omega=\varphi(x)$ функцияларды қарайық. Бұл үш функцияның қосындысын $y$ арқылы белгілейік:

$$y=u+\upsilon-\omega$$

Енді аргумент $x$-ке еркімізше $\Delta x$ өсімшені беріп, функцияның оған сәйкес $\Delta y$ өсімшесін табамыз:

$$\Delta y=(u+\Delta u)+(\upsilon+\Delta\upsilon)-(\omega+\Delta\omega)-u-\upsilon+\omega=\Delta u+\Delta\upsilon-\Delta\omega.$$

Кейінгі теңдіктің екі жағын $\Delta x$-ке бөліп, сонан кейін оны нольге ұмтылтып, шекке көшсек, сонда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}$$

немесе

$$y'=u'+\upsilon'-\omega',\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{d\upsilon}{dx}-\frac{dw}{dx}. \tag{14}$$

Ал

$$d(u+\upsilon-\omega)=du+d\upsilon-d\omega.$$

4) Енді дифференциалданатын $u=f(x),\upsilon=\psi(x)$ екі функцияның көбейтіндісін қарайық: $y=u\cdot\upsilon$. Бұл көбейтіндінің туындысы жөніндегі ережені былай тұжырымдауға болады:

*Дифференциалданатын екі функцияның көбейтіндісінің туындысы тең бірінші көбейткіш функцияның туындысы, көбейтілген екінші функцияға плюс бірінші функция көбейтілген екінші функцияның туындысына, яғни*

$$(u\upsilon)'=u'\upsilon+u\upsilon'. \tag{15}$$

Аргумент $x$-ке кез келген $\Delta x$ өсімшені беріп, функцияны оған сәйкес $\Delta y$ өсімшесін табамыз:

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v.$$

Кейінгі теңдіктің екі жағын $\Delta x$-ке бөліп, онан кейін оны нольге ұмтылтып, табамыз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Немесе

$$y' = u'v + uv'.$$

Ал

$$d(u\,v) = v\,d\,u + u\,d\,v.$$

5) Енді дифференциалданатын $u = f(x),\ v = \psi(x)$ екі функцияның бөліндісін (бөлшекті) қарайық: $y = \frac{u}{v}$, мұнда функция $v = \psi(x)$ $x$-тің ешқандай мәнінде нольге айналмайды. Бөліндіні дифференциалдау жөнінде ережені былай тұжырымдауға болады:

*Бөліндінің (бөлшектің) туындысы тең бөлінгіш функцияның туындысы көбейтілген бөлгіш функцияға минус бөлінгіш функция көбейтілген бөлгіш функцияның туындысына және осының барлығы бөлінген бөлгіш функцияның квадратына,* яғни

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv\prime}{v^2} \qquad (16)$$

Аргумент $x$-ке $\Delta x$ өсімшені беріп, функцияның оған сәйкес $\Delta y$ өсімшесін табамыз:

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

Осы теңдіктің екі жағын $\Delta x$-ке бөліп, сонан соң оны нольге ұмтылтып, табамыз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)}$$

бұл арадан

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Мысал келтірейік:

Мына $y = \frac{x(2 + \cos x)}{\sin x}$ функцияның туындысын табу керек.

Бұл функцияның өзі бөлшек, алымы екі функцияның көбейтіндісі. Сондықтан осы функцияның туындысын табу үшін (15) және (16) формулаларды қолданамыз. Сонда

$$y' = \frac{[(x)'(2+\cos x) + x(2+\cos x)'] \cdot \sin x - x(2+\cos x)(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{(2+\cos x - x\sin x)\sin x - x(2+\cos x)\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{(2+\cos x)\sin x - x\sin^2 x - x(2+\cos x)\cos x}{\sin^2 x};$$

$$y' = \frac{(2+\cos x)(\sin x - x\cos x) - x\sin^2 x}{\sin^2 x}.$$

Бұл ережелерге сүйеніп, гиперболалық функциялардың да туындылары мен дифференциалдарын табуға болады. Енді соған тоқталайық.

$y = shu$, яғни $y = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$ функцияны дифференциалдайық. $y' = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})u'$ немесе $y' = chu \cdot u'$. Демек, $(shu)' = chu \cdot u'$ және $d(shu) = chudu$. $y = chu$, яғни $y = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$ функцияны дифференциалдағанда $y' = \frac{1}{2}(e^u - e^u)u'$ немесе $y' = shu \cdot u'$ шығады. Олай болса, $(chu)' = shu \cdot u'$ және $d(chu) = shu \cdot du$. Осы сияқты $(thu)' = \frac{u'}{ch^2u}$, $d(thu) = \frac{du}{ch^2u}$ және $(cthu)' = -\frac{u'}{sh^2u}, d(cthu) = -\frac{du}{sh^2u}$ қатыстарын да дәлелдеуге болады.

Бұл формулаларды осы тараудың бесінші параграфында келтірілген туындылар таблицасының жалғасы деп санап, еске сақтау керек. Сонда таблицаның аяғы мынадай болады:

16. $(shu)' = chu \cdot u'$.
17) $(chu)' = shu \cdot u'$.
18) $(thu)' = \frac{u'}{ch^2u}$.
19) $(cthu)' = -\frac{u'}{sh^2u}$.

Әрине, бұларды туындының анықтамасына сүйеніп, тікелей де қорытып шығаруға болады.

## §7. Оң және сол туындылар

1. *(a, b)* аралығында анықталған және осы аралықта үздіксіз *y = f(x)* функцияны қарайық.

Егер *(а,в)* аралығының бір нүктесінде, мәселен $x_0$ нүктесінде қаралып отырған туындысы шексіздікке айналса, онда бұл нүктеде функцияның туындысы жоқ екен деп түсінбеу керек. Бұл жағдай *y=f(x)* функцияны кескіндейтін қисықтың *M* [$x_0$, $f(x_0)$] нүктесінде оған жүргізілген жанаманың *OX* осіне перпендикуляр екендігін сипаттайды.

*(a, b)* аралығының белгілі бір $x_1$ нүктесінде функцияның туындысы болмаса, онда осы функцияны кескіндейтін қисықтың *M*[$x_1$, $f(x_1)$] нүктесінде оның тиянақты жанамасы жоқ деп түсіну керек.

Аралықтың $x_0$ нүктесіндегі *y = f(x)* функцияның туындысы деп біз мына шекті

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(f_0)}{\Delta x} \qquad (6)$$

түсінеміз. Жалпы алғанда, бұл шек өсімше *Δx*-тің нольге қалай ұмтылуына тәуелді.

Егер өсімше *Δx* нольге оның оң жағынан ұмтылғанда, (6) шек бір тиянақты санға тең болса, онда осы санды *y=f(x)* функцияның $x_0$ нүктесіндегі оң жақты немесе қысқаша оң туындысы деп атайды және оны былай белгілейді: $y'+=f'+(x_0)$ Сонымен,

$$\lim_{x\to\ +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'+(x_0)=y'+.$$

Егер өсімше *Δx* нольге оның сол жағынан ұмтылғанда (6) шек бір тиянақты санға ұмтылса, онда осы санды *y=f(x)* функцияның нүктесіндегі сол жақты немесе сол туындысы деп атайды және оны былай белгілейді: $y'-f'-(x_0)$. Сонымен,

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'-(x_0)=y'-.$$

Егер оң туынды мен сол туынды бір-біріне тең болса, онда *y=f(x)* функцияның $x_0$ нуктесінде 2-§ та берілген анықтама мағынасында туындысы бар, яғни

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0).$$

Мысал келтірейік:

Мына $f(x)=|x|$ функцияның *x=0* нүктесіндегі туындысын табу керек. Бұл функцияны екі теңдік арқылы былай жазуға болады:

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{егер} \quad x>0 \quad \text{болса,} \\ -x, & \text{егер} \quad x<0 \quad \text{болса.}\end{cases}$$

Бұл арадан

$$f'_{+}(0) = +1, \qquad f'_{-}(0) = -1.$$

Немесе бұл туындыларды былай табуға болады:

$$f'_{+}(0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1; \ f'_{-}(0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1.$$

Сонымен, мысал үшін алынып отырған $y=|x|$ функцияның $x=0$ нүктесінде тиянақты туындысы жоқ.

Енді жаңағы айтылған туындыларға геометриялық көзқараспен қарайық.

Қатынас $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ екі шекке ұмтылатын болғандықтан, *y=f(x)* функцияны кескіндейтін қисыққа жүргізілген қиюшының екі шектік жағдайы болады. Олай болса, бұл қисықтың $M_0[x_0, f(x_0)]$ нүктесінде екі жанама бар: оң және сол жанама. Оң жанама мен *OX* осінің оң бағытының арасындағы бұрышты $\beta$ арқылы, ал сол жанама мен *OX* осінің оң бағытының арасындағы бұрышты $\alpha$ арқылы белгілесек, онда

$$f'_{+}(x_0) = \mathrm{tg}\,\beta, \ f'_{-}(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha.$$

$\alpha$ мен $\beta$ әр түрлі болғандықтан, $\mathrm{tg}\,\alpha \neq \mathrm{tg}\,\beta$.

Тағы да бір мысал келтірейік: мына $y = f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ функцияның $x=0$ нүктесіндегі туындысын табайық. Бұл функцияның анықталу облысы сегмент $[-1, +1]$. Анықтама бойынша $x$ нүктесіндегі беріліп отырған функцияның туындысы

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}} - \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}{\Delta x}$$

болады. Ал $x = 0$ нүктесіндегі функцияның туындысы

$$\Delta'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-\Delta x^2}}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-fx^2}} \cdot \sqrt{1+\sqrt{1-fx^2}}}{\Delta x\sqrt{1+\sqrt{1-\Delta x^2}}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x\sqrt{1+\sqrt{1-\Delta x^2}}}.$$

болады. Квадрат түбірдің арифметикалық мәнін қарайық. Сонда $\sqrt{(\Delta x)^2} = \Delta x$, егер $\Delta x > 0$ болса, $\sqrt{(\Delta x)^2} = \Delta x$, егер $\Delta x < 0$ болса.

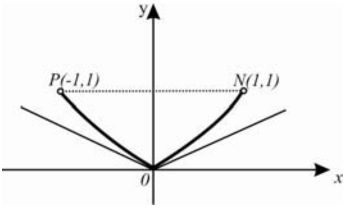
Сонымен, егер $\Delta x > 0$ болса, онда

$$f'_{+}(0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x\sqrt{1+\sqrt{1-\Delta x^2}}} = +\frac{1}{\sqrt{2}},$$

ал егер $\Delta x < 0$ болса, онда

$$f'_{-}(0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x\sqrt{1+\sqrt{1-\Delta x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Сөйтіп, мысал үшін алынып отырған $y = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ функцияның *x=0* нүктесінде туындысы жоқ. Демек, бұл функцияны кескіндейтін қисықтың (0,0) нүктесінде тиянақты жанамасы жоқ (43-чертёж).



43-чертёж

**2.** Өсімше *Δx* нольге оның қай жағынан ұмтылса да мына $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ қатынастың ешқандай шегі болмайтын жағдай да болу мүмкін. Онда *y=f(x)* функцияның *x₀* нүктесінде оң да, теріс те тіпті ешқандай туындысы жоқ. Мәселен, мына функцияның

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{егер } x \neq 0, \\ 0, & \text{егер } x = 0 \end{cases} \text{ болса,}$$

$x$=0 нүктесіндегі туындысын табайық. Ол үшін функцияның *x=0* нүктесіндегі өсімшесін құраймыз:

$$\Delta y = f(\Delta x) - f(0) = \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x},$$

бұл арадан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin\frac{1}{\Delta x}; \quad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{1}{\Delta x}.$$

*Δx* нольге ұмтылғанда, $\sin\frac{1}{\Delta x}$ ешқандай шекке ұмтылмайды. Ендеше мысал үшін алынып отырған функцияның *x=0* нүктесінде ешқандай туындысы жоқ. Бұл функцияның графигі 34-чертёжде көрсетілген. Сонымен, бұл қисықтың (0,0) нүктесінде ешқандай жанамасы жоқ.

3. Енді бір ескертіп кететін мәселе мынау: берілген үздіксіз *f(x)* функцияның туындысының үздіксіз болмауы мүмкін. Мысал үшін келесі функцияны қарайық:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}. & \text{егер} \quad x\neq 0 \text{ болса,}\\ 0, & \text{егер} \quad x=0 \text{ болса.}\end{cases}$$

Алдымен бұл функцияның нольден айрықша нүктелердегі туындысын табайық:

$$f'(x)=2x\sin\tfrac{1}{x}-\cos\tfrac{1}{x},\ \text{егер}\ \ x\neq 0.$$

Енді $x=0$ нүктесіндегі туындыны табайық:

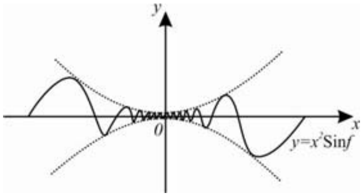
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Сөйтіп, зерттелініп отырған функцияның $x$-тің барлық мәндерінде де туындысы болатын болды.

Енді $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ туындының $x$ нольге ұмтылғандағы шегін табайық:

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=2\lim x\sin\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}.$$

Екінші қосылғыштың тиянақты шегі жоқ, сондықтан да $f'(x)$ туындының тиянақты шегі жоқ. Олай болса $f'(x)$ туындысы $x=0$ нүктесінде үзілісті (44-чертёж) және үзіліс екінші тектес.



44-чертёж

Бұл мысалдан мынадай қорытындыға келеміз: *үздіксіз функцияның туындысы үзілісті болуы мүмкін.*

## §8. Жоғары ретті туындылар

1. Шектеулі $y'=f'(x)$ туындысы бар $y=f(x)$ функцияны қарайық. Бұл $y'=f'(x)$ туындының өзі тәуелсіз айнымалы $x$-тің функциясы болып табылады, сондықтан одан тағы да $x$ бойынша туынды алуға болады. Сонда

$$(y')'=[f'(x)]'=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right).$$

Әдетте, бұл былай жазылады:

$$y''=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

Бірінші туындының туындысын екінші ретті туынды, немесе былайша айтқанда, *y=f(x)* функцияның екінші туындысы дейді. (Кейінгі символдар былай оқылады: «игрек екі штрих», «эф екі штрих $x$-тен, «дэ екі $y$ дэ икс квадрат бойынша» «дэ екі эф $x$-тен дэ икс квадрат бойынша».)

Екінші ретті туындының өзі тәуелсіз айнымалы $x$-тің функциясы болып табылады. Одан тағы да $x$ бойынша туынды алып *y-f*(x) функцияның үшінші ретті туындысын табамыз және ол былай белгіленеді:

$$(y")' = [f"(x)]' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)$$

немесе

$$y^{III} = f^{III}(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3f(x)}{dx^3}.$$

одан әрі қарай төртінші, бесінші... $n$-ші туындыларын табуға болады және олар былай белгіленеді:

$$y^{IV} = f^{IV}(x) = \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^4f(x)}{dx^4},$$

$$y^{V} = f^{V}(x) = \frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d^5f(x)}{dx^5},$$

$$y^{VI} = f^{VI}(x) = \frac{d^6y}{dx^6} = \frac{d^6f(x)}{dx^6},$$

… … … … … … … … … … … … … ….

… … … … … … … … … … … … … …

$$y^{n} = f^{n}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

Енді осы жазылған формулалардан *y=f(x)* функцияның жоғары ретті (екінші, үшінші,..., $n$-ші) дифференциалдарын бірден жазуға болады, бірақ оларды бұл арадан таппай, басқа жолмен іздеуді көрсетейік. *y=f(x)* функцияның бірінші ретті дифференциалы мынадай болатын:

$$dy = f'(x)dx.$$

Бұдан тағы да дифференциал алуға болады, оны функцияның екінші ретті немесе екінші дифференциалы деп атайды және оны былай белгілейді:

$$d(dy) = d^2y$$

(бұл символ «дэ екі игрек» делініп оқылады).

$$d^2y = [f'(x)dx]'dx = f''(x)dx^2,$$

өйткені квадрат жақшалардың ішіндегі көбейткіш *dx* тұрақты шама есебінде қаралады. Міне, дәл осы сияқты үшінші, төртінші,..., *n*-ші ретті дифференциалдарды да табуға болады:

$$d(d^2y) = d^3y = [f"(x)dx^2]'dx = f^{III}(x)dx^3,$$

$$d(d^3y) = d^4y = [f^{III}(x)dx^3]'dx = f^{IV}(x)dx^4,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$d(d^{n-1}y) = d^ny = \left[f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}\right]' = f^{(n)}(x)dx^n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Мысалдар келтірейік:

1) Мына $y=sin\ x$ функцияның *n*-ші ретті туындысын табу керек. Бұл функцияның туындыларын біртіндеп табамыз:

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y" = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{III} = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^n = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

2) Мына $y = \cos x$ функцияның *n*-ші ретті туындысын табу керек. Бұл функцияның туындыларын да біртіндеп табамыз:

$$y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\cos x = \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = \sin x = \cos\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^n = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

3) Мына $y=e^{кх}$ функцияның *n*-ші туындысын табу керек, мұнда $k$ − тұрақты сан.

$$y' = ke^{кх}, y'' = k^2e^{кх}, \qquad y''' = k^3e^{кх}, \dots y^{(n)=k^ne^{кх}.}$$

**2.** Әрқайсысының *n*-ші ретті туындылары бар $u=f(x)$, $\upsilon=\psi(x)$ екі функцияның көбейтіндісін қарайық:

$$y = u\,\upsilon.$$

Мәселе, осы көбейтіндінің *n*-ші ретті туындысын табуда. Бұл көбейтіндінің туындыларын біртіндеп табамыз:

$$y' = u'\upsilon + u\,\upsilon',$$

$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + u\,v''=\mathrm{u}\,v'' + 2u'v' + uv",$$
$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + u\,v''',$$
$$y^{IV} = u^{IV}v + 4u^{III}v^{I} + 6u^{II}v^{II} + 4u^{I}v^{III} + v^{IV}$$

Міне, осы табылған өрнектерден коэффициенттердің құрылысы және көбейткіш функциялар туындыларының реттері жөнінде заңдылықты байқаймыз. Ол заңдылық мынадай: коэффициенттер биномдық коэффициенттер сияқты, бірінші *u* көбейткіш функциясының туындыларының реті *n*-нен нольге дейін кемиді де, ал екінші *v* көбейткіш функцияның туындыларының реті нольден *n*-ге дейін өсіп отырады. Осы заңдылыққа сүйене отырып, *uv* көбейтіндінің *n*-ші ретті туындысын табуға болады:

$$(uv)^{(n)} = (u)^{(n)}v + nu^{(n-1)}v + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v" +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^{(n-3)}v''' + \cdots + uv^{(n)}, \qquad (17)$$

Бұл қорытылып шыққан (17) формуланы Лейбниц формуласы деп атайды.

Мысал келтірейік: $y = x^2 \cos 3x$ функцияның төртінші ретті туындысын табу керек. Ол үшін Лейбниц формуласын қолданамыз. Сонда

$$y^{IV} = (\cos 3x)^{IV}x^2 + 4(\cos 3x)^{III}(x^2)' + 6(\cos 3x)^{II}(x^2)^{II} +$$
$$+4(\cos 3x)^{I}(x^2)^{III} + \cos 3x(x^2)^{IV}.$$

Немесе

$$y^{IV} = 3^4x^2\cos\left(3x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right) + 4\cdot 3^3\cos\left(3x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2x +$$
$$+6\cdot 3^2\cos\left(3x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2 = 81x^2\cos 3x + 216x\sin 3x -$$
$$-108\cos 3x = (81x^2 - 108)\cos 3x + 216x\sin 3x.$$

3. Енді параметрлік түрде берілген функциялардың туындыларын қалай табуды көрсетейік.

Айталық, *x* пен *y* параметр *t* арқылы өрнектелсін:

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t), \qquad (a \le t \le \beta).$$

$\varphi(t), \psi(t) - (\alpha, \beta)$ аралығында бірнеше рет дифференциалданатын функциялар болсын.

Мәселе $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{d^3x}, \ldots$ туындыларды табуда. Берілген теңдеулерден табамыз:

$$dx = \varphi'(t)dt,$$

$$dy = \psi'(t)dt,$$

бұл арадан

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Ал

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dt}{dx}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right] = \frac{1}{\varphi'(t)}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right].$$

Осы кейінгі теңдіктің оң жағындағы туындыны бөлшектің туындысы деп қарап табамыз:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varphi'(t)}\cdot\frac{\psi''(\mathrm{t})\varphi'(\mathrm{t})\text{-}\psi'(\mathrm{t})\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} \qquad (18)$$

Мысал келтірейік: $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t.$

Екінші ретті $\frac{d^2y}{dx^2}$ туындыны табу керек. Ол үшін (18) формуланы қолданамыз. Алдымен осы формуладағы туындыларды жеке-жеке тауып алайық:

$$\frac{dx}{dt} = -3a\ \cos^2 t\sin t;\ \frac{dy}{dt} = 3b\sin^2 t\cos t;$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3a\cos t(2\sin^2 t - \cos^2 t);\ \frac{d^2y}{dt^2} = 3b\sin t(2\cos^2 t - \sin^2 t)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3a\cos^2 t\sin t\cdot 3b\sin t\left(2\cos^2 t - \sin^2 t\right) - 3b\sin^2 t\cos t\cdot 3a\cos t(2\sin^2 t - \cos^2 t)}{(-3a\cos^2 t\sin t)^3}$$

Ықшамдалғаннан кейін мынадай болады:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b}{3a^2\cos^4 t\sin t}.$$

### ***Жаттығулар***

Төмендегі функциялардың туындыларын табыңдар:

1. $y = -\frac{2}{3}\operatorname{ctg} x - \frac{\cos x}{3\sin^3 x} + ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}};$ Жауабы: $y' = \frac{1+\sin^3 x}{\sin^4 x}.$

2. $y = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$ Жауабы: $y' = \frac{1}{\cos^3 x}.$

3. $y = ln\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}} + 2arc\operatorname{tg}(x-1).$ Жауабы: $y' = \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+4x-2}.$

4. $y = \frac{1}{2}ln\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x+\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}} + \frac{1}{2}arc\operatorname{tg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{1-\operatorname{tg} x}.$ Жауабы: $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}.$

5. $y = -\frac{5}{3} arc\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{9\cos^2 x - 1}}{3\sin x} + arc\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{9\cos^2 x - 1}}{\sin x} - \frac{\sin x}{2}\sqrt{9\cos^2 x - 1}$.

Жауабы: $y' = \frac{\sin^2 x}{\cos x}\sqrt{9\cos^2 x - 1}$.

6. $y = ln\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} arc\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}{x+1}$.

Жауабы: $y' = \frac{2x+3}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$

7. $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} arc\,\mathrm{tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

Жауабы: $y' = \frac{1}{1+x^4}$.

8. $y = \frac{(\mathrm{tg}^2 x-1)(\mathrm{tg}^4 x+10\,\mathrm{tg}^2 x+1)}{3\,\mathrm{tg}^3 x}$. Жауабы: $y' = \frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}$.

9. $y = ln\frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,x-1}}{\sqrt[6]{\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}\,x+1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} arc\,\mathrm{tg}\frac{2\,\mathrm{tg}\,x+1}{\sqrt{3}}$. Жауабы: $y' = \frac{\cos x}{\sin^3 x-\cos^3 x}$.

10. $y = \frac{1}{8}\left(\frac{5}{\cos x} - \frac{2}{\cos^3 x}\right) + \frac{5}{8} ln\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$. Жауабы: $y' = \frac{\cos 2x}{\cos^5 x}$.

11. $y = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$. Жауабы: $y' = \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}$.

12. $y = \frac{x}{2}(\sin\ln x + \cos ln\, x)$. Жауабы: $y' = \cos ln\, x$.

13. $y = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$. Жауабы: $y' = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$.

14. Мына $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{егер} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{егер} \quad x = 0 \text{ болса,} \end{cases}$

функцияның $x = 0$ нүктесінде тиянақты туындысы жоқ екенін дәлелдеңдер.

15. $y = \frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}^2 x}+1}{\sqrt{\sqrt[3]{\mathrm{tg}^4 x}-\sqrt[3]{\mathrm{tg}^2 x}+1}} + \frac{\sqrt{3}}{2} arc\,\mathrm{tg}\frac{2\sqrt[3]{\mathrm{tg}^2 x}-1}{\sqrt{3}}$. Жауабы: $y' = \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,x}}$.

16. $y = \frac{1}{2\sqrt{2}} ln\frac{\cos x-\sin x+\sqrt{2}}{\sin x+\cos x} - \frac{\cos 2x}{2(\sin x+\cos x)}$. Жауабы: $y' = \frac{\sin x}{1+\mathrm{tg}\,x}$.

17. $y = \sin x\cos^2 x, y^{IV}$? Жауабы: $y^{IV} = \frac{81\sin 3x+\sin x}{4}$.

18. $y = \frac{ln(1+x)}{1+x}$; $y^{(n)}$? Жауабы: $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

19. $x = k\sin t + \sin kt, y = k\cos t + \cos kt$; $\frac{d^2 y}{dx^2}$?

20. Келесі параметрлік теңдеулер

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$$

берілген қисыққа жанау нүктесі параметр $t$-нің мына $\frac{\pi}{2}$ мәніне сәйкес келетіндей етіп жанама жүргізу керек.

Жауабы: $y - a = x - a(\frac{\pi}{2} - 1)$

# V ТАРАУ
# ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНАТЫН ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ НЕГІЗГІ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ЗЕРТТЕУ

## § 1. Ферма мен Ролль теоремалары

**1.** $(a,b)$ аралығында анықталған $y=f(x)$ функцияны қарайық. Келешекте керек болатын мына теореманы дәлелдейік.

**Теорема.** *Егер $f(x)$ функция $x_0$ нүктесінде дифференциалданатын болса, онда ол үздіксіз болады.* Функция $f(x)$ $x_0$ нүктесінде дифференциалданатын болғандықтан, оның осы нүктедегі өсімшесі $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ былай өрнектелетіні

$$\Delta y = f(x_o+\Delta x) - f(x_o) = f'(x_o)\Delta x + a\Delta x$$

белгілі.

Егер $\Delta x$ нольге ұмтылса, онда $\Delta y$ те нольге ұмтылады, ендеше $y=f(x)$ функция $x_0$ нүктесінде үздіксіз. Теорема дәлелденді.

**Ферма теоремасы.** *Егер $[a,\ b]$ сегментінің әрбір ішкі нүктесінде дифференциалданатын функция $f(x)$ осы сегменттің бір ішкі $\xi$ нүктесінде өзінің ең үлкен немесе ең кіші мәнін қабылдаса, онда оның бұл нүктедегі туындысы нольге тең, яғни*

$$f'(\xi) = 0.$$

Теореманың шарты бойынша $f(\xi)$ − функцияның $[a,\ b]$ сегментінде қабылдайтын мәндерінің ішіндегі ең үлкені немесе ең кішісі. Айталық, ең үлкені болсын. Аргумент $x$-ке $\xi$ нүктесінде $\Delta x$ өсімше берейік, бұл $\Delta x$ өсімше өте аз, $\xi+\Delta x[a,\ b]$ сегментінің ішінде жататындай болсын. Өсімше $\Delta x$-тің абсолют шамасын $h$ арқылы белгілейік, яғни $h=|\Delta x|$. $f(\xi)$ − функцияның ең үлкен мәні болғандықтан, келесі теңсіздіктер

$$f(\xi+h) - f(\xi) \leq 0,$$
$$f(\xi-h) - f(\xi) \leq 0$$

орын алады. Бірінші теңсіздіктің екі жағын $h$-қа, екінші теңсіздіктің екі жағын − $h$-қа бөліп, онан $h$-ты нольге ұмтылтып, шекке көшеміз. Сонда:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \leq 0, \qquad (1)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi-h)f(\xi)}{-h} \leq 0. \qquad (2)$$

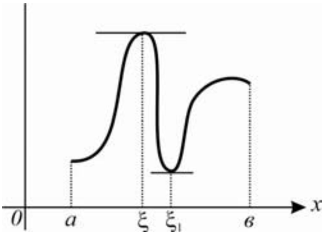
*f(x)* функциясы *[a, b]* сегментінің барлық ішкі нүктелерінде дифференциалданатын функция болғандықтан, (1) және (2) теңсіздіктердің сол жағында тұрған шектер бір санға тең, яғни

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}=f'(\xi),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi-h)-f(\xi)}{-h}=f'(\xi).$$

Олай болса (1) және (2) теңсіздіктерден мынадай қорытындыға келеміз: $0 \le f'(\xi) \le 0$. Бұдан $f'(\xi)=0$.

Егер $\xi$ нүктесінде функция *f(x)* ең кіші мәнді қабылдаса, онда да теорема дәл осылай дәлелденеді. Ферма теоремасы дәлелденді.



45-чертёж

Ферма теоремасына мынадай геометриялық мағына беруге болады: егер *f(x) функцияны кескіндейтін қисықтың әрбір нүктесінде тиянақты жанама болса, онда сол қисыққа жүргізілетін жанамалардың ішінен мына* $[\xi, f(\xi)]$ *нүкте арқылы өтетін жанама OX осіне параллель болады* (45-чертёж).

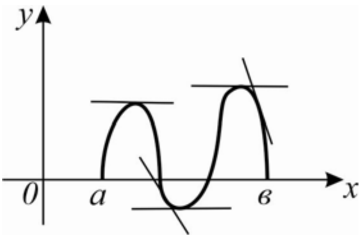
**2.** [a, b] сегментінде анықталған *y=f(x)* функцияны қарайық. Осы функцияны нольге айналдыратын *[a, b]* сегментінің бойында жатқан *x*-тің мәнін функцияның нолі немесе түбірі деп атайды.

**Ролль теоремасы.** *[a, b] сегментінде үздіксіз f(x) функция осы сегменттің барлық ішкі нүктелерінде дифференциалданатын болса, онда бұл функцияның әрбір екі нолінің арасында оның туындысының ең болмағанда бір нолі жатады.*

Енді теореманың дәлелдеуіне келейік. Айталық, сегменттің *a* және *b* ұштары *f(x)* функцияның нольдері болсын. Онда *a* мен *b*-нің арасында жатқан, ең болмағанда бір $\xi$ нүктесі бар екендігін $(a < \xi \angle b)$ және осы $\xi$ нүктесіндегі *f(x)* функцияның туындысы *f'(x)* нольге айналатындығын, яғни *f'(ξ)*=0 болатындығын дәлелдеуіміз керек.

Теореманың шарттары бойынша *f(x)* функция *[a, b]* сегментінде үздіксіз. Олай болса, бұл функцияның осы сегментте ең үлкен мәні *M,* ең кіші мәні *m* бар. Вейерштрастың екінші теоремасы бойынша *f(x)* функция бұл мәндерді қабылдауға тиіс.

Айталық, $[a, b]$ сегментінің бойында жатқан бір $\xi$ нүктесінде функция $f(x)$ жаңағы $M$ санын қабылдайтын болсын. Онда функция $f(x)$ Ферма теоремасының шарттарын толығымен қанағаттандырады. Сондықтан $f'(\xi)=0$. Ролль теоремасы дәлелденді.



46-чертёж

Енді Ролль теоремасының геометриялық мағынасына тоқтайық. Егер берілген $y=f(x)$ функцияны кескіндейтін, ұштары $(a,$ 0) және ($b$, 0) нүктелерінде $OX$ осін қиятын қисық доғасының әрбір нүктесінде тиянақты жанама болса, онда осы доғаның бойында жатқан, ең болмағанда бір $(\xi,f(\xi))$ нүктесі табылады және бұл нүктедегі доғаға жүргізілген жанама $OX$ осіне параллель болады (46-чертёж).

Ролль теоремасы жөнінде бір ескертіп кететін мәселе мынау: Ролль теоремасы $f'(x)$ туындыны нольге айналдыратын, $[a, b]$ сегментінің бойында ең болмағанда бір $\xi$ нүктесінің барлығын дәлелдейді. Шынында, мұндай нүктелер жалғыз емес, бірнеше тіпті, айта берсе, шексіз көп болуы мүмкін.

Ролль теоремасындағы $f'(x)$ туынысы нольге айналатын, әрбір ішкі нүктесінде *дифференциалданатын $f(x)$ функция* деген шарт өте маңызды шарт, өйткені теореманың басқа шарттары орындалып, тек осы айтылып отырған шарт орындалмаса, онда теореманың тіпті дұрыс болмай қалуы мүмкін.

Ролль теоремасы $f(x)$ туындыны нольге айналдыратын, $[a, b]$ сегментінің ішінде жатқан $\xi$ нүктесінің болатындығын тағайындайды да, бірақ оның қандай нүкте екенін көрсетпейді. Кейбір функциялар үшін бұл нүктелердің қалай екенін білуге болады. Мәселен, мына функцияларды қарайық:

а) $[0, 2\pi]$ сегментінде анықталған $y=\sin x$ функцияны алайық, $f(0) = f(2\pi) = 0$. Бұл функцияның туындысы

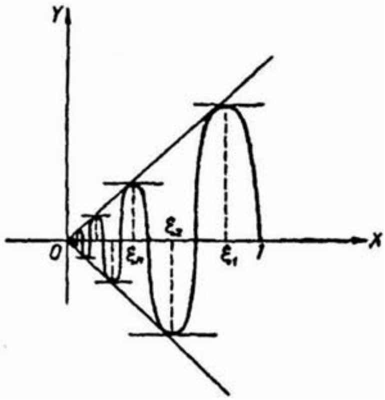
$$f'(x) = \cos x.$$

Мына $\xi_1 = \frac{\pi}{2}, \xi_2 = \frac{3}{2}\pi$ нүктелерде $\cos x$ нольге айналады.

б) [0, 1] сегментінде келесі сәйкестік заңмен берілген $f(x) = x \cdot \sin\frac{\pi}{x}$ функцияны қарастырайық. Бұл функция (0, 1) интервалында дифференциалданатын функция және $f(0) = f(1) = 0$. Ендеше тексеріліп отырған функция Ролль теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырады. (0, 1] сегментін келесі сегменттерге бөлейік:

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \dots, \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \dots$$

Осы сегменттердің әрқайсысында қаралып отырған функция Ролль теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырады. Олай болса, қарастырылып отырған $f(x) = x \cdot \sin\frac{\pi}{x}$ функцияның туындысын нольге айналдыратын [0, 1] сегменттің ішінде толып жатқан сансыз көп $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_3 \dots$ нүктелер (47-чертёж) бар.



47-чертёж

*Ролль теоремасынан шығатын салдар.* Егер [a, b] сегметінде үздіксіз *f(x)* функция осы сегменттің барлық ішкі нүктелерінде дифференциалданатын болса және сегменттің ұштарындағы қабылдайтын мәндері өзара тең болса, яғни *f(a)=f(b),* онда туынды *f(x), [a, b]* сегментінің ішінде ең болмағанда бір рет нольге айналады.

Бұл салдарды дәлелдеу үшін былай көмекші *φ(x)* функция құрамыз:

$$\varphi(x) = f(x) - f(a).$$

Осы көмекші функция $\varphi(x)$ Ролль теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырады. Оны мынадан байқауға болады:

$\varphi(x) = f'(x)$, яғни *φ(x)*, *[a, b]* сегментінің барлық ішкі нүктесінде дифференциалданатын функция болады:

$$\varphi(a) = f(a) - f(a) = 0, \qquad \varphi(b) = f(b) - f(a) = 0.$$

Сондықтан *a* мен *b*-нің арасында жатқан бір ξ нүктесінде *φ'(ξ) = 0* немесе *f'(ξ) = 0*. Салдар да дәлелденді.

## § 2. Лагранж бен Коши теоремалары

**1. Лагранж теоремасы.** *Егер [a, b] сегментінде үздіксіз f(x) функцияның осы сегменттің барлық ішкі нүктелерінде шектеулі* *туындысы болса, онда сегменттің ішінде жатқан бір $\xi$ нүктесі* ($a$<$\xi$<$b$) *табылып, келесі теңдік орындалады:*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \qquad (3)$$

Бұл теореманы дәлелдеу үшін, Ролль теоремасының барлық шарттарын қанағаттандыратын мынадай көмекші функция құраймыз:

$$F(x) = (b - a)[f(x) - f(a)] - (x - a)[f(b) - f(a)].$$

*f(x)* функция *[a, b]* сегментінде үздіксіз және оның барлық ішкі нүктелерінде дифференциалданатын болғандықтан, көмекші *F(x)* функция да үздіксіз және дифференциалданатын болады. Оның үстіне

$$F(a) = 0,\ \ F(b) = 0.$$

Сонымен, көмекші функция *F(x)* Ролль теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырады. Олай болса, *[a, b]* сегментінің ішінде жатқан, көмекші *F(x)* функцияның *F'(x)* туындысын нольге айналдыратын $\xi$ нүктесі *(a<$\xi$<b)* табылады, яғни *F'($\xi$)*=0. Ал *[a, b]* сегментінің кез келген $x$ нүктесіндегі көмекші *F(x)* функцияның туындысы

$$F'(x) = (b - a)f'(x) - [f(b) - f(a)],$$

болады. Бұдан

$$F'(\xi) = (b - a)f'(\xi) - [f(b) - f(a)] = 0,$$

немесе

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi). \qquad (3)$$

Сонымен, Лагранж теоремасы дәлелденді.

(3) формуланы функцияның *шектеулі өсімшесі* турасындағы формула дейді, ал Лагранж теоремасын функцияның шектеулі өсімшесі жөніндегі теорема деп те атайды. Бұл (3) формуланы екінші түрде де жазуға болады.

$\xi$ нүктесі $a$ мен $b$-нің арасында жатқан нүкте, яғни $a < \xi\angle b$. Осы теңсіздіктің әрбір жағын $a$ санына азайтсақ,

$$0 < \xi - a < b - a,$$

бұл арадан

$$0 < \frac{\xi - a}{b - a} < 1.$$

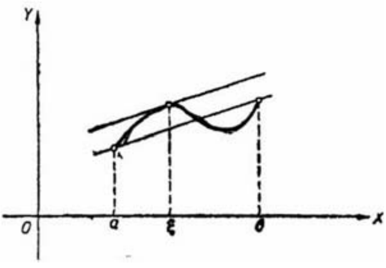
Қатынас $\frac{\xi-a}{b-a}$ дұрыс оң бөлшекті өрнектейді. Міне, осы бөлшекті $\Theta$ арқылы белгілейік, Сөйтіп, $\frac{\xi-a}{b-a} = \Theta$, бұл арадан $\xi = a + (в - a)\Theta$ мұнда $0 < \Theta\angle 1$. Енді $\xi$-дің осы мәнін (3) формулаға апарып қойсақ, онда ол формула мына түрге көшеді:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'[a+(b-a)\theta]. \qquad (3')$$

Енді Лагранж теоремасының геометриялық мағынасына тоқтайық. Ол үшін (3) теңдікті мына түрде жазайық:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi) \qquad (4)$$

(4) теңдіктің сол жағында тұрған қатынас *f(a)* және *f(b)* ординаталардың ұштарын қосатын хорданың бұрыштық коэффициентін өрнектейді, ал оның оң жағында тұрған *f'(ξ)* шама *f(x)* функцияны кескіндейтін қисыққа оның *(ξ,f(ξ))* нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін өрнектейді. Ендеше осы айтылып отырған хорда мен жанама бір-біріне параллель (48-чертёж).



48-чертёж

Сонымен, Лагранж теоремасына мынадай геометриялық мағына беруге болады: *егер f(x) функцияны кескіндейтін қисықтың әрбір нүктесінде тиянақты бір ғана жанама болса, онда осы қисықтың бойында жатқан бір (ξ, f(ξ)) нүкте табылып, бұл нүктедегі қисыққа жүргізілген жанама, f(a) және f(b) ординаталардың ұштарын қосатын хордаға параллель болады.*

**2.** Енді тәжірибелік есептер шығарғанда жиі кездесетін **Коши** теоремасын қарайық.

**Коши теоремасы.** *[a, b] сегментінде үздіксіз функциялар f(x) пен φ(x) осы сегменттің барлық ішкі нүктелерінде дифференциалданатын болса, φ(x) функцияның туындысы φ'(x) (a,b) интервалының ешбір нүктесінде нольге айналмаса және f(a)=f(b), онда a мен b-нің арасында жатқан бір ξ нүктесі табылып, төмендегі теңдік орындалады*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \qquad (5)$$

Бұл (5) формуланы *Коши формуласы* дейді.

Теореманың дұрыстығын дәлелдеу үшін Лагранж теоремасындағыдай, Ролль теоремасы салдарының барлық шарттарын қанағаттандыратын, былай көмекші *F(x)* функцияны құрамыз:

$$F(x)=f(x)[\varphi(b)-\varphi(a)]-\varphi(x)[f(b)-f(a)] \qquad (6)$$

Функциялар $f(x)$ пен $\varphi(x)$ үздіксіз және дифференциалданатын болғандықтан, көмекші $F(x)$ функция да осы шарттарды қанағаттандырады, Екінші жағынан:

$$F(a) = f(a)\varphi(b) - \varphi(a)f(b),$$
$$F(b) = f(a)\varphi(b) - \varphi(a)f(b).$$

Сонымен, көмекші функция $F(x)$ Ролль теоремасы салдарының барлық шарттарын қанағаттандыратын болды. Ендеше $a$ мен $b$-нің арасында жатқан бір $\xi$ нүктесінде бұл функцияның туындысы нольге айналады, яғни $F'(\xi)=0$.

(6) теңдіктің екі жағын $x$ бойынша дифференциалдап, мынаны табамыз:

$$F'(x) = f'(x)[\varphi(b) - \varphi(a)] - \varphi'(x)[f(b) - f(a)].$$

Егер осы теңдіктегі $x$-тің орнына $\xi$-ді қойсақ, онда

$$F'(\xi) = f'(\xi)[\varphi(b) - \varphi(a)] - \varphi'(\xi)[f(b) - f(a)] = 0.$$

бұл арадан

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \tag{5}$$

Сонымен, Коши теоремасы дәлелденді.

## §3. Анықталмағандықтарды айқындау. Лопиталь ережелері

1. Функциялардың шектерін іздегенде біз көбінесе анықталмағандықтардың бірнеше түрлерімен кездесеміз. Мақсат осы анықталмағандықтарды айқындау.

Айталық, $x=a$ нүктесінде функциялар $f(x)$ және $\varphi(x)$ екеуі бірдей нольге айналатын болсын, яғни $f(x)=\varphi(x) = 0$.

Онда қатынас $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ мынадай $\frac{0}{0}$ анықталмағандық түрге келеді. Функциялар $f(x)$ және $\varphi(x)$ екеуі бірдей $x=a$ нүктесінде нольге айналғанымен мына шек

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

болмайды деп қорытынды жасауға болмайды.

Осы шекті табуды мына $\frac{0}{0}$ анықталмағандықты айқындау деп атаймыз.

Бұл анықталмағандықты айқындау жөнінде келесі теореманы дәлелдеуге болады.

**Теорема.** Егер функциялар $f(x)$ пен $\varphi(x)$ мына $x=a$ нүктесінде екеуі бірдей нольге айналса, осы $a$ нүктесінің кішкентай аймағында нольге айналмайтын *φ(x)*-тің туындысы болса және мына шек

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

бар болса, онда:

$$\lim_{x\leftarrow a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Бұл теореманы дәлелдеу үшін Коши теоремасын пайдаланамыз:

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

мұнда $a\angle\xi<b$.

*f(x)* және *φ(x)* екеуі бірдей нольге тең болғандықтан, алдыңғы теңдік мына түрге көшеді:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Егер *x, a*-ға ұмтылатын болса $(x\to a)$ онда *ξ* де *a*-ға ұмтылады, өйткені *ξ* сол *a* мен *x*-тің арасында жатыр. Сондықтан, егер мына шек

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

бар болатын болса, онда:

$$\lim_{x\leftarrow a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (6)$$

Теореманың шарты бойынша мына шек $\lim\frac{f'(\xi)}{\varphi\prime(\xi)}$ бар болуы керек. Міне, осы шектің мәнін *r* деп белгілейік, яғни

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=r.$$

Сонда функция шегінің анықтамасы бойынша, алдын ала берілген оң құнарсыз аз *ε* санына сәйкес оң *δ* саны табылып, мына теңсіздіктің

$$|x-a|<\delta \qquad (7)$$

орындалуынан келесі теңсіздік

$$\left|\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}-r\right|<\varepsilon \qquad (8)$$

орындалуға тиіс.

$\xi$ нүктесі $a$ мен $x$-тің арасында жатқандықтан, (7) теңсіздікті ол да қанағаттандыруы керек, яғни

$$|\xi - a| < \delta \tag{$7^1$}$$

(8) теңсіздік (7) теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x$-тер үшін орындалады. Олай болса, (7) теңсіздіктің орындалуынан мына төмендегі теңсіздік орындалады

$$\left|\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} - r\right| < \varepsilon,$$

яғни

$$\lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = r.$$

(6) теңдікті еске алсақ, онда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = r,$$

немесе

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \tag{9}$$

Теорема дәлелденді.

(9) формула жөнінде бірнеше ескертпелер айтып кетуге тура келеді.

а) Егер $x=a$ нүктесінде туындылар $f'(x)$ және $\varphi'(x)$ екеуі бірдей нольге айналса, бірақ екінші ретті туындылар $f''(x)$ және $\varphi''(x)$, $a$ нүктесінің кішкентай аймағында бар болатын болса және нольге айналмаса, онда:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \leftarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)},$$

әрине, егер мына шек $\lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ бар болса.

Егер $f''(a) = \varphi''(a) = 0$, бірақ үшінші ретті туындылар $f'''(x)$ және $\varphi'''(x)$, $a$ нүктесінің кішкентай аймағында жатқан барлық $x$-тер үшін бар болатын болса және нольден айрықша болса, онда:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'''(x)}{\varphi'''(x)} \tag{10}$$

Міне, осылай әрі қарай соза беруге болады. Бұл ережені Лопиталь ережесі деп атайды.

б) Мына шектің

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

болмауынан, мына

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

шек те болмайды деген қорытынды шықпайды. Мәселен, мына

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$$

шекті қарайық. Егер осыған Лопиталь ережесін қолдансақ, онда:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x^2\,\mathrm{Sin}\frac{1}{x}\right]'}{(\mathrm{Sin}\,x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\,\mathrm{Sin}\frac{1}{x}-\mathrm{Cos}\frac{1}{x}}{\mathrm{Cos}\,x}.$$

Ал осы теңдіктің оң жағында тұрған шек жоқ, бұдан оның сол жағында тұрған шек те жоқ деп қорытынды жасауға болмайды. Сол жағында тұрған шек бар. Расында,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{\overline{2}}\,\mathrm{Sin}\frac{1}{x}}{\mathrm{Sin}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{Sin}\,x}\cdot\lim_{x\to 0}x\cdot\mathrm{Sin}\frac{1}{x}=1\cdot 0=0.$$

Сонымен, бұл келтірілген мысал үшін Лопиталь ережесін қолдануға болмайды,

в) Айталық, *x* плюс не минус шексіздікке ұмтылғанда функциялар *f(x)* және *φ(x)* екеуі бірдей нольге ұмтылатын болсын, яғни

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\qquad \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0.$$

Бізге мына шекті $\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ табу керек.

Аргумент $x$-тің орасан үлкен мәндері үшін туындылар *f'(x) φ'(x)* бар болатын болсын және нольге айналмайтын болсын онда:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},\qquad (11)$$

әрине, егер оң жақтағы шек бар болатын болса.

Бұл формуланы дәлелдеу үшін мынадай $x=\frac{1}{t}$ ауыстыру жасаймыз. Сонда:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}\qquad (12)$$

Ал

$$\lim_{t\to 0}f\left(\frac{1}{t}\right)=0,\qquad \lim_{t\to 0}\varphi\left(\frac{1}{t}\right)=0,$$

сондықтан (12) теңдіктің оң жағында тұрған шекке Лопиталь ережесін қолдануға болады. Демек,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{t^2}\cdot f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2}\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\frac{1}{t})}{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}.$$

Қайтадан $\frac{1}{t}$-нің орнына $x$-ті қойсақ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Мысал келтірейік: мына шекті

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{2}{x}}$$

табу керек. Ол үшін (11) формуланы қолданамыз. Сонда:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{x}}{\mathrm{Sin}\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\mathrm{Sin}\frac{1}{x}\right)'}{\left(\mathrm{Sin}\frac{2}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\mathrm{Cos}\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^2}\mathrm{Cos}\frac{2}{x}}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{Cos}\frac{1}{x}}{\mathrm{Cos}\frac{2}{x}}=\frac{1}{2}.$$

2. Қаралған анықталмағандықтан басқа тағы да мынадай $\frac{\infty}{\infty}$ анықталмағандық кездеседі. Мәселен, айталық,

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty.$$

Егер мына

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

өрнектегі $x$-тің орнына бірден $a$-ны қойсақ, онда жаңағы айтылып отырған анықталмағандыққа келеміз. Осы анықталмағандықты айқындау жөнінде келесі теореманы дәлелдейік.

**Теорема.** *Егер* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *бөлшектің алымы мен бөлімінің абсолют шамасы аргумент x, a санына ұмтылғанда шексіз өссе және a санының кішкентай аймағының ішінде жатқан барлық x-тер үшін туындылар f'(x), φ'(x) бар болып нольге айналмаса, онымен бірге мына шек*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

*бар болатын болса, онда:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\tag{13}$$

Бұл теореманы да дәлелдеу үшін Коши теоремасын пайдаланамыз. Бірақ Коши теоремасын бірден $x=a$ нүктесі үшін қолдануға болмайды, өйткені бұл нүктеде функциялар $f(x)$ және $\varphi(x)$ шексіздікке айналады. Сондықтан Коши теоремасын қолдануға мүмкіндік туғызу мақсатымен осы $a$ нүктесіне тең емес, бірақ оған жуық, $x_0$ нүктесін қараймыз. Былайша айтқанда, бұл $x_0$ нүктесі $a$ нүктесінің кішкентай аймағының ішінен алынып отыр.

Енді осы $x_0$ мен $a$-ның немесе $a$ мен $x_0$-дің арасында барлық $x$-терді қарайық. Сонда:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{\varphi(x)-\varphi(x_o)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \qquad (14)$$

мұнда $a\angle x<\xi<x_0$ немесе $x_0<\xi<x<a$. Теореманың шарттары бойынша мұндай $x$-тер үшін туындылар $f'(x), \varphi'(x)$ бар және нольге айналмайды.

(14) теңдіктің сол жағындағы бөлшектің алымын $f(x)$-ке көбейтсек және бөлсек, ал бөлімін де $\varphi(x)$-ке көбейтсек және бөлсек:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{1-\frac{f(x_o)}{f(x)}}{1-\frac{\varphi(x_o)}{\varphi(x)}}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Бұл арадан

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{1-\frac{\varphi(x_o)}{\varphi(x)}}{1-\frac{f(x_o)}{f(x)}}\cdot\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \qquad (15)$$

Егер $x$-ті $a$-ға ұмтылтып $x\to a$ (15) теңдіктің екі жағынан алсақ, онда:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \qquad (16)$$

өйткені $x$, $a$-ға ұмтылғанда

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty$$

ал $f(x_0), \varphi(x_0)$ тұрақты сандар, сондықтан

$$\frac{\varphi(x_o)}{\varphi(x)}\to 0, \qquad \frac{f(x_o)}{f(x)}\to 0.$$

Теореманың шарттары бойынша шек

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

тиянақты санға тең; оны $r$ деп белгілейік, яғни

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = r.$$

Функция шегінің анықтамасы бойынша әрбір алдын ала берілген оң мейлінше аз $\varepsilon$ санына сәйкес $\delta$ саны табылып, төмендегі теңсіздіктің

$$|x - a| < \delta \tag{17}$$

орындалуынан келесі теңсіздік

$$\left| \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} - r \right| < \varepsilon \tag{18}$$

орындалады

$x_0$ нүктесін сайлап алу өзіміздің қолымызда болғандықтан, мына теңсіздік

$$|x_0 - a| < \delta$$

орындалатындай етіп алайық. Сонда

$$|\xi - a| < \delta, \tag{19}$$

өйткені $a < x < \xi \angle x_0$ немесе $x_0 < \xi < x < a.$

(18) теңсіздік (17) теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x$-тер үшін орындалатын болғандықтан, (19) теңсіздіктің орындалуынан келесі теңсіздік

$$\left| \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} - r \right| < \varepsilon$$

орындалады немесе бәрібір

$$\lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = r.$$

(16) теңдікті еске алып табамыз:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = r$$

немесе

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \tag{13}$$

Теорема дәлелденді.

(9) формула жөніндегі айтылған а), б), в) ескертпелер (13) формулаға да жатады, Сондықтан оларға бұл жерде ерекше тоқтамаймыз.

б) Ескертпе жөнінде мына мысалды қарайық:

$$\lim_{x \to a} \frac{x - \sin x}{x - \sin x}.$$

Егер Лопиталь ережесін қолдансақ, онда:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

Бұл теңдіктің оң жағы ешбір тиянақты санға тең емес былайша айтқанда, оның оң жағындағы шек жоқ. Бұл арадан оның сол жағындағы шек те жоқ деп қорытынды жасауға болмайды. Шынында,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=1.$$

Сондықтан мысал үшін берілген функцияға Лопиталь ережесін қолдануға болмайды.

Тағы да бір-екі мысал келтірейік:

$$1)\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{ctg}\,2x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2.\frac{1}{\sin 2x}}=-$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{Sin}^{\overline{2}}\,2x}{\mathrm{Cos}^2\,x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin 2x}{2\sin x}\frac{\cos 2x}{\cos x}=$$

$$=2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{Cos}\,2x=-2.$$

2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{lg_a}\,x}{x^a}$$

(мұнда $a>0.a>1$). Лопиталь ережесі бойынша:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{lg}_\alpha\,x}{x^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{lg}_\alpha\,e}{x\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{lg}_\alpha\,e}{\alpha x^\alpha}=0.$$

Кейінгі мысалдан мынадай қорытынды жасауға болады: аргументі $x$ шексіздікке ұмтылғанда, логарифмдік функция $g_\alpha x$ және дәрежелік функция $x^\alpha$ екеуі де өседі, бірақ функция $lg_\alpha x$ оң дәрежелік $x^\alpha$ функциямен салыстырғанда жайырақ өседі.

3. Қарастырылған анықталмағандықтардан басқа тағы да мынадай анықталмағандықтар бар: $\infty\cdot\infty, 0\cdot\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$. Бұлардың әрқайсысын қарастырылған анықталмағандықтардың біреуіне келтіруге болады.

Айталық,

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty.\ \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty.$$

Сонда

$$\lim_{x\to a}[f(x)-\varphi(x)]$$

мына $\infty - \infty$ анықталмағандыққа келеді. Бұл анықталмағандықты қаралып өткен анықталмағандықтардың біреуіне келтіруге болады:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-\varphi(x)] = \lim_{x\to a}\left\{\left[\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]:\frac{1}{f(x)\varphi(x)}\right\}.$$

Мысал үшін мына есепті шығарайық:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg}x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

Егер

$$f(a)=0, \qquad \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty$$

болса, онда

$$\lim_{x\to a}f(x)\varphi(x)$$

мына түрдегі $0\cdot\infty$ анықталмағандыққа келеді. Бұл анықталмағандықты да қаралып өткен анықталмағандықтың біреуіне келтіруге болады.

$$\lim_{x\to a}f(x)\varphi(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Мысал үшін мына есепті қарайық:

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg}\,x\ln\sin x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{\operatorname{tg}x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg}x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

Мына $0, 1^{\infty}, \infty^{0}$ анықталмағандықтарды айқындау деген мәселе келесі шекті

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$$

табу деген сөз, егер 1) $f(a)=\varphi(a)=0$, 2) $\varphi(a)=1$,

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty, \quad \lim_{x\to a}f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to a}\varphi(x)=0.$$

болса.

Бұл анықталмағандықтарды айқындау үшін олардың әрқайсысын алдымен мына $0\cdot\infty$ анықталмағандыққа келтіреміз. Ол үшін шек таңбасы ішіндегі функцияны $y$ арқылы белгілейміз де, яғни $y=[f(x)]\varphi^{(x)}$, сонан кейін осы теңдікті логарифмдейміз. Сонда:

$$\ln y = \varphi(x)\ln f(x).$$

Енді $x$-тің $a$-ға ұмтылтып, осы теңдіктің екі жағынан шек аламыз. Мысал үшін мына есепті

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$$

шығарайық. Жаңағы айтылған қағида бойынша

$$y=(1-\sin x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

Екі жағын логарифмдейміз, сонда:

$$lny=\operatorname{ctg} x\ln(1-\sin x)\,.$$

Енді шекке көшеміз:

$$\lim_{x\to 0} lny=\lim_{x\to 0}\operatorname{ctg} x\ln(1-\sin x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\,(1-\sin x)}{\operatorname{tg} x}.$$

Логарифмдік функцияның үздіксіздігін пайдаланып табамыз

$$\ln\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\cos x}{1-\sin x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=-1.$$

Бұл арадан

$$\lim_{x\to 0} y=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

немесе

$$\lim_{x\to 0}[f(x)]^{\varphi(x)}=\frac{1}{e}.$$

## 4. Тейлор мен Маклорен формулалары

1. Қаралып өткен элементар функциялардың ішіндегі жабайысы бүтін рационал функциялар немесе көпмүшелер (полиномдар). Көпмүшенің тиісті мәнін табу үшін арифметикалық және алгебралық амалдар ғана қолданылады.

Алдымен мына төмендегі көпмүшені қарайық:

$$F(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n.$$

Осы көпмүшенің коэффициенттерімен $x=0$ нүктесіндегі оның туындыларының арасында тығыз байланыс бар, былайша айтқанда, көпмүшенің барлық коэффициенттерін $x=0$ нүктесіндегі оның туындылары арқылы өрнектеуге болады. Берілген көпмүшені $n$ рет дифференциалдайық, сонда:

$$F'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+na_nx^{n-1},$$
$$F''(x)=1\cdot 2a_2+1\cdot 2\cdot 3a_3x+1\cdot 3\cdot 4a_4x^2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2},$$
$$F'''(x)=1\cdot 2\cdot 3a_3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4a_4x+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3},$$

………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

$$F^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 3\cdot 2\cdot 1a_n.$$

Көпмүшенің өзіндегі және кейінгі теңдіктердегі $x$-тің орнына нольді қояйық. Сонда:

$$F(0) = a_o,\ \ F'(0) = a_1,\ \ F''(0) = 2!\,a_2,$$
$$F'''(0) = 3!\,a_3,\quad \dots \quad ,F^{(n)}(0) = n!\,a_n.$$

Бұл арадан

$$a_o = F(o),\ \ a_1 = F'(o),\ \ a_2 = \frac{F''(o)}{2!},$$
$$a_3 = \frac{F'''(o)}{3!},\quad \dots \quad,\ a_n = \frac{F^{(n)}(o)}{n!}.$$

Сонымен, кез келген көпмүшені былай жазуға болады:

$$F(x) = F(o) + \frac{F'(o)}{1}x + \frac{F''(o)}{2!}x^2 + \frac{F'''(o)}{3!}x^3 + \cdots + \\ + \frac{F^{(n)}(o)}{n!}x^n. \qquad (20)$$

Берілген көпмүшенің коэффициенттерін жалғыз $x = 0$ нүктесі емес, кез келген $x=a$ нүктедегі оның өзінің және туындыларының мәндері арқылы өрнектеуге болады. Ол үшін $x$-тің орнына $(a + h)$-ты аламыз, яғни $x = a + h$ (мұнда $h$ − жаңа айнымалы). Сонда:

$$F(x) = F(a+h) = \psi(h). \qquad (21)$$

Мына $F(x)$ − айнымалы $x$ бойынша көпмүше болғандықтан, $\varphi(h)$ айнымалы $h$ бойынша көпмүше болып табылады. Олай болса қорытылып шыққан (20) формуланы осы $\varphi(h)$ көпмүшеге қолданайық.

Сонда:

$$\psi(h) = \psi(o) + \frac{\psi'(o)}{1}h + \frac{\psi''(o)}{2!}h^2 + \frac{\psi'''(o)}{3!}h^3 + \cdots + \\ + \frac{\psi^n(o)}{n!}h^n. \qquad (22)$$

Енді (21) теңдікті $h$ бойынша дифференциалдасақ:

$$F'(a+h) = \psi'(h),\ \ F''(a+h) = \psi''(h),$$
$$F'''(a+h) = \psi'''(h),\quad \dots,\quad F^{(n)}(a+h) = \psi^{(n)}(h).$$

(21) теңдіктегі және осы кейінгі теңдіктердегі $h$-тың орнына нольді қояйық. Сонда:

$$\psi(o) = F(a),\ \ \psi'(o) = F'(a),\ \ \psi''(o) = F''(a),$$
$$\psi'''(o) = F'''(a), \dots, \psi^n(o) = F^{(n)}(a).$$

Бұдан кейін (22) тендік мына түрге көшеді:

$$F(x) = F(a) + \frac{x-a}{1}F'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}F''!(a) +$$
$$+\frac{(x-a)^3}{3!}F'''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}F^{(n)}(a). \qquad (23)$$

Бұл қорытылып шыққан (23) формуланы Тейлордың көпмүше жөніндегі формуласы деп атайды.

(20) формуланы көпмүшенің ноль нүктесі аймағында жіктелуі деп атайды, ал (23) формуланы көпмүшенің $x=a$ нүктесі аймағында жіктелуі деп атайды.

2. Енді кез келген дифференциалданатын функцияны көпмүше түрінде қалай жуық сипаттауға болады деген сұрақ туады.

$x=a$ нүктесінде $(n + 1)$-ші ретке дейін туындысы бар $f(x)$ функция берілсін. Ең алдымен мақсат мынада: төмендегі шарттарды

$$\varphi(a) = f(a),\ \varphi'(a) = f'(a), \qquad \varphi''(a) = f''(a), \qquad (24)$$
$$\varphi'''(a) = f'''(a), \dots, \qquad \varphi^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

қанағаттандыратын $n$ дәрежелі $\varphi(x)$ көпмүшені табу керек.

(23) формула бойынша $\varphi(x)$ көпмүшені былай жазуға болады:

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{x-a}{1}\varphi'(a) + \frac{(x-a)^{\overline{2}}}{2!}\varphi''(a) +$$
$$+\frac{(x-a)^2}{3!}\varphi'''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\varphi^{(n)}(a).$$

(24) шарттар бойынша алдымыздағы көпмүшенің

$$\varphi(a), \qquad \varphi'(a), \qquad \varphi''(a), \qquad \varphi'''(a), \dots, \varphi^{(n)}(a)$$

коэффициенттерін $f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ f'''(a), \dots, f^{(n)}(a)$ сандар арқылы ауыстыруға тура келеді. Сонда:

$$\varphi(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) +$$
$$+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a). \qquad (25)$$

Осы табылған (25) көпмүше бастапқы берілген $f(x)$ функцияны қандай дәлдікпен сипаттайды, енді соны білейік.

Бастапқы берілген $f(x)$ функция мен (25) теңдікпен өрнектелген $\varphi(x)$ көпмүшенің айырмасын $R_n(x,a)$ арқылы белгілейік, яғни:

$$f(x) - \varphi(x) = R_n(x,a),$$

Бұл арадан

$$f(x) = \varphi(x) + R_n(x, a).$$

(25) теңдікті еске алсақ, онда:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) +$$
$$+ \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x, a). \quad (26)$$

Осы қорытылған (26) формуланы *f(x)* функция үшін Тейлор формуласы деп атайды.

Сонымен, мәселе былай болатын болды: егер $x=a$ нүктесінде *(n + 1)*-ші ретке дейін туындысы бар берілген *f(x)* функцияны (25) көпмүшемен ауыстыратын болсақ, онда бұдан біз сөзсіз қате жібереміз, $R_n(x,\ a)$ осы қатенің шамасын көрсетеді. Бұл $R_n(x,\ a)$ шаманы *қалдық мүше* деп атайды.

Енді осы қалдық мүшені табу керек. Ол үшін оны мына түрде жазайық:

$$R_n(x, a) = (x-a)^p P_n(x, a),$$

$P$ − әзірше кез келген сан. Бұдан соң (26) формула мына түрге көшеді:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) +$$
$$+ \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^p P_n(x, a), \quad (27)$$

$x$-тің тиянақты сандық мәні бар деп ұйғарып, келесі көмекші *g(t)* функцияны құраймыз:

$$g(t) = f(t) + \frac{x-t}{1} f'(t) + \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) + \quad (28)$$
$$+ \frac{(x-t)^3}{3!} f'''(t) + \cdots + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) + (x-t)^p R_n(x, a) - f'(x).$$

Осы құрылған көмекші функцияның $t$ бойынша тиянақты *g'(t)* туындысы бар екені айқын.

(28) формуладағы $t$-нің орнына алдымен, $x$-ті, онан кейін $a$-ны қойсақ, онда:

$$g(x) = 0, \;\; g(a) = 0.$$

Сонымен, (28) теңдікпен өрнектелген көмекші функция *g(t)* Ролль теоремасы шарттарын қанағаттандыратын болды.

Ендеше $x$ пен $a$-ның немесе $a$ мен $x$-тің арасында жатқан $\varsigma$ нүктесінде бұл көмекші функцияның туындысы нольге айналады, яғни

$$g'(\xi) = 0.$$

Көмекші *g(t)* функцияның айнымалы *t*-нің кез келген мәніндегі туындысы болады:

$$g'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - p(x-t)^{p-1} P_n(x,a).$$

Егер осы теңдіктегі *t*-нің орнына *ξ*-ді қойсақ, онда

$$\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) - p(x-\xi)^{p-1} P_n(x,a) = 0,$$

бұл арадан:

$$P_n(x,a) = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi).$$

$P_n(x,a)$-ның осы мәнін қалдық мүше өрнегіне апарып қойып мынаны табамыз:

$$R_n(x,a) = \frac{(x-a)^p (x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi).$$

*ξ* мына *a* мен *x*-тің немесе *x* пен *a*-ның арасында жатқан сан болғандықтан, оны былай алуға болады: $\xi = a + \Theta(x-a)$, мұнда $0 < \Theta < 1$, бұдан кейін қалдық мүше мына түрге келеді:

$$R_n(x,a) = \frac{(x-a)^p [x-a-\theta(x-a)]^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]$$

немесе

$$R_n(x,a) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]. \quad (29)$$

(29) формуладағы *p*-нің орнына *n + 1*-ді қойып, **Лагранж түріндегі** қалдық мүшенің өрнегін табамыз:

$$R_n(x,a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]. \quad (30)$$

(29) формуладағы *p*-нің орнына 1-ді қойып, **Коши түріндегі** қалдық мүшенің өрнегін табамыз:

$$R_n(x,a) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]. \quad (31)$$

Берілген *f(x)* функцияның орнына *φ(x)* көпмүшені алғанда жіберілетін қатенің мөлшерін білу үшін, *a* нүктесінің $(a-\delta, a+\delta)$ аймағында жатқан барлық *x*-тер үшін қалдық мүшенің абсолют шамасының ең жоғарғы шекаралығын табу керек.

Егер (26) Тейлор формуласындағы *a*-ның орнына нольді қойсақ, онда:

$$f(x) = f(o) + \frac{x}{1} f'(o) + \frac{x^2}{2!} f''(o) + \frac{x^3}{3!} f'''(o) + \cdots +$$

$$+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(o)+R_n(x). \qquad (32)$$

Бұл (32) формуланы *Маклорен формуласы* деп атайды.

Маклорен формуласы үшін қалдық мүше *$R_n(x)$* келесі теңдіктермен өрнектеледі:

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\theta x),\ \ (o<\theta<1).$$

Коши түріндегісі:

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^{n}}{n!}f^{(n+1)}(\theta x),\quad (o<\theta<1). \qquad (33)$$

Лагранж түріндегісі:

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),\quad (o<\theta<1). \qquad (34)$$

Берілген *$f(x)$* функцияны Тейлор немесе Маклорен формулалары арқылы өрнектеуді оны *жіктеу* деп атайды.

### 3. Мысалдар келтірейік.

а) *$f(x)=e^x$* функцияны Маклорен формуласы бойынша жіктеу керек. Ол үшін бұл функцияның *$x=0$* нүктесіндегі туындыларын табу керек:

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{n}(x)=e^{x}, f^{(n+1)}(x)=e^{x},$$
$$f(o)=f'(o)=f''(o)=f'''(o)=\cdots=f^{(n)}(o)=1.$$

Енді Маклорен формуласы бойынша:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x). \qquad (35)$$

Қалдық мүшені Лагранж түрінде алайық:

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}.$$

*$x$* қандай болса да *$n$* шексіз өскен сайын *$R_n(x)$* нольге ұмтылады. Оны мынадан байқауға болады: $\left|e^{\theta x}\right|<e^{|x|}$, егер мына $2|x|$ шамадан артық $m$ санын алсақ, онда $n\geq m$ болғанда

$$\frac{|x|}{n}<\frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\frac{|x^m|}{m!}\cdot\frac{|x|}{m+1}\cdots\frac{|x|}{n+1}<\frac{|x^m|}{m!}\cdot\frac{1}{2^{n+1-m}}<$$
$$<\frac{|2x|^m}{m!}\cdot\frac{1}{2^n},$$

сондықтан

$$|R_n(x)| < \frac{|2x|^m}{m!} e^{|x|} \cdot \frac{1}{2^n}. \qquad (36)$$

Егер *n* шексіздікке ұмтылса, кейінгі теңдіктің оң жағы нольге ұмтылады, өйткені бірінші екі көбейткіш *n*-ге тәуелді емес. Сонымен,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

(35) формуланы пайдаланып, *e* санының жуық мәнін табуға болады. Ол үшін (35) формуладағы х-тің орнына 1-ді қойып табамыз:

$$e = 1 + 1\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}.$$

Егер *e* санының жуық мәнін кейінгі формуладан $\frac{1}{10000}$-ге дейінгі дәлдікпен іздесек, онда *n*-ді қалдық мүше $\frac{1}{10000}$-ден кіші болатындай етіп сайлап алуымыз керек. Қалдық мүше:

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Ендеше *n*-ді 7-ге теңеп алуымыз керек, яғни *n* = 7, өйткені (7 + 1)! >30 000. Сонда

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!} = \frac{e^\theta}{8!} < \frac{3}{8!} < \frac{1}{10000}.$$

Сөйтіп, *e* санының $\frac{1}{10000}$-ге дейінгі дәлдікпен алынған жуық мәні

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = 2{,}7182.$$

болады. Жіберілетін қатенің шамасы $\frac{1}{10000}$-ден аспайды.

б) $f(x)\sin x$ функцияны Маклорен формуласы бойынша жіктеу керек. Ол үшін бұл функцияның *x*=0 нүктесіндегі туындыларын табу керек:

$$f'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad f''(x) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x) = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \qquad f^{IV}(x) = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{V}(x) = \sin\left(x + 5\cdot\frac{\pi}{2}\right), \dots, \qquad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left[x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

$$f(o) = o, f^{I}(o) = 1, f^{II}(o) = O, f^{III}(o) = -1, f^{IV}(o) = O,$$

$$f^{V}(o) = 1, \dots, f^{(2n)}(o) = O, \qquad f^{(2n+1)}(o) = (-1)^n.$$

Енді Маклорен формуласын пайдаланып мынаны табамыз:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(1n+1)!} + R_n(x) \quad (37)$$

Қалдық мүшені Лагранж түрінде алайық:

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2}\theta x\right] \qquad (38)$$

(37) формула бойынша кез келген бұрыштың синусын табуға болады. Мәселен, 20° синусын табайық, *n*-ді үшке балап алайық, сонда:

$$\sin 20° = \sin\frac{\pi}{9} \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 = 0{,}342.$$

Жіберілетін қатенің шамасы (38) формула бойынша болады:

$$R_3 = \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^4}{3!} \sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{2} + \theta x\right).$$

$$|R_3| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^4}{4!} \approx 0{,}0006 < \frac{1}{1000}.$$

Сонымен, 0,001-ге дейінгі дәлдікпен алынған $\sin 20°$-тің жуық мәні 0,342 болады.

в) $f(x) = \cos x$-ті Маклорен формуласы бойынша жіктеу керек:

$$f^{I}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \; f^{II}(x) = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{III}(x) = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \; f^{IV}(x) = \cos\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{V}(x) = \cos\left(x + 5 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \; f^{VI}(x) = \cos\left(x + 6 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

… … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … …

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \; f^{(n+1)}(x) = \cos\left[x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right].$$

$$f(0) = 1, f^{I}(0) = 0, f^{II}(0) = -1, f^{III}(0) = 0,$$

$$f^{IV}(0) = 1, f^{V}(0) = 0, f^{VI}(0) = -1, \dots,$$

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n, \qquad f^{(2n+1)}(0) = 0.$$

Бұдан кейін:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + R\,(x). \; (39)$$

Қалдық мүшені Лагранж түрінде аламыз:

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left[\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]. \qquad (40)$$

(39) формула бойынша кез келген бұрыштың косинусын табуға болады. Мәселен, $n$-ді 4-ке балап cos 40°-ті табайық:

$$\cos 40° = \cos\frac{2\pi}{9} \approx 1 - \frac{\left(\frac{2\pi}{9}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{2\pi}{9}\right)}{4!} \approx 0{,}766.$$

Жіберілетін қате (40) формула бойынша болады:

$$R_4 = \frac{\left(\frac{2\pi}{9}\right)^5}{5!}\cos\left(5\cdot\frac{\pi}{2} + \theta x\right).$$

бұл арадан

$$|R_4| \le \frac{\left(\frac{2\pi}{9}\right)^5}{5!} \approx 0{,}0013.$$

(38) және (40) формулалардан мынадай қорытындыға келеміз:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

өйткені

$$|R_n(x)| \le \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{|2x|^m}{m!}\cdot\frac{1}{2^n}.$$

## § 5. Функциялардың үдеу және кему белгілері

Қандай функцияны біркелкі функция деп атайтыны бізге белгілі. Берілген функцияның үдемелігін немесе кемімелігін оның туындысының таңбасы бойынша білуге болады. Бұл жөнінде негізгі белгілер болып келесі теоремалар;

**1-теорема.** *(a,b) аралығының барлық нүктелеріндегі шектеулі f(x) туындысы бар үздіксіз функция f(x) осы аралықта біркелкі үдемелі болу үшін мына f'(x)≥0 теңсіздіктің* орындалуы қажетті және жеткілікті; онымен бірге *f'(x)* туындыны нольге айналдыратын *x*-тің мәндері *(a,b)* аралығының бөлігі болатындай бүтін сегментті құра алмайды.

Алдымен бұл теорема шарттарының қажеттігін дәлелдейік.

Ол үшін *f(x)* функцияны *(a,b)* аралығында үдемелі болсын деп ұйғарайық. Аргумент *x*-ке *Δx* өсімше берейік, бұл өсімшенің аздығы сондай, нүкте *x+Δx (a,b)* аралығының ішінде жатады. Өсімше *Δx*-тің таңбасы оң да, теріс те болуы мүмкін. Егер *Δx> 0* болса, онда $x + \Delta x > x$ функция $f(x)$ үдемелі болғандықтан, мына теңсіздік $f(x + \Delta x) > f(x)$ орындалуға тиіс және бұл арадан:

$$f(x+\Delta x)-f(x)>0.$$

Егер $\Delta x < 0$ болса, онда $x + \Delta x < x$. Функция $f(x)$ үдемелі болу себепті мына теңсіздік $f(x + \Delta x) < f(x)$ орындалады, бұл арадан:

$$f(x+\Delta x)-f(x)<0.$$

Сонымен, үдемелі функцияның өсімшесі мен оның аргументі өсімшесінің таңбасы бірдей болатын болды. Ендеше:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$$

Егер $\Delta x$-ті нольге ұмтылтып, шекке көшсек, онда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$$

немесе $f'(x) \geq 0$.

Теореманың қажеттігінің бір бөлігі дәлелденді.

Енді қажетті шарттың екінші бөлігін дәлелдейік. Ол үшін $f(x)$ функциясы $(a, b)$ аралығында үдемелі және $(a,b)$ аралығының ішінде жатқан $[a, \beta]$ сегментінің барлық нүктелерінде туынды $f'(x)$ нольге айналады деп, теоремада қарсы жорияық.

$[a, \beta]$ сегментінің бойында жатқан $x_1$, $x_2$ кез келген екі нүктені алайық та, осы нүктелердегі функцияның сәйкес мәндерінің айырмасын алайық: $f(x_2) - f(x_1)$. Осы айырмаға шектеулі өсімше жөніндегі Лагранж теоремасын қолдансақ:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1).$$

Мұнда $x_1<\xi<x_2$, яғни $\xi-([\alpha,\beta])$ сегментінің ішінде жатқан нүкте. Сондықтан, біздің ұйғаруымыз бойынша $f'(\xi)=0$, олай болса, $f(x_1)=f(x_2)$, ал бұл теңдік $f(x)$ функцияның үдемелігіне қайшы келеді; ендеше біздің ұйғаруымыз дұрыс емес.

Бұл теорема шарттарының жеткіліктілігін дәлелдейік.

$(a,b)$ аралығындағы барлық $x$-тер үшін мына теңсіздік $f^1(x)\geq 0$ орындалсын. Осы аралықтың бойында жатқан және төмендегі теңсіздікті

$$x_1<x_2<x_3$$

қанағаттандыратын кез келген үш $x_1$, $x_2$, $x_3$ нүктелерді алайық. Осы нүктелердегі $f(x)$ функцияның сәйкес мәндерін тауып, олардың айырмаларына Лагранж теоремасын қолданайық.

Сонда:

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi_1),$$

мұнда

$$x_1 < \xi_1 < x_2$$

$$f(x_3) - f(x_2) = (x_3 - x_2)f^1(\xi_2),$$

мұнда

$$x_2 < \xi_2 < x_{3.}$$

Теореманың шарттары бойынша $f'(\xi_1) \geq 0,\ f'(\xi_1) \geq 0.$ Ендеше:

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0, \qquad f(x_3) - f(x_2) \geq 0$$

немесе бұл арадан:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_3). \qquad (41)$$

(41) теңсіздік $x_1$ мен $x_3$-тің арасында жатқан әрбір $x_2$ үшін дұрыс болады. Осы $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ үш санның арасындағы теңдік $x_1$ мен $x_3$-тің арасында жатқан әрбір $x_2$ үшін орындала бермейді.

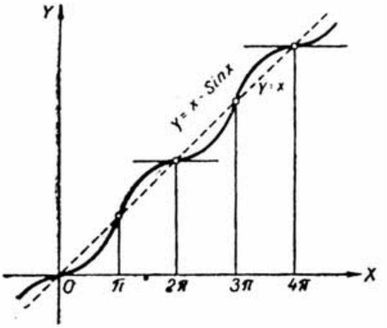
Шынында, егер мына теңдік

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$$

барлық $x_2$ үшін орындалатын болса, онда функция $f(x)$, $[x_1,x_3]$ сегментінде ылғи тұрақты санға тең болар еді және онда бұл функцияның туындысы бүкіл $[x_1,x_3]$ сегментінде нольге теңбе-тең болған болар еді; ал мұндай қорытынды теореманың шарттарына қайшы келеді. Сондықтан (41) өрнектің ең болмағанда бір жерінде нағыз теңсіздік белгісі болу керек, демек,

$$f(x_1) < f(x_3).$$

Осы теңсіздіктің орындалуы теорема шарттарының жеткіліктілігін дәлелдейді.



49-чертёж

**2-теорема.** *(a,b) аралығының барлық нүктелерінде шектеулі f'(x) туындысы бар үздіксіз f(x) осы аралықта кеміме болу үшін келесі теңсіздіктің f'(x) ≤ о орындалуы қажетті және жеткілікті, онымен бірге f'(x) туындыны нольге айналдыратын x-тің мәндері (a,b) аралығының бөлігі болатындай бүтін сегментті құра алмайды.*

Бұл теорема да жоғарыдағы теоремадай дәлелденеді.

Енді осы дәлелденген теоремаларды тәжірибе жүзінде нығайту үшін біраз мысалдар келтірейік.

а) Мына $y = x - \sin x$ функцияның үдеуін және кемуін зерттеу керек. Алдымен бұл функцияның туындысын табамыз: $y^1 = 1 - \cos x$ функция $\cos x$-тің мәндері – 1 мен + 1-дің арасында жататын болғандықтан әрқашан мына теңсіздік $1 - \cos x \geq 0$ орындалу керек. Ал өрнек $1 - \cos x$ бір-бірінен оңашаланған, тұтас жатқан сегмент құрамайтын тек мына $x = 2k^{\pi}, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ нүктелерде ғана нольге айналады. Сонымен қаралып отырған функция бүкіл $(-\infty, \infty)$ интервалдың бойында үдемелі (49-чертёж).

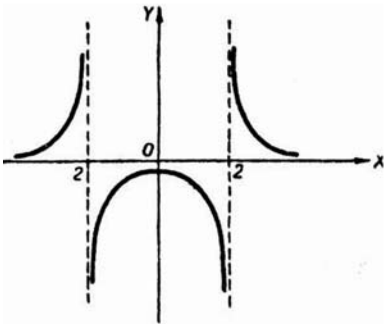
б) $y = \frac{2}{x^2 - 4}$ функцияның үдеуін және кемуін зерттеу керек.

Бұл функцияның екі үзіліс нүктесі бар, олар: $x = \pm 2$. Туындысын табайық:

$$y' = -\frac{4x}{(x^2 - 4)^2}. \tag{42}$$

Жаңағы $x = \pm 2$ нүктелер туындының да үзіліс нүктелері болатын болды. Тексеріліп отырған функцияның анықталу облысы $(-\infty, -2)$, $(-2, +2)$, $(+2, +\infty)$ болады. Функция бұл интервалдарда үздіксіз.

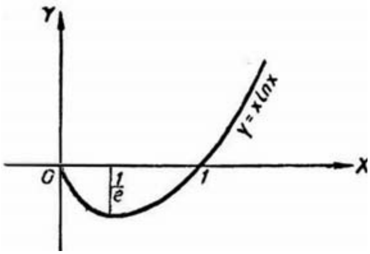
Туындының алдындағы минус таңбасын бөлшектің алымына көшірсек, онда бөлшектің бөлімі әрқашан да оң. Олай болса, туындыны өрнектейтін (42) теңдіктің оң жағындағы бөлшектің таңбасы оның алымының таңбасына тәуелді болады. Егер *x* оң болса, онда бөлшек теріс, сондықтан *y'<0;* ендеше тексеріліп отырған функция кеміме болады. Егер *x* теріс болса, онда (42) теңдіктің оң жағындағы бөлшектің таңбасы оң болады, демек, *y'> 0* болады, олай болса, *x*-тің осы мәндері үшін тексеріліп отырған функция үдемелі болады (50-чертёж).



50-чертёж

в) $y = xlnx$ функцияның үдеуін және кемуін тексеру керек. Бұл функцияның облысы $(0, \infty)$. Оның туындысын табайық: $y^1 = lnx + 1$. Функция үдемелі болу үшін мына теңсіздік $lnx +$

$1 > 0$ орындалу керек, бұл арадан $lnx > -1$ немесе $x > e^{-1} = \frac{1}{e}$. Сонымен, функция $y = xlnx$ мына $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ интервалда үдемелі болатын болды.



51-чертёж

Қаралып отырған функция кеміме болу үшін мына теңсіздік $lnx + 1 < 0$ орындалу керек. Бұл арадан $lnx < -1$ немесе $x < e^{-1} = \frac{1}{e}$. Сонымен, функция $y = xlnx$ мына $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ интервалда кеміме болатын болды (51-чертёж).

Дәлелденген теоремалардан қорытындыға келеміз: үдемелі функцияны кескіндейтін қисықтың әрбір нүктесінде оған жүргізілген жанама *OX* осінің оң бағытымен *сүйір бұрыш* құрады, кейбір жеке нүктелердегі жанама *OX* осіне параллель болуы мүмкін; ал кеміме функция графигінің әрбір нүктесінде оған жүргізілген жанама *OX* осінің оң бағытымен доғал бұрыш жасайды және графиктің кейбір жеке нүктелеріндегі жанама *OX* осіне параллель болуы мүмкін.

## § 6. Функцияның максимумы мен минимумы

1. Бір аралықта анықталған және үздіксіз $y = f(x)$ функцияны қарайық; $x_0$ – осы аралықтың ішкі нүктесі болсын.

Егер $x_0$ нүктесінің $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ аймағының ішінде жатқан барлық $x$-тер үшін келесі теңсіздік

$$f(x) < f(x_0)$$

немесе

$$f(x) - f(x_0) < 0 \tag{43}$$

орындалса, онда $x_0$ нүктесінде *f(x)* функцияның *максимумы* бар деп атайды.

Егер $x_0$ нүктесінің, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ аймағының ішінде жатқан барлық $x$-тер үшін келесі теңсіздік

$$f(x) > f(x_0)$$

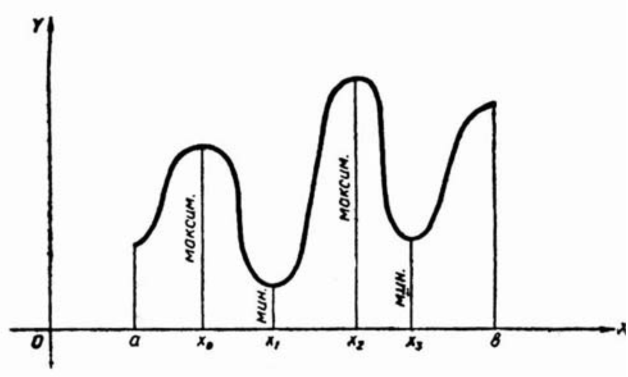
немесе

$$f(x) - f(x_0) > 0 \tag{44}$$

орындалса, онда *f(x)* функцияның $x_0$ нүктесінде *минимумы* бар деп айтады.

Максимум, минимум ұғымдарын функцияның бүкіл аралықтағы ең үлкен және ең кіші мәндерімен шатастырмау керек. Бір аралықта функцияның бірнеше максимумы және бірнеше минимумы болуы мүмкін. Мәселен, 52-чертёжде көрсетілген қисықпен кескінделетін *f(x)* функцияның екі максимумы ($x = x_0, x = x_2$ нүктелерінде), екі минимумы ($x = x_1, x = x_3$ нүктелерінде) бар.

Егер $x_0$ нүктесінде *f(x)* функцияның максимумы болса онда, геометрия тілімен айтқанда, ордината $f(x_0)$ өзімен «көршілес» ординаталардың барлығынан артық болады. Егер $x_1$ нүктесінде *f(x)* функцияның минимумы болса, онда ордината $f(x_1)$ өзімен «көршілес» ординаталардың барлығынан кем болады.



52-чертёж

Максимум мен минимумды біріктіріп айтқанда *экстремум* дейді.

Функцияның экстремум нүктелері оның өсу облыстары мен кему облыстарының шекаралығы болады. Максимум нүктесінің сол жағында функция өсіп отырады да, оң жағында кеміп отырады, ал минимум нүктесінің сол жағынан функция кеміп отырады да, оң жағында өсіп отырады.

Егер $x_0$ нүктесі аралықтың ұшы болып табылса, онда *f(x)* функцияның шеткі максимумы мен минимумы туралы айтуға тура келеді. Мәселен, *[a, b]* сегментінде берілген үздіксіз *f(x)* функцияны қарайық.

Егер *a* нүктесінің кішкентай $(a, a + \delta)$ аймағының ішінде жатқан барлық *x*-тер үшін мына теңсіздік $f(x) < f(a)$ (немесе мына теңсіздік *f(x) > f(a)* орындалса, онда *a* нүктесінде *f(x)* функцияның шеткі максимумы (немесе шеткі минимумы) бар деп айтады.

Егер *b* нүктесінің кішкентай *(b − δ, b)* аймағының ішінде жатқан *x*-тің мәндері үшін төмендегі теңсіздік *f(x) < f(b)* (немесе мына теңсіздік *f(x) > f(b)* орындалса, онда *b* нүктесінде *f(x)* функцияның шеткі максимумы (немесе шеткі минимумы) бар дейді.

2. Тиісті аралықтың қандай нүктелерінде функцияның экстремумдары болады, соны зерттейік.

Бұл қойылып отырған сұраққа келесі теорема жауап береді.

**Теорема.** *Функцияның экстремумдары оның бірінші ретті туындысы нольге айналатын немесе тіпті болмайтын нүктелерде болуы мүмкін.*

Айталық, $x = x_0$ нүктесінде *f(x)* функцияның максимумы болсын. Онда $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалдың ішінде жатқан барлық *x*-тер үшін келесі теңсіздік

$$f(x) + f(x_0) < 0$$

орындалуға тиіс. Тәуелсіз айнымалы *x* жаңағы айтылған интервалдың (аймақтың) ішінде өзгергенде мына $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ қатынастың таңбасы әр түрлі болады:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0, \text{ егер } x < x_0 \text{ болса,}$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0, \text{ егер } x > x_0 \text{ болса,}$$

$(x - x_0)$-ді нольге ұмтылтып, осы теңсіздіктердің сол жақтарынан шек алсақ, онда:

$$\lim_{x-x_0 \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \qquad (45)$$

$$\lim_{x-x_0 \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \qquad (46)$$

(45) және (46) теңсіздіктердің сол жақтары $x_0$ нүктесіндегі *f(x)* функцияның туындысы болады. Ендеше бір жағынан

$$f'(x_0) \geq 0,$$

екінші жағынан

$$f'(x_0) \leq 0,$$

олай болса

$$f'(x_0) = 0.$$

$x - x_0$ нольге ұмтылғанда қатынас $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ әр түрлі шекке ұмтылуы мүмкін, онда $f(x)$ функцияның $x_0$ нүктесінде тиянақты туындысы болмайды.

Дәлелденген теоремадан мынадай қорытындыға келеміз: егер $x_0$ нүктесінде функцияның экстремумы болса, онда бұл нүктеде оның туындысы не нольге тең, не ол нүктеде оның туындысы болмауы мүмкін. Ал егер $x_0$ нүктесінде $f(x)$ функцияның туындысы нольге тең болса, онда бұл нүктеде оның экстремумы әрқашан да болады деп айтуға тіпті болмайды. Сондықтан дәлелденген теореманы функцияның экстремумы болуының *қажетті шарты* деп айтады.

$f(x)$ функцияның туындысы нольге айналатын немесе тіпті болмайтын нүктелерді, геометрия тілімен айтқанда, $f(x)$ функцияны кескіндейтін қисыққа жүргізілген жанама *ОХ* осіне немесе *ОУ* осіне параллель болып өтетін, немесе тіпті тиянақты жанама болмайтын нүктелерді *«сынға түсетін»* немесе *«күдікті»* нүктелер деп атайды.

Функцияның экстремумы болса, тек осы нүктелерде ғана болуы мүмкін.

3. Енді функцияның экстремумы болуының жеткілікті шарттарын көрсетейік. Бұл шарттарды баяндамастан бұрын бір мәселе жөнінде келісім жасау керек. Ол келісім мынау: егер $x_0$ нүктесінің сол жағында жатқан барлық $x$-тер $(x < x_0)$ үшін $f(x)$ функцияның қабылдайтын мәндерінің барлығы оң болса, ал $x_0$ нүктесінің оң жағында жатқан барлық $x$-тер $(x > x_0)$ үшін $f(x)$-тің барлық мәндері теріс болса, онда $x$ $x_0$ арқылы өткенде (көшкенде) функция $f(x)$ өзінің таңбасын *плюстен минуске* ауыстырады дейміз. $x_0$ сынға түсетін нүктелердің бірі болсын. Осы нүктеде функцияның экстремумы болуының жеткілікті шарттары келесі теорема арқылы тұжырымдалады.

**Теорема.** *Егер* $(a, b)$ *интервалының мүмкін* $x_0$ *нүктесінен* $(a\angle x_0 < b)$ *басқа барлық нүктелерінде дифференциалданатын үздіксіз функцияның туындысы* $f'(x)$ *өзінің таңбасын, айнымалы* $x$ $x_0$ *арқылы өткенде плюстен минуске ауыстырса, онда* $x_0$ *нүктесінде* $f(x)$ *функцияның максимумы болады; ал егер* $x$ $x_0$ *арқылы өткенде туынды* $f'(x)$ *өзінің таңбасын минустен плюске ауыстырса, онда* $x_0$ *нүктесінде* $f(x)$ *функцияның минимумы болады.*

Туынды $f'(x)$ өзінің таңбасын плюстен минуске ауыстырады деп ұйғарайық. Сонда бағанағы тұжырымдалған келісім бойынша $x_0$ нүктесінің сол жағында жатқан барлық $x$-тер үшін $f'(x)$ туындының таңбасы оң да, ал $x_0$ нүктесінің оң жағында жатқан барлық $x$-тер үшін $f'(x)$туындының таңбасы теріс, яғни

$$f'(x) > 0, \text{ егер } x < x_0;$$

$$f'(x) < 0, \text{ егер } x_0 < x.$$

Енді мына $f(x)-f(x_0)$ айырманы қарайық та, бұған Лагранж теоремасын қолданайық. Сонда:

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0). \tag{47}$$

Егер $x < x_0$ болса, онда, біріншіден, $\xi, x$ пен $x_0$-дің арасында жатады, яғни $x < \xi \angle x_0$ сондықтан $f'(\xi) > 0$, екіншіден, $x - x_0 < 0$. Олай болса, (47) теңдіктің оң жағы теріс. Демек,

$$f(x) - f(x_0) < 0.$$

Егер $x > x_0$ болса, онда біріншіден, $\xi, x_0$ мен $x$-тің арасында жатады, яғни $x_0 < \xi < x,$ ендеше $f(\xi) < 0$; екіншіден, $x - x_0 > 0$. Олай болса (47) теңдіктің оң жағы $f'(\xi)\ (x - x_0)$ тағы да теріс, яғни $f'(\xi)(x - x_0) \angle 0$. Демек, тағы да:

$$f(x) - f(x_0) < 0.$$

Сонымен, $x_0$ нүктесінің сол жағында және оң жағында, былайша айтқанда, $x_0$ нүктесінің аймағында жатқан барлық $x$-тер үшін мына теңсіздік

$$f(x) - f(x_0) < 0$$

орындалатын болды. Бұл теңсіздіктің орындалуы $x_0$ нүктесінде $f(x)$ функцияның максимумы болатындығын дәлелдейді.

Теореманың функцияның минимумы жөніндегі екінші бөлімі де дәл осылай дәлелденеді. Сондықтан оның дәлелденуіне тоқтамаймыз (оқушылардың өздері де дәлелдей алады).

Осы дәлелденген теоремадан функцияның экстремумын табу жөнінде мынадай ережеге келеміз: алдымен зерттеуге жататын функцияның туындысын табамыз да, оны нольге теңейміз; сонан кейін мұның нәтижесінде шыққан теңдеудің түбірлерін (шешімдерін) табамыз; табылған түбірлер сынға түсетін немесе күдікті нүктелер болып табылады. Бұл нүктелердің әрқайсысын алып, оның аймағында функцияның бірінші туындысы өзінің таңбасын ауыстыра ма, ауыстырмай ма соны зерттейміз.

4. Егер туынды $f'(x)$ *(a, b)* интервалының барлық нүктелерінде бар болатын болса және оның бір-ақ нүктесінде,

атап айтқанда, $x_0$ нүктесінде, $(a < x_0 \angle b)$ нольге айналатын болса, онда осы $x_0$ нүктесінде $f(x)$ функцияның экстремумының бар-жоғын білу үшін, $x_0$ нүктесінің сол жағында жатқан белгілі бір $x_1$ нүктесіндегі және оның оң жағында жатқан бір белгілі $x_2$ нүктесіндегі $f'(x)$туындының таңбасының әртүрлі болатындығы тағайындалса болғаны. Былайша айтқанда, $x_1$ нүктесінде $f'(x)$ туындының таңбасы қандай болса, $x_1$ мен $x_0$-дің арасындағы барлық нүктелерде де оның таңбасы сондай болады; сол сияқты $x_2$ нүктесінде $f'(x)$ туындының таңбасы қандай болса, $x_0$ мен $x_2$-нің арасындағы барлық нүктелерде де сондай болады.

Мұны дәлелдеу үшін келесі лемма мен теореманы дәлелдеуге тура келеді.

**Лемма.** Егер функция $f(x)$, $[a, b]$ сегментінің барлық ішкі нүктелерінде дифференциалданатын болса және сегменттің ұштарындағы $f'(x)$ туындының таңбалары әр түрлі болса, $[f'(a) > 0,\ f'(b) < 0]$, онда $[a, b]$ сегменттің бойында жатқан бір $\xi$ нүктесінде туынды нольге айналады, яғни $f'(\xi) = 0$.

Функция $f(x)$, $[a, b]$ сегментінде дифференциаланатын болғандықтан, ол сегменттің барлық нүктелерінде үздіксіз. Олай болса, Вейерштрасс теоремасы бойынша бұл сегментте функцияның ең үлкен мәні болады. Осы ең үлкен мән сегменттің ұштарында қабылданылмайтынын дәлелдейік. Сегменттің сол жақтағы ұшында, яғни $a$ нүктесінде функция $f(x)$ өзінің ең үлкен мәнін қабылдайды деп айтылып отырған пікірге қарсы ұйғарайық. Аргумент $x$-ке $a$ нүктесінде өсімше берейік. Сонда $f'(a) > 0$ болғандықтан,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} > 0$$

болады. Бұл арадан аса кішкентай $\Delta x > 0$ үшін $\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} > 0$ болады немесе $f(a + \Delta x) - f(a)$. Демек, $f(a)$ ең үлкен мән бола алмайды. Ендеше біздің ұйғаруымыз дұрыс емес. Сол сияқты $b$ нүктесінде де функция $f(x)$ өзінің ең үлкен мәнін қабылдай алмайды.

Сонымен, функция $f(x)$ өзінің ең үлкен мәнін $[a, b]$ сегментінің тек бір ішкі $\xi$ нүктесінде ғана қабылдай алады. Онда Ферма теоремасы бойынша бұл нүктедегі функцияның туындысы нольге тең, яғни $f'(\xi) = 0$.

**Дарбу теоремасы.** *Егер f(x) функция [a, b] сегментінің әрбір нүктесінде дифференциалданатын болса, онда туынды f(x) мына f'(a), f'(b) екі санның арасында жатқан барлық мәндерді қабылдайды.*

Айталық, $A$ айтылып отырған *f'(a), f'(b)* екі санның арасында жатқан кез келген сан болсын, яғни:

$$f'(a) < A < f'(b).$$

Көмекші $\varphi(x)$ функцияны былай құрайық:

$$\varphi(x) = f(x) - Ax.$$

Функциялар *f(x)* және *Ax, [a, b]* сегментінде дифференциалданатын болғандықтан, көмекші функция *φ(x)* ол да осы сегментте дифференциалданатын болады. Енді осы көмекші функцияның туындысын табайық:

$$\varphi'(x) = f'(x) - A.$$

Бұл арадан $\varphi'(a) = f'(a) - A < 0,\ \varphi'(b) = f'(b) - A > 0.$

Сонымен, көмекші функция $\varphi(x)$ жоғарыдағы лемманың шарттарын түгел қанағаттандыратын болды. Ендеше *[a, b]* сегментінің бойында жатқан бір ξ нүктесінде көмекші $\varphi(x)$ функцияның туындысы $\varphi'(x)$ нольге айналады, яғни $\varphi'(\xi) = 0$ немесе $f'(\xi) - A = 0$; бұл арадан $f'(\xi) = A$. Теорема дәлелденді.

Бұл теоремадан мынадай қорытындыға келуге болады: егер туынды $f'(x)$ әрбір нүктеде бар болатын болса, онда оның бірінші текті үзілісі болмайды.

Енді 4-пунктте тұжырымдалған пікірді дәлелдейік.

Айталық, $x_1 < x_0, f'(x_1) > 0$ болсын. Енді $x_1$ мен $x_0$-дің арасында жатқан кез келген ξ нүктесінде *f'(x)* туындының таңбасы оң болатынын, яғни $f'(\xi) > 0$ болатындығын дәлелдеу керек. Егер $f'(\xi)\angle 0$ болатын болса, онда лемма бойынша $x_1$ мен $\xi$-дің арасында жатқан бір $\eta$ нүктесінде $(x_1 \angle \eta < \xi)$ туынды *f(x)* нольге айналады, яғни $f'(\eta) = 0$. Бұлай болу мүмкін емес, өйткені бұл жағдай қойылған шартқа қайшы келеді.

Тағы бір ескере кететін мәселе мынау: егер $x_1\ x_2\ ...,\ x_n$ сынға түсетін немесе тексерілуге жататын нүктелер болса және оларды мынадай тәртіппен

$$\alpha < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$$

орналастырсақ, онда әрбір $(x_k, x_k + 1)$ интервалдың ішінде жатқан нүктелерде туынды $f'(x)$ бар болады және бір тиянақты таңбаға ие болады (өйткені бұл туындыны нольге және шексіздікке айналдыратын немесе туынды болмайтын нүктелер тексерілуге жататын нүктелердің ішінде). Егер әрбір $\left(x_{k,}x_{k+1}\right)$ интервалда туынды $f'(x)$ тиянақты бір таңбаға ие болмаса, онда лемма бойынша осы интервалдың ішіндегі бір нүктеде ол нольге айналады да, бағанағы тексерілуге жататын нүктелерге тағы да бір нүкте келіп қосылады. Бұлай болу мүмкін емес.

Сөйтіп, мына интервалдарда

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, b)$$

туынды $f'(x)$ тиянақты бір ғана таңбаға ие болатын болды, былайша айтқанда, бұл интервалдарға + және – таңбалары сәйкес келетін болды. Егер бұл таңбалар кезекпен келсе, онда экстремум болғаны.

5. Мысалдар келтірейік.

а) $f(x) = (x+1)^2(x-1)^3$ функцияның экстремумын зерттеу керек. Бұл функцияның анықталу облысы $(-\infty, \infty)$. Туындысы

$$f'(x) = 5(x+1)\,(x-1)^2\left(x+\frac{1}{5}\right)$$

болады.

Тексерілуге жататын нүктелерді табу үшін бұл туындыны нольге теңейміз. Сонда:

$$5(x+1)\,(x+1)^2\left(x+\frac{1}{5}\right) = 0,$$

бұл арадан

$$x_1 = -1,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = -\frac{1}{5}.$$

Функцияның анықталу облысы келесі

$$(-\infty, -1], \left[-1, -\frac{1}{5}\right], \left[-\frac{1}{5}, 1\right], [1, +\infty).$$

бөліктерге жіктелетін болды.

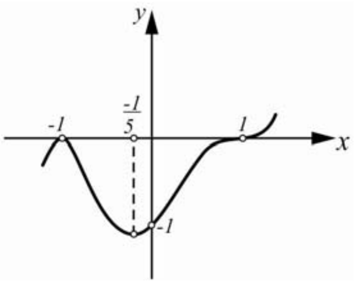
Бірінші бөлікте $f'(x)$ туындының таңбасы оң, екінші бөлікте теріс, үшінші бөлікте оң, төртіншіде де оң. Оларды мынадан байқауға болады: егер $x < -1$ болса, онда

$$x+1 < 0, (x-1)^2 > 0, \left(x+\frac{1}{5}\right) < 0, \text{ сондықтан}$$

$$f'(x) = 5(x+1)(x-1)^2\left(x+\frac{1}{5}\right) > 0, \text{ егер } -1 < x < -\frac{1}{5},$$

$$\text{онда } (x+1) > 0, (x-1)^2 > 0, \left(x+\frac{1}{5}\right) < 0, \text{ сондықтан}$$

$f^{'}(x) < 0$. Бұл арадан мынадай қорытындыға келеміз: $x = -1$ нүктесінде зерттелініп отырған функцияның максимумы бар, $x = -\frac{1}{5}$ нүктесінде минимумы бар; $x = 1$ нүктесінде экстремум жоқ (53-чертеж).



53-чертеж

б) Мына $f\ (x) = cos^3\, x + sin^3 x$ функцияның экстремумын зерттеу керек. Алдымен туындысын табамыз:

$$f^{'}(x) = 3\sin x \cos x\ (\sin x - \cos x).$$

Сынға түсетін нүктелерді табу үшін, бұл туындыны нольге теңейміз.

Сонда:

$$\sin x \cos x\ (\sin x - \cos x) = 0.$$

Зерттеленіп отырған функцияның периоды $2\pi$ болғандықтан, алдымыздағы теңдеудің түбірлерін (шешімдерін) $(0,2\pi)$ аралығынан іздейміз.

Егер $\sin x = 0$, онда $x_1 = 0,\ x_2 = \pi,\ x_3 = 2\pi.$

Егер $\cos x = 0$, онда $x_4 = \frac{\pi}{2},\ x_5 = \frac{3}{2}\pi.$

Егер $\sin x - \cos x = 0$, онда $x_6 = \frac{\pi}{4},\ x_7 = \frac{5\pi}{4}.$

Енді мына интервалдарды қараймыз:

$$\left(0,\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right),\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right),$$

$$\left(\pi,\frac{4}{5}\pi\right),\left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right),\left(\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right),\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right).$$

$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ интервалында: $\sin 2x > 0, \sin x - \cos x < 0$, ендеше $f^{'}(x) > 0$.

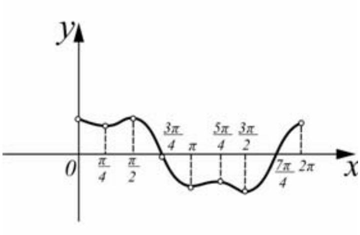
$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ интервалында $\sin 2x > 0, \sin x - \cos x > 0$, ендеше $f^{'}(x) > 0$. Сондықтан $x_6 = \frac{\pi}{4}$ нүктесінде $f\ (x)$ функцияның минимумы бар.

$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ интервалында: $sin 2x > 0, \sin x - \cos x > 0$, ендеше $f^{'}(x) < 0. x_4 = \frac{\pi}{2}$ нүктесінде $f(x)$ функцияның максимумы бар.

$\left(\pi, \frac{3\pi}{4}\right)$ интервалында: $sin2x > 0, \sin x - \cos x > 0,$ ендеше $f^{'}(x) > 0. x_2 = \pi$ нүктесінде зерттеліініп отырған функцияның минимумы бар.

$\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$ интервалында: $sin2x > 0, \sin x - \cos x < 0,$ ендеше $f^{'}(x) < 0, x_7 = \frac{5\pi}{4}$ нүктесінде зерттеліініп отырған функцияның максимумы бар.

$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ интервалында: $sin2x > 0, \sin x - \cos x < 0,$ ендеше $f^{'}(x) < 0. x_5 = \frac{3\pi}{2}$ нүктесінде зерттеліініп отырған функцияның минимумы бар.



54-чертеж

Зерттеліініп отырған функция периодты болғандықтан, $x = 2\pi$ нүктесінде оның максимумы бар (54-чертеж).

в) Мына $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - x^2$ функцияның экстремумын зерттеу керек. Бұл функцияның анықталу облысы $(-\infty, \infty)$. Алдымен туындысын табайық:

$$f^{'}(x) = 2\left(x^{-\frac{1}{3}} - x\right) = \frac{2\left(1 - x^{\frac{4}{3}}\right)}{\sqrt[3]{x}}.$$

Енді сынға түсетін нүктелерді табу үшін бұл туындыны нольге теңеу керек. Сонда $1 - x^{\frac{4}{3}} = 0$ немесе $x^4 - 1 = 0$, бұл арадан $x_1 = -1, x_3 = +1$; туынды болмайтын немесе шексіздікке айналатын нүкте $x_2 = 0$. Сонымен, сынға түсетін нүктелер мыналар болады.

$$x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = +1.$$

Зерттеліініп отырған функцияның анықталу облысы мына интервалдарға

$$(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, +\infty)$$

жіктелетін болды.

$$\begin{aligned} &f'(x) > 0, \quad \text{егер} - \infty < x < -1, \\ &f'(x) < 0, \quad \text{егер} - 1 < x < 0, \end{aligned}$$

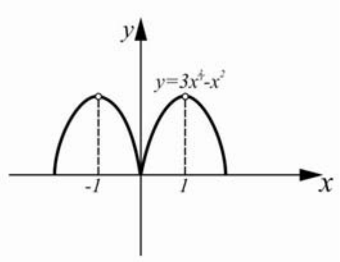
ендеше $x_1 = -1$ нүктесінде зерттелініп отырған функцияның максимумы бар.

$$f'(x) < 0, \quad \text{егер} -1 < x < 0,$$
$$f'(x) > 0, \quad \text{егер } 0 < x < 1,$$

ендеше $x_2 = 0$ нүктесінде зерттелініп отырған функцияның максимумы бар.

$f'(x) > 0, \quad$ егер $0 < x < 1$,
$f'(x) < 0, \quad$ егер $1 < x < \infty$,
ендеше $x_3 = 1$ нүктесінде қаралып отырған функцияның максимумы бар.

Зерттелініп отырған функция жұп функция, сондықтан оның графигі ОУ осіне қарағанда симметриялы (55-чертеж).



55-чертеж

## §6. Экстремумды екінші ретті туынды арқылы зерттеу

1. $x_o$ сынға түсетін нүктелердің бірі болсын, яғни бұл нүктеде $f^{'}(x_o) = 0$ болсын. Осы $x_o$ нүктесінде зерттелінетін функцияның екінші ретті туындысы бар болатын болсын және ол нольге тең болмасын. Мына $x - x_o$ айырманы $h$ арқылы белгілейік, яғни $x - x_0 = h$, бұл арадан $x = x_0 + h$. Экстремум анықтамасын сипаттайтын мына айырманы алайық:

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Бұл айырмаға шектеулі өсімше жөніндегі Лагранж теоремасын қолдансақ, онда

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \Theta h)\,; \qquad (48)$$

мұнда $0 < \Theta < 1$.

(48) теңдіктің оң жағын $\Theta h$-қа көбейтіп және бөліп табамыз:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{\theta h^2[f^{'}(x_0+\theta h)+f'(x_0)]}{\theta h}, \qquad (49)$$

өйткені бәрібір $f^{'(x_0)} = 0$.

(49) теңдіктің сол жағындағы айырманың таңбасы тек мына $\frac{f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)}{\theta h}$ қатынастың ғана таңбасына тәуелді болады, өйткені $\Theta -$ оң бөлшек, $h -$ екі дәрежелі.

Егер $\Theta h$-ты нольге ұмтылтып шекке көшсек, онда жаңағы айтылған қатынастың таңбасы қандай болса, оның шегінің таңбасы да сондай болады. Демек, (49) теңдіктің сол жағындағы айырманың таңбасы мына шектің

$$\lim_{\theta h\to 0}\frac{f^{'}(x_0+\theta h)-f^{'}(x_0)}{\theta h}=f''(x_0),$$

яғни $x_0$ нүктесіндегі функцияның екінші ретті туындысының таңбасына тәуелді болатын болды.

Егер $f''(x_0)<0$ болса, онда $f(x)-f(x_0)<0$ болады. Сондықтан $x_0$ нүктесінде $f(x)$ функцияның максимумы бар.

Егер $f''(x_0)>0$ болса, онда $f(x)-f(x_0>0)$ болады. Демек, *x* нүктесінде *f(x)* функцияның минимумы бар.

Бұл арадан біз мынадай ережеге келеміз: берілген *f(x)* функцияның экстремумын зерттеу үшін, алдымен бұл функцияның бірінші ретті туындысын тауып алып, оны нольге теңейміз; сонан соң осының нәтижесінде пайда болған теңдеудің түбірлерін іздейміз (бұл түбірлер сынға түсетін нүктелер болып табылады); бұдан кейін функцияның екінші ретті туындысын тауып, ондағы аргументтің орнына сыналатын нүктелерді біртіндеп қоямыз; егер мұның нәтижесінде *екінші ретті туындының таңбасы оң болса, онда тексеріліп отырған нүктеде функцияның минимумы болғаны, теріс болса, онда максимум болғаны.*

Бір мысал келтірейік:

$$f(x)=x^4-4x^3+4x^2$$

функцияның экстремумын зерттеу керек. Бұл функцияның анықталу облысы $(-\infty,\infty.)$ Енді оның туындысын табайық:

$$f^{'}(x)=4x(x^2-3x+2).$$

Сынға түсетін нүктелерді табу үшін бұл туындыны нольге теңейміз:

$$4x(x^2-3x+2)=0,$$

бұл арадан:

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2.$$

Енді зерттеліп отырған функцияның екінші ретті туындысын табамыз:

$$f^{''}(x)=4(3x^2-6x+2).$$

Сынға түсетін нүктелердегі екінші ретті туындының мәндері болады:

$$a)\quad f^{''}(0)=8>0\quad ,$$

олай болса $x_1=0$ нүктесінде зерттеліп отырған функцияның минимумы болады.

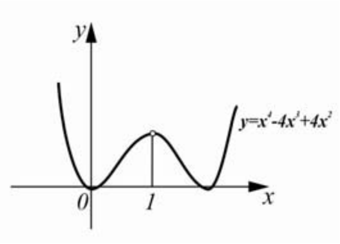
$$б)\quad f^{''}(1)=-4<0,$$

ендеше $x_2=1$ нүктесінде берілген функцияның максимумы бар.

$$в)\quad f^{''}(2)=8>0,$$

демек, $x_3 = 2$ нүктесінде қаралып отырған функцияның минимумы бар.

Берілген функцияның графигі 56-чертежде көрсетілген.



56-чертеж

**2.** Егер тексерілуге жататын $x_0$ нүктесінде зерттелінетін функцияның екінші ретті туындысы $f''(x)$ нольге айналса, онда оның жоғары ретті туындыларын қарастыруға тура келеді. Мұндай жағдайда Тейлор формуласын пайдаланамыз.

Айталық, $x_0$ нүктесінде зерттелініп отырған $f(x)$ функцияның бірінші, екінші, онан әрі қарай (n–1)-ші ретті туындылары нольге айналсын, ал оның n-ші ретті туындысы $f^{(n)}$ $(x)$ бұл нүктеде нольден айрықша болсын, яғни:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

ал

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Осы қойылған шарттардан, зерттелінетін функцияның n-ші ретке дейін шектеулі туындыларының барлығы өзінен-өзі айқын көрініп тұр. Ендеше мына $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ айырманы $x_0$ нүктесінің аймағында Тейлор формуласы бойынша жіктеп жазамыз:

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h}{1} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) +$$

$$+\frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h).$$

Қойылған шарттарды еске алсақ, онда:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h). \qquad (50)$$

$$(0 < \theta < 1)$$

$x_0$ нүктесінде n-ші ретті $f^{(n)}(x)$ туындыны үздіксіз деп есептейміз. Онда оң, соншама аз $\delta$ саны табылып, келесі теңсіздікті $|h| < \delta$ қанағаттандыратын $h$-тың барлық мәндері үшін мына $f^{(n)}(x_0 + h), f^{(n)}(x_0)$ екі санның таңбасы бірдей болады. Ал $|\theta h| < |h| < \delta$ болғандықтан, мына $f^{(n)}(x_0 + \theta h), f^{(n)}(x_0)$ екі санның таңбасы бірдей болады. Демек, $f^{(n)}$ $(x_0 + \theta h) \neq 0$. Осы айтылған пікірден мынадай қорытындыға келеміз: егер $n$-жұп болса, онда $h$-тың таңбасы қандай болса да, бірінші $\frac{h^n}{n!}$ көбейткіштің таңбасы оң болады. Сондықтан, $n$-ші ретті $f^{(n)}(x_0)$ туындының таңбасы қандай болса, (50) теңдіктің сол жағында айырманың таңбасы да сондай болады. Егер $f^{(n)}(x_0) > 0$ болса, онда $f^n(x_0 + \theta h) > 0$, демек $x_0$ нүктесінде *f (x)* функцияның минимумы болады. Егер $f^{(n)}(x_0) < 0$ болса, онда $f^n(x_0 + \theta h) < 0$, демек $x_0$ нүктесінде *f (x)* функцияның максимумы болады.

Егер *n* тақ сан болса, онда $h^n$-нің таңбалары әр түрлі болады. Сондықтан да $x_0$ нүктесінің кішкентай аймағында (50) теңдіктің сол жағындағы айырманың таңбасы әр түрлі болады, былайша айтқанда, бұл аймақтың ішінде жатқан нүктелер үшін айырма $f(x) - f(x_0)$ бір таңбаны сақтай алмайды. Олай болса бұл жағдайда $f(x)$ функцияның экстремумы жоқ.

Осы айтылғандардан мынадай қорытынды жасаймыз: *егер $x = x_0$ нүктесінде $f(x)$ функцияның n-ші ретке дейін барлық туындылары бар болса және*

$$f^{'}(x_0) = f^{''}(x_0) = \cdots = f^{n-1}(x_0) = 0,$$

*ал*

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

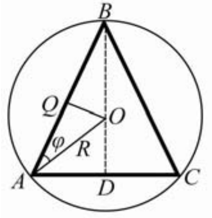
*онымен бірге n-ші ретті $f^{(n)}(x)$ туынды $x_0$ нүктесінде үздіксіз болса, онда $x_0$ нүктесінде экстремумның бар-жоқтығы n-нің жұптығы мен тақтығына байланысты: n жұп болса, онда $x_0$ нүктесінде $f(x)$ функцияның экстремумы бар, n тақ болса онда экстремум жоқ.*

## § 7. Максимум мен минимум теориясының есеп шығаруға қолданылуы

Максимум мен минимум теориясын қолданып, тәжірибеде кездесетін есептерді қалай шығаруға болады? Міне, осыны көрсету мақсатымен геометрия және физика салаларынан біраз мысалдар келтіреміз. Берілген есептердің шарттары бойынша тиісті функцияны құрып, оның экстремумын зерттейміз.

*1) Радиусы R берілген шарға толық беті ең үлкен болатындай етіп тік конусты іштей сызу керек.*

Бұл есепте іздеп отырған функция – шарға іштей сызылған тік конустың бетінің



57-чертеж

ауданы. Оны $S$ арқылы белгілейік. Конустың бір элементін осы функцияның аргументі үшін алуға тура келеді. Бірақ бұл жөнінде ойлану керек, мәселе сонда. Конустың төбесіндегі бұрышты $2\varphi$ арқылы белгілеп іздеп отырған $S$-ті осы $\varphi$ арқылы өрнектейік (57-чертеж).

Геометриядан белгілі формула бойынша:

$$S = \pi r^2 + \pi r l. \tag{51}$$

Мұнда $r$ – конустың табанының радиусы; $l$ – жасаушысының ұзындығы.

Чертежге қарап, мына қатынастарды табуға болады:

$$AQ = \frac{l}{2} = R\, cos\varphi, \quad l = 2R\, cos\varphi,$$
$$r = lsin\varphi = 2Rsin\varphi \cdot cos\varphi.$$

$r$ мен $l$-дің осы мәндерін (51) формулаға апарып қойып табамыз:

$$S(\varphi) = 2\pi R^2 \sin 2\varphi \cos\varphi\, (1 + \sin\varphi)$$

функция құрылды; енді осы функцияның максимумын зерттеу керек. Ол үшін

$$S'(\varphi) = 2\pi R^2[2\cos 2\varphi \cos\varphi(1 + \sin\varphi) \\ - \sin\varphi \sin 2\varphi(1 + \sin\varphi) + \\ + \sin 2\varphi \cos^2\varphi].$$

Сынға жататын нүктелерді табу үшін бұл туындыны нольге теңейміз:

$$2\cos 2\varphi \cos\varphi\, (1 + \sin\varphi) - \sin\varphi \sin 2\varphi\, (1 + \sin\varphi) + \\ + \sin 2\varphi \cos^2\varphi = 0$$

Кейінгі теңдеудің екі жағын $\cos\varphi \sin 2\varphi \quad (1 + \sin\varphi)$ өрнекке бөлсек, онда:

$$2\text{ctg}2\varphi - \text{tg}\varphi + \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} = 0. \tag{52}$$

Екінші жағынан:

$$\frac{\cos\varphi}{1 + \sin\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} \cdot \frac{\cos^2\varphi}{1 + \sin\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}(1 - \sin\varphi) \\ = \sqrt{1 + \text{tg}^2\varphi} - \text{tg}\varphi.$$

Бұдан кейін (52) теңдеу мына түрге көшеді:

$$\frac{1 - \text{tg}^2\varphi}{\text{tg}\varphi} - 2\text{tg}\varphi + \sqrt{1 + \text{tg}^2\varphi} = 0$$

немесе

$$8\text{tg}^4\varphi - 7\text{tg}^2\varphi + 1 = 0.$$

Осы биквадрат теңдеуді шешіп, мынаны табамыз:

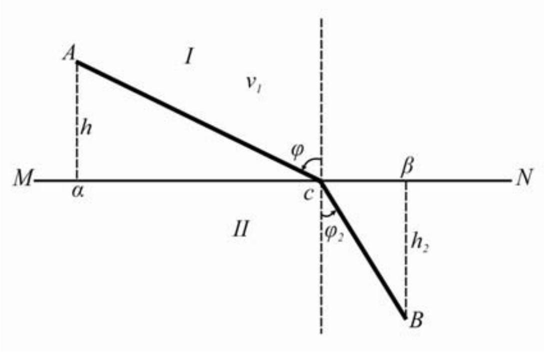
$$tg\,\varphi = \frac{\sqrt{7+\sqrt{17}}}{4}.$$

$\varphi$ бұрышының осы мәнінде конустың толық беті өзінің ең үлкен мәнін қабылдайды. Енді конустың биіктігін осы $\varphi$ бұрышы арқылы өрнектейік:

$$BD = H = l\cos\varphi = 2R\cos^2\varphi = \frac{2R}{1+\mathrm{tg}^2\varphi} = \frac{32k}{23+\sqrt{17}} =$$
$$= \frac{R}{16}\left(23-\sqrt{17}\right).$$

Биіктіктің осы мәнінде конустың толық беті ең үлкен мәнді қабылдайды. Оған көз жеткізу үшін құрылған S($\varphi$) функцияның екінші ретті туындысын тауып және оны tg$\varphi$ арқылы өрнектеп, сонан кейін бұл өрнектегі tg$\varphi$-дің орнына оның мына $\frac{\sqrt{7+\sqrt{17}}}{4}$ мәнін қоямыз.

*2) Материалды нүкте I ортада $\upsilon_1$ жылдамдықпен II ортада $\upsilon_2$ жылдамдықпен қозғалады. Мұнда А нүктесі мен В нүктесі орталарды бір-бірінен бөлетін шекараның бойында жатпайды, бұл нүктелердің шекарадан қашықтықтары $h_1$ және $h_2$, олардың MN шекараға түскен проекцияларының бір-бірінен қашықтығы $\alpha\beta = \alpha$ (58-чертеж). Бірінші ортадағы А нүктесінен екінші ортадағы В нүктесіне ең аз уақытта барып-жету үшін ол нүкте қай жолмен жүру керек?*



58-чертеж

Бұл есепте ізделетін функция уақыт Т. Осы Т-ні қозғалушы нүктенің абсциссалары арқылы өрнектеу керек. Егер А нүктесінің абсциссасын *x* деп белгілесек, онда В нүктесінің абсциссасы *a–x* болады. Нүктенің қозғалысын бірқалыпты қозғалыс деп есептейміз. Сонда:

$$AC = v_1 t_1, BS = v_2 t_2,$$

бұл арадан:

$$t_1 = \frac{AC}{v_1}, t_2 = \frac{BC}{v_2}, AC = \sqrt{x^2 + h_1{}^2}\ ;\ BC = \sqrt{(a - x)^2 + h_2{}^2}.$$

Ізделініп отырған функция мынадай болады:

$$T(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(a - x)^2 + h_2^2}}{v_2}.$$

Енді осы функцияның экстремумын зерттеу керек. Ол үшін алдымен оның бірінші ретті туындысын табамыз да, сонан соң оны нольге теңейміз:

$$T\ (x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{a - x}{v_2\sqrt{(a - x)^2 + h_2{}^2}};$$

$$\frac{x}{v_1\sqrt{x_1^2 + h^2}} - \frac{a - x}{v_2\sqrt{(a - x)^2 + h_2^2}} = 0.$$

Бұл арадан:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{a - x}{\sqrt{(a - a)^2 + h_{\ 2}^{\ 2}}}$$

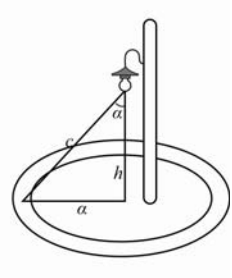
Немесе:

$$\cos(90^{\circ} - \varphi_1) = \frac{v_1}{v_2}\cos(90 - \varphi_2),$$

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Сонымен, физиканың оптика бөлімінен белгілі заңға келдік: сәуленің түсу бұрышының синусы мен сыну бұрышының синусының қатынасы қандай болса, оның бірінші ортадағы жылдамдығы мен екінші ортадағы жылдамдығының қатынасы сондай болады.

*3) Коньки тебетін жолдың формасы – дөңгелек. Осы дөңгелектің дәл центріне бағана қағылған, бағанаға ілінген фонарь бар. Коньки тебетін жол мейлінше жарық болу үшін фонарь қандай биіктікте іліну керек (59-чертеж)?*



59-чертеж

Бұл есепте ізделінетін функция жарықталыну шамасы, оны $F$ деп белгілейік. Әрине, $F$-тің шамасы фонарь қандай биіктікте ілінеді, соған тәуелді болады, бұл биіктікті $h$ деп белгілейік. Сонда физикадан белгілі мына формуламен

$$F = \frac{\cos\alpha}{c^2}$$

пайдаланамыз.

59-чертёж бойынша

$$c = \sqrt{h^2 + a^2}, \ \cos\alpha = \frac{h}{c} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}}.$$

Сонда іздеп отырған функция болады:

$$F(h) = \frac{h}{(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Құрылған функцияның бірінші ретті туындысын тауып, сонан кейін оны нольге теңесек, сонда:

$$F^{'}(h) = \frac{(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - 3h^2(h^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}{(h^2 + a^2)^3},$$

$$(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - 3h^2(h^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

бұл арадан:

$$h^2 + a^2 - 3h^2 = 0,$$

$$h = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0{,}7\, a,$$

$h$-тың осы мәнінде функция $F(h)$ максимумдық мәнге жетеді. Оған көз жеткізу қиын емес.

*Ескертпе.* Бұл ескертпе есептер шығару жолына жататын ескертпе емес, функциялардың ең үлкен мәндері мен ең кіші мәндері туралы ескертпе.

Егер функция $f(x)$, $[a, b]$ сегментінде үздіксіз болса, онда ол бұл сегментте өзінің ең үлкен мәнін (дәл жоғарғы шекаралығын) және ең кіші мәнін (дәл төменгі шекаралығын) қабылдайтыны бізге белгілі. Осы мәндерді қалай табу керек?

Егер ең үлкен мән сегменттің бір ішкі нүктесінде қабылданса, онда ол $f(x)$ функцияның максимумдарының біреуімен дәл келеді. Ең үлкен мән, сол сияқты ең кіші мән, сегменттің ұштарында да қабылданылуы мүмкін. Сондықтан *f(x)* функцияның ең үлкен мәнін табу үшін, $[a, b]$ сегментінің ішкі нүктелерінде оның барлық максимумдарын табамыз да, олардың барлығын *f(a), f(b)* мәндермен салыстырамыз. Осылардың ішінен қайсысы үлкен болса, сонысы *f(x)* функцияның ең үлкен мәні болып табылады.

Сол сияқты *f(x)* функцияның ең кіші мәнін табу үшін $[a, b]$ сегментінің ішкі нүктелеріндегі оның барлық минимумдарын табамыз да, оларды мына *f(a), f(b)* мәндермен салыстырамыз. Осылардың арасынан қайсысы кіші болса, сонысы *f(x)* функцияның ең кіші мәні болып табылады.

Бір мысал келтірейік: $f(x) = \sqrt{(1 - x^2)(1 + 2x^2)}$.

Берілген функцияның анықталу облысы $[-1, 1]$, бұл сегментте функция үздіксіз, ендеше ол өзінің ең үлкен мәнін қабылдайды. Міне, осы ең үлкен мәнді табу керек. Ол үшін радикал ішіндегі өрнекті *g (x)* арқылы белгілеп, алдымен соның ең үлкен мәнін табамыз:

$$g'(x) = 2x(1 - 4x^2) = 0,$$

бұл арадан:

$$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{2},$$

$$g''(x) = 2 - 24x^2.$$

Енді тексерілуге жататын нүктелерді біртіндеп екінші ретті туындыға *x*-тің орнына қойсақ, онда:

$$g''\left(-\frac{1}{2}\right) = -4 < 0, \quad g''(0) = 2 > 0, \qquad g''\left(\frac{1}{2}\right) = -4 < 0.$$

Сонымен, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$ нүктелерде *g (x)* функцияның максимумы болатын болды, ал $x_2$=0 нүктеде минимумы болады.

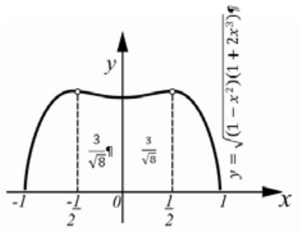
Енді $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$ нүктелердегі *g (x)* функцияның мәндері болады:

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}125;$$

ал $x_2 = 0$ нүктедегі оның мәні болады:

$$g(0) = 1.$$

Сонымен, *g (x)* функцияның $[-1, \ 1]$ сегменттегі ең үлкен мәні 1,125 болады; ал бастапқы берілген $f(x)$ функцияның ең үлкен мәні $\frac{3}{\sqrt{8}}$ болады.



60-чертеж

Бастапқы берілген функцияның графигі 60-чертежде көрсетілген.

### *Жаттығулар*

1. Функция $f(x)=\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{4}$, *мына* $\left[2-\sqrt{3},\quad 2+\sqrt{3}\right]$ сегментте Ролль теоремасының шарттарын қанағаттандыра ма? Егер қанағаттандырса, онда бұл функцияның туындысын нольге айналдыратын, көрсетілген сегменттің бойында жатқан $\xi$ нүктесін табу керек.

Жауабы: $\xi$=1.

2. Функция $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-4$ *мына* $[-8{,}8]$ сегментте Ролль теоремасының шарттарын қанағаттандыра ма?

3. Функция $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{егер } x \ \leq 0 \text{ болса;} \\ e^x, \quad \text{егер } x>0 \text{ болса,} \end{cases}$

мына $[-1,+1]$ сегментте Ролль теоремасының шарттарын қанағаттандыра ма?

4. Функция $f(x)=\sqrt[5]{x^4(x-1)}$ мына $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ сегментте Лагранж теоремасының шарттарын қанағаттандыра ма?

5. Функциялар $f(x)=e^x$ жəне $\varphi\ (x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ мына $[-2{,}2]$ сегментінде Коши теоремасының шарттарын қанағаттандыра ма?

Лопиталь ережесін қолданып, келесі шектерді табу керек:

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$. Жауабы: 2.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x\cos x}{sin^3x}$. Жауабы: $\dfrac{1}{3}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln\,(1+x)}$. Жауабы: $3a$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\,(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$. Жауабы: 0.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{1-x-\ln\,(e-x)}$. Жауабы: $\dfrac{2e}{1-e}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln\operatorname{tg}7x}{ln\operatorname{tg}2x}$. Жауабы: 1.

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ln(x-1)-x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2x}}$. Жауабы: 0.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x ln(1-x)$. Жауабы: 0.

14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$. Жауабы: $\dfrac{1}{2}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2^x)^{sinx}$. Жауабы: 1.

16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$. Жауабы: 1.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{nx}{2a}}$. Жауабы: $e^{\frac{2}{n}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{2}\text{tg}\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{1-x}\right).$ Жауабы: 0.

19. $x$-тің қандай мәндерінде мына функция $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ үдейді?

20. Мына $f(x)=\frac{2}{x^2-4}$ функцияның үдеуін және кемуін зерттеу керек.

21. Трансформатор теориясында мынадай формула кездеседі:

$$\cos\varphi=\frac{(1-\sigma)\sin 2\theta}{[2(1+\sigma^2)-2(1-\sigma^2)\cos 2\theta]^{\frac{1}{2}}},$$

мұнда $\sigma<1$. Осы $\cos\varphi$-дің максимумын табу керек.

Жауабы: $\cos\theta=\frac{1-\sigma}{1+\sigma}$.

22. Самолет көтеретін пайдалы жүктің салмағы мына формуламен анықталады:

$$P=F\frac{\gamma}{\text{g}}c^2\left[\xi\sin\alpha\cdot\cos a-nc(\xi\sin\alpha+\frac{f}{F})\right]-m.$$

мұнда *c* – ұшу жылдамдығы, $\alpha$ – самолеттің көлбеу бұрышы, *F* – самолеттің $\alpha$ бұрышымен көлбеген жақтағы жазық бетінің ауданы, $\xi$ – ауаның кедергі коэффиценті, $\gamma$ – ауаның меншікті салмағы, *n* – тұрақты коэффицент. Көлбеу бұрыштың қандай мәнінде пайдалы жүк ең үлкен болады?

Жауабы: $\cos 2\alpha=\frac{nc}{\sqrt{n^2c^2+1}}$.

23. 1 кг пайдалы жүк үшін пропеллердің қуаты келесі формуламен анықталады:

$$y=\frac{b\,u^3\sin^2\alpha}{b\,u^2\sin\alpha\cos\alpha-\text{p}-n\,b\,u^3\,\sin^2\alpha},$$

мұнда *p* – пропеллердің салмағы, *u* – қалақшалардың айналу жылдамдығы, $\alpha$ – қалақшалардың горизонтқа көлбеуі, *n* және *b* – тұрақты сандар.

Қуат ең кіші шамаға жету үшін көлбеу бұрышы *a* қандай болу керек?

Жауабы: $\text{tg}\alpha=\frac{2p}{b\,u^2}$.

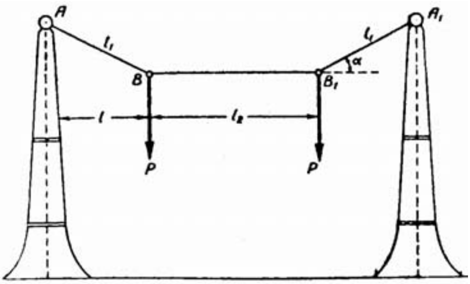
24. Су астындағы телеграфтық кабель мыс сымнан істелген өзектен, өткізбейтін материалдан жасалған қабықшадан тұрады. Егер өзектің радиусы мен қабықшаның қалыңдығының қатынасын *x* арқылы белгілесек, онда сигнал беру жылдамдығы келесі формуламен

$$y=x^2ln\frac{1}{x}$$

анықталады. *x*-тің қандай мәнінде сигнал беру жылдамдығы ең үлкен мәнге жетеді?

Жауабы: $x=\frac{1}{\sqrt{l}}$.

25. Трамвайды жүргізетін ток жүретін сымды ұстап тұру үшін көшенің бүйір жақтарынан бағаналар қағады, AB және $A_1B_1$ көлбеу аспамен сымды тартып, бағаналарға бекітеді (61-чертеж). Аспалардың горизонтқа ең қолайлы көлбеу бұрышын табу керек, былайша айтқанда, аз материал жұмсалу үшін аспалардың көлбеу бұрышы қандай болу керек?



61-чертеж

Жауабы: $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2l}{4l+l_2}}$

26. Биіктігі белгілі-мәселен $h$, тік бұрышты үшбұрыштардың қайсысының периметрі ең кіші болады?

Жауабы: табанындағы бұрышы $45^\circ$ тең бүйірлі үшбұрыш.

27. Радиусы R берілген шарға көлемі ең үлкен болатындай етіп дұрыс үшбұрышты призманы іштей сызу керек.

Жауабы: призманың биіктігі тең $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

28. Берілген секторға периметрі ең үлкен болатындай етіп тік төртбұрышты іштей сызу керек.

Жауабы: егер $\alpha$ – центрлік бұрыш болса, онда мына шарт $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > \frac{1}{2}$ орындалса ғана есептің шешуі болады.

29. Радиустары R және $R_1$ сфералардың центрлері арқылы өтетін сызықтың бойында сәулеленетін нүкте бар. Осы нүктенің қандай жағдайында сфералардың жарық жақтарының қосындысы ең үлкен болады?

Жауабы: $c \cdot \frac{R^{\frac{3}{2}} - R_1^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{3}{2}} + R_1^{\frac{3}{2}}}$.

c – екінші қимасының радиусы.

30. Үш абсолют серпімді *A, B, C* шардың центрлері бір түзудің бойында жатады, *A* шардың массасы *M*-ге тең, С шардың массасы $m$-ге тең. *A* шар $v$ жылдамдықпен барып, *B* шармен соғылысады, мұның нәтижесінде *B* шар тиісті жылдамдық алып *C* шармен соғылысады, мұның нәтижесінде *C* шар да тиісті жылдамдыққа ие болады. *C* шардың жылдамдығы максимум болу үшін *B* шардың массасы қандай болу керек?

*Нұсқау.* Массалары *M* және $m$ абсолют серпімді шарлар $v_1$ және $v_2$ жылдамдықтармен соғылысса, олардың соғылысқаннан кейінгі жылдамдықтары келесі формулалармен анықталады:

$$v = \frac{m-M}{m+M}v_1 + \frac{2M}{m+M}v_2; \;\; v = \frac{M-m}{m+M}v_2 + \frac{2M}{m+M}v_1.$$

Жауабы: масса тең $\sqrt{Mm}$, $C$ шардың ең үлкен жылдамдығы тең $\frac{4Mv}{(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}$.

# VI ТАРАУ
# ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУДІҢ КЕЙБІР ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕРГЕ ҚОЛДАНЫЛУЫ

## § 1. Жанама мен нормальдің кесінділері

1. Егер өзінің әрбір нүктесінде тиянақты жанамасы бар қисық $y = f(x)$ теңдеумен берілсе, онда оның берілген $M\,(x_0, y_0 = = f(x_0))$ нүктесінде оған жүргізілген жанаманың теңдеуі $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ болады, ал оған нормальдің теңдеуі

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0.)$$

болады.

Бұлар бізге белгілі.

Егер қисық төмендегі

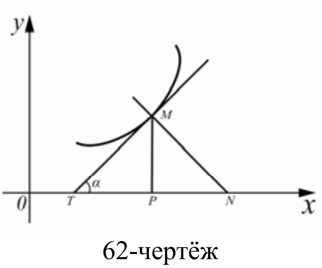
$$\begin{matrix} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{matrix} \alpha \le \mathrm{t} \le \beta$$

параметрлік теңдеулермен берілсе, онда жанама мен нормальдің теңдеулері

$$y - \psi\,(t_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(\mathrm{x} - \varphi(t_0)),$$

$$y - \psi\,(t_0) = -\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}(\mathrm{x} - \psi(t_0))$$

болады.



62-чертёж

Қисыққа жүргізілген жанаманың ұзындығы деп жанау нүктеден оның *OX* осімен қиылысу нүктесіне дейінгі кесіндісін, яғни *MT* кесіндіні айтады (62-чертеж).

Нормальдің ұзындығы деп жанау нүктеден оның *OX* осімен қиылысу нүктесіне дейінгі кесіндісін, яғни *MN* кесіндіні айтады.

Жанама ұзындығының *OX* осіне түскен проекциясын, яғни *TP* кесіндіні, *субтангенс* дейді. Нормаль ұзындығының *OX* осіне түскен проекциясын, яғни *PN* кесіндіні, *субнормаль* дейді. Келесі белгілеулерді енгізейік:

$$MT = t, \qquad MN = n, \qquad TP = S_t, \qquad PN = S_n.$$

Енді осы кесінділердің әрқайсысының ұзындығын табайық. Жанаманың $OX$ осінің оң бағытымен жасайтын бұрышын $\alpha$ арқылы белгілесек, онда:

$$tg\alpha = y' = f'(x).$$

$\Delta$ $TPM$ үшбұрышынан табамыз:

$$TP = \frac{PM}{tg\alpha} \text{ немесе } S_t = \frac{y}{y'}.$$

$$MT^2 = TP^2 + PM^2 = \left(\frac{y}{y'}\right)^2 + y^2 = (1 + y'^2),$$

бұл арадан:

$$t = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}.$$

$\Delta$ $PMN$ үшбұрышынан табамыз:

$$PN = PMtg < PMN = PMtg < PTM = PMtg\alpha = yy'$$

Сонымен,

$$S_n = yy',$$

$$MN^2 = PM^2 + PN^2 = y^2 + +y^2y'^2,$$

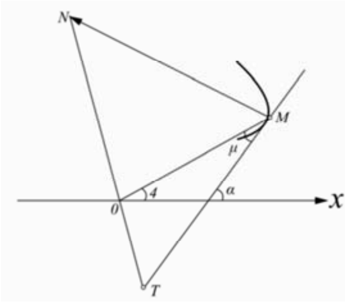
бұл арадан:

$$n = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

2. Қаралатын қисық поляр координаторларда келесі

$$\rho = f(\theta)$$

теңдеумен берілсін. Мұнда $f(\theta)$ – аргумент $\theta$ бойынша дифференциалданатын функция. Қисықтың бойындағы бір $M$ нүктені алып, $OM$ радиус – векторын, $MT$ жанаманы, $MN$ нормальді құрамыз. ОМ радиус – векторға перпендикуляр етіп $O$ нүктесін бастыра жанамамен және нормальмен қиылысқанша $TN$ түзуді жүргіземіз (63-чертеж). Мұнда $MT$ кесіндісі – жанаманың ұзындығы, $MN$ кесіндісі – нормальдің ұзындығы. $OT$ кесінді – субтангенс, $ON$ кесінді – субнормаль.



63-чертёж

Жанама мен радиус – вектордың арасындағы бұрышты $\mu$ арқылы, поляр ось пен жанаманың арасындағы бұрышты $\alpha$ арқылы, М нүктесінің поляр бұрышын Θ арқылы белгілесек, онда

$$\mu = \alpha - \theta$$

бұл арадан:

$$tg\mu = tg(\alpha - \theta) = \frac{tg\alpha - tg\theta}{1 + tg\alpha \cdot tg\theta} \qquad (1)$$

Декарттық координаталар мен поляр координаталардың арасындағы

$$x = \rho \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\theta$$

байланысты пайдаланып табамыз:

$$tg\alpha = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta\alpha\rho + \rho\cos\theta\alpha\theta}{\cos\theta\alpha\rho - \rho\sin\theta\alpha\theta}.$$

Осы кейінгі өрнекті (1) апарып қойсақ, сонда:

$$tg\mu = \rho\frac{d\theta}{d\rho} \qquad (2)$$

Δ OTM және Δ ONM үшбұрыштардан

$$OT = OM \cdot tg\mu \quad \text{немесе} \quad S_1 = \rho^2\frac{d\theta}{d\rho}$$

табамыз.

$$MT = \sqrt{OT^2 + OM^2} \quad \text{немесе} \quad t = \sqrt{\left(\frac{\rho^{2d\theta}}{d\rho}\right) + \rho^2} =$$

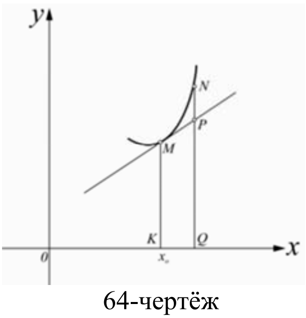
$$= \rho\sqrt{1 + \rho^2\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2};$$

$$ON = OM\, ctg < ONM = OM\, ctg < OMT = OM\, ctg\mu$$

$$\text{немесе} \quad S_n = \rho \cdot \frac{d\rho}{\rho d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta};$$

$$MN = \sqrt{OM^2 + ON^2} = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2}$$

## § 2. Дөңестік, ойыстық және майысу нүктелері



64-чертёж

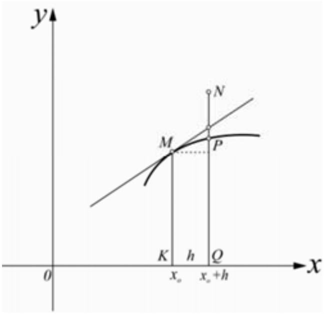
1. Жазықтықта жатқан қисық, $y = f\ (x)$ теңдеумен берілсін. Бұл қисықтың $M\ (x_0 y_0 = f\ (x_0))$ нүктесінде тиянақты жанамасы бар болатын болсын және ол $OУ$ осіне параллель болсын.

Егер $x_0$ нүктесінің кез келген аймағында қисық өзіне жүргізілген жанаманың үстіңгі жағында жатса, онда қисықты бұл аймақта ойыс дейміз (64-чертеж).

Егер $x_0$ нүктесінің аймағында қисық осы нүктеде өзіне жүргізілген жанаманың төменгі жағында жатса, онда қисықты бұл аймақта дөңес дейміз (65-чертеж).

Берілген нүктенің аймағында қисық қай жағымен (дөңес немесе ойыс жағымен) орналасқанын білу керек. Міне, осы мәселені аналитикалық жолмен зерттейміз.

**Теорема.** *Ох осінің бойында жатқан* $x_0$ *нүктесінің аймағында функция* $y = f\ (x)$ *өзінің бірінші ретті туындысымен бірге үздіксіз болатын және онымен қабат оның екінші ретті туындысы жаңағы аймақтың ішінде нольге айналмайтын болсын. Онда f(x) функцияны кескіндейтін қисық егер* $f''(x) < 0$ *болса,* $x_0$ *нүктесінің аймағында дөңес жағымен жатады, ал егер* $f''(x) > 0$ *болса, ойыс жағымен жатады.*



65-чертёж

$y = f(x)$ теңдеумен берілген қисыққа оның $M\ (x_0, y_0 = f(x))$ нүктесінде *MN* жанаманы жүргізейік. Сонан кейін қисықтың бойында жатқан абциссасы $x_0 + h$ санға тең $P$ нүктесін және абциссасы сол санға тең жанаманың бойында жатқан *N* нүктесін қарайық (65-чертеж). Осы *N* нүктесінің ординатасы $\eta$ арқылы $(\eta = QN)$ белгілеп, мына $y - \eta$ айырманы $x = x_0 + h$ нүктесінде қарайық (егер 65-чертежге қарасақ, бұл айырманың таңбасы теріс).

Функцияның дифференциалының геометриялық мағынасын еске түсірсек, онда

$$\eta = f(x_0) + hf'(x_0).$$

Енді жаңағы қарастырылып отырған айырма $y - \eta$ мына түрге көшеді:

$$y - \eta = f(x_0 + h) - [f(x_0) + hf'(x_0] = f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0).$$

Теореманың шарттары бойынша мына $f(x_0 + h) - f(x_0)$ айырмаға Лагранж теоремасын әбден қолдануға болады:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Бұдан кейін:

$$y - \eta = h\big[f'(x_0 + \theta h) - f'(x_0)\big] \tag{2}$$

Осы кейінгі теңдіктің екі жағын $\theta h$-қа көбейтейік және бөлейік. Сонда

$$y - \eta = \theta h^2 \cdot \frac{f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)}{\theta h}. \qquad (3)$$

Теореманың шарттары бойынша $f(x)$ функцияның екінші ретті туындысы бар және ол нольге тең емес. Олай болса мына

$$\frac{f'(x_0 + \theta h)-f'(x_0)}{\theta h} \qquad (4)$$

қатынастың тиянақты шегі бар, яғни

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + \theta h)-f'(x_0)}{\vartheta h} = f''(x_0).$$

Сондықтан өсімше $h$-тың абсолют шамасы аса аз болғанда (4) қатынастың таңбасы екінші ретті $f''(x_0)$ туындының таңбасымен бірдей болады.

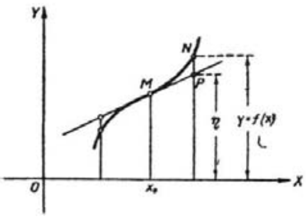
Енді (3) теңдікке қайта айналалық. (4) қатынастың таңбасы қандай болса, (3) теңдіктің сол жағында тұрған айырманың таңбасы да сондай болады. Ал (4) қатынастың таңбасымен екінші ретті $f''(x_0)$ туындының таңбасы бірдей болатынын айттық. Ендеше (3) теңдіктің сол жағындағы айырманың таңбасы екінші ретті $f''(x_0)$ туындының таңбасына тәуелді болатын болды. Егер екінші ретті $f''(x_0)$ туындының таңбасы теріс болса, яғни $f''(x_0) < 0$ болса, онда $y - \eta$ айырманың таңбасы теріс болады. Демек, $y - \eta < 0$, бұл арадан $y - \eta$.

Осы кейінгі теңсіздіктің орындалуы теореманы дәлелдейді, өйткені $y < \eta$ болғандықтан, қисық $y = f(x)$ мына $(x_0, y_0) = f(x_0))$ нүктенің аймағында жанамадан төмен жатады. Олай болса, бұл аймақта қисық өзінің дөңес жағымен орналасқан болады.

Егер $f''(x_0) > 0$ болса, онда $y - \eta > 0$ болады, бұл арадан $y > \eta$. Бұл теңсіздіктің орындалуы теореманың екінші бөлімін дәлелдейді, өйткені $y > \eta$ болғандықтан, қисық $y = f(x)$ мына $(x_0, y_0) = f(x_0))$ нүктенің аймағында жанамадан жоғары жатады. Ендеше, бұл аймақта қисық $y = f(x)$ өзінің ойыс жағымен орналасқан болып табылады (64-чертеж).

Мәселен, $y = \sin x$ функцияны кескіндейтін қисықты алсақ, бұл қисық $x = \frac{\pi}{2}$ нүктенің аймағында өзінің дөңес жағымен, ал $x = \frac{3}{2}\pi$ нүктенің аймағында өзінің ойыс жағымен орналасқан, өйткені

$$(\sin x)''\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -\sin x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -1 < 0, \quad (\sin x)''\big|_{x=\frac{3}{2}\pi} = -\sin x\big|_{x=\frac{3}{2}\pi} = 1 > 0.$$



66-чертёж

2. Кейде қисық берілген $x_0$ нүктесінің кішкентай аймағында жанаманың үстіңгі және астыңғы жағында жатуы мүмкін, былайша айтқанда, ол өзінің жанамасын қиып өтуі мүмкін.

Егер жанау нүктесінің кішкентай аймағында, қисық бір жағынан жанаманың үстіңгі жағында, екінші жағынан астыңғы жағында жатса, онда жанау нүктені қаралып отырған қисықтың майысу нүктесі деп атайды (66-чертеж).

Майысу нүктесі жөнінде келесі теореманы дәлелдеуге болады.

**2-теорема.** *Егер $x_0$ нүктесінің $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ аймағында функция $f(x)$ өзінің бірінші ретті туындысымен бірге үздіксіз болса, осы аймақтың ішінде жатқан $x_0$ нүктесінен басқа барлық нүктелерде $f(x)$ функцияның нольден айрықша екінші ретті туындысы болса және $x$, $x_0$ нүктесі арқылы өткенде осы екінші ретті туынды өзінің таңбасын ауыстырса, онда $x = x_0$ нүкте $y = f(x)$ теңдеумен берілген қисықтың майысу нүктесі болады.*

Айталық, екінші ретті туынды $f''(x)$ *өзінің* таңбасын плюстен минуске ауыстырсын, яғни $x_0$ нүктесінің сол жағында жатқан $x$-тер үшін $(x < x_0)$ мына теңсіздік $f''(x) > x_0$ нүктесінің оң жағында жатқан $x$-тер үшін $(x > x_0)$ мына теңсіздік $f''(x) < 0$ орындалсын.

(2) теңдік бойынша

$$y - \eta = h[f'(x_0 + \theta h) - f'(x_0)],\ \text{о} < \theta < 1. \qquad (2)$$

Осы (2) теңдіктің оң жағындағы квадрат жақшалардың ішіндегі айырмаға тағы да Лагранж теоремасын қолданамыз. Сонда

$$y - \eta = \theta h f^{2''}(x_0 + \theta_1 h),\ \text{мұнда O} < \theta_1 < \theta < 1. \qquad (5)$$

Егер $h$ теріс болса, онда $x_0 + \theta,\ h < x_0$ және қойылған шарт бойынша $f''(x_0 + \theta,\ h) > 0$ болады; ал егер $h$ оң болса, онда $x_0 + \theta,\ h > x_0$ және онда қойылған шарт бойынша $f''(x_0 + \theta,\ h) < 0$ болады.

Сонымен, егер $h < 0$ болса, онда $f''(x_0 + \theta h) < 0$ болатын болды; ал егер $h > 0$ болса, онда $f''(x_0 + \theta h) > 0$ болатын болды. (5) теңдіктің сол жағындағы айырманың таңбасы екінші ретті $f''(x_0 + \theta,\ h)$ туындының таңбасына тәуелді. Сондықтан егер $h < 0$ болса, онда у $- \eta > 0$ болады, өйткені $f''(x_0 + \theta,\ h) >$

0 . Бұл арадан у $> \eta$. Осы кейінгі теңсіздіктің орындалуы $x = x_0$ нүктесінің сол жағында жатқан нүктелер үшін қисық жанаманың үстіңгі жағында жататынын көрсетеді. Сол сияқты егер $h > 0$ болса, онда у $- \eta < 0$ болады, себебі $f'(x_0 + \theta,\ h) < 0$, бұл арадан у $< \eta$. Бұл теңсіздіктің орындалуы $x = x_0$ нүктесінің оң жағында жатқан $x$-тер үшін қисық $y = f(x)$ жанаманың төменгі жағында жататынын көрсетеді. Ендеше $x = x_0$ нүкте $y = f(x)$ теңдеумен берілген қисықтың майысу нүктесі болады.

Екінші ретті $f''(x)$ туынды өзінің таңбасын минустен плюске ауыстырса да, осы жағдай орын алады.

3. $y = f(x)$ теңдеумен берілген қисықты қарайық. Мұнда $f(x) - x_0$ нүктесінің $(x_0 - \delta, x + \delta)$ аймағында *n* ретке дейін дифференциалданатын функция болсын. Бұрынғыдай $M(x_0, y_0 = f(x_0))$ – жанау нүкте, *MN* қисыққа осы нүктеде жүргізілген жанама, $\eta = QN -$ жанаманың ординатасы болсын; қисықтың бойында жатқан *P* нүктесінің абсциссасы $x_0 + h$ болсын.

Енді тағы да мына у $- \eta$ айырманы қарайық, мұнда бұрынғыдай

$$y = f(x_0 + h), \qquad \text{ал } \eta = f(x_0) + hf'(x_0).$$

Айталық,

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

болсын да, ал $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ және *n*-ші ретті туынды $f^{(n)}$(x), $x_0$ нүктесінде үздіксіз болсын

$$y - \eta = f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0). \tag{6}$$

Мына $y - f(x_0 + h)$ өрнекті Тейлор формуласы бойынша жіктеп жазайық:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f''(x_0) +$$
$$+ .. + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0 + \theta h),$$
$$0 < \theta < 1$$

Қойылған шартты еске алсақ, онда

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0 + \theta h).$$

Бұл арадан

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0) = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0 + \theta h).$$

Бұдан кейін (6) теңдік мына түрге көшеді:

$$y-\eta=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h) \qquad (7)$$

$n$-ші ретті туынды $f^{(n)}(x)$, $x_0$ нүктесінде үздіксіз болғандықтан, оң $\delta$ саны табылып, $h$-тың мына $|h|<\delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық мәндері үшін мына $f^{(n)}(x_0+\theta h)$, $f^{(n)}(x_0)$ екі өрнектің таңбасы бірдей болады.

Тейлор формуласы арқылы функцияның экстремумын зерттегендей, егер $n$ – жұп болса, онда $h$ қандай болса да, (7) теңдіктің сол жағында тұрған айырманың таңбасы $x_0$ нүктесінде $n$-ші ретті $f^{(n)}(x_0)$ туындының таңбасына тәуелді. Және мұнда былай: егер $f^{(n)}(x_0)>0$ болса, онда $y-\eta>0$ немесе $y>\eta$, демек, $y=f(x)$ теңдеумен берілген қисық $\mathrm{M}(x_0,y_0=f(x_0)$ нүктесінің аймағында ойыс жағымен орналасқан; егер $f^{(n)}(x_0)<0$ болса, онда $y-\eta<0$ немесе $y<\eta$ демек, қисық $y=f(x)$, $\mathrm{M}(x_0,y_0=f(x_0)$ нүктесінің аймағында дөңес жағымен жатады.

Егер $n$ – тақ болса, онда (7) теңдіктің сол жағындағы айырманың таңбасы $h$-тың таңбасымен бірге өзгереді, сондықтан $\mathrm{M}(x_0,y_0=f(x_0)$ нүктесінің аймағында қисық $y=f(x)$ жанаманың екі жағына шығып жатады. Ендеше $x=x_0$ нүктесі қарастырылып отырған қисықтың майысу нүктесі болады.

Сөйтіп, баяндалған зерттеуден біз мынадай қорытындыға келеміз:

$(x_0-\delta,\, x_0+\delta)$ аймағында $y=f(x)$ функцияның $n$-ші ретке шейін үздіксіз туындылары болсын. Сонда, егер $f''(x)=f'''(x_0)=\cdots=^{(n-1)}(x_0)=0$ болса, ал $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, онда көрсетілген аймақта зерттеліп отырған қисықтың қалай орналасқаны $n$-нің жұптығына және тақтығына тәуелді. Егер $n$ – жұп болса және $f^{(n)}(x_0)>0$ болса, онда қисық ойыс жағымен жатады, ал $f^{(n)}(x_0)<0$ болса, онда қисық дөңес жағымен жатады. Егер $n$-тақ болса, онда нүкте $x=x_0$ зерттеліп отырған қисықтың майысу нүктесі болады.

## § 3. Асимптоталар

$y=f(x)$ теңдеумен берілген қисықты қарайық. Аргумент $x$ не плюс шексіздікке $(x\to+\infty)$, не минус шексіздікке $(x\to-\infty)$ ұмтылғанда функция $y=f(x)$ мынадай $y=kx+b$ сызықты функцияға ұмтылуы мүмкін. Сызықты функция $y=kx+b$ түзуді кескіндейтіні бізге белгілі.

Егер

$$\lim_{(x\to\pm\infty)} \ [f(x)-(kx+b\,)]=0$$

болса, онда $y=kx+b$ түзуді $x$ плюс, минус шексіздікке ұмтылғандағы $y=f(x)$ қисықтың асимптотасы деп атайды. Бұл жолмен тек көлбеу асимптоталар ғана табылады. Ал егер

$$\lim_{(x\to\pm\infty)} f(x)=b\ ,$$

онда *y*=*b* түзуді $y=f(x)$ қисықтың *горизонталь асимптотасы* дейді.

Мәселен, мына $y=\frac{1}{x}$ теңдеумен берілген қисыққа қарайық. Бұл қисық – тең бүйірлі гипербола. Енді оның асимптотасын табайық. Ол үшін

$$\lim_{(x\to\mp\infty)} \frac{1}{x}=0.$$

Бұл арадан мынадай қорытындыға келеміз: ОХ осі, яғни түзу $y=0$ мысалға алынып отырған $y=\frac{1}{x}$ қисықтың горизонталь асимптотасы болады.

Егер түзу $y=kx+b$, $y=f(x)$ қисықтың асимптотасы болса, онда

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0 \qquad (8)$$

немесе

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0,$$

бұл арадан

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k\right]=0,$$

немесе

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k. \qquad (9)$$

(8) теңдікті былай да жазуға болады:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b \qquad (10)$$

(9) және (10) теңдіктердің орындалуынан мынадай қорытындыға келеміз: егер түзу $y=kx+b$ мына $y=f(x)$ қисықтың көлбеу асимптотасы болса, онда (9) және (10) теңдіктер орындалады. Керісінше, егер (9) және (10) теңдіктер орындалса,

онда түзу $y = kx + b$ мына $y = f(x)$ қисықтың көлбеу асимптотасы болады.

Мәселен, мынадай $y = \frac{x^2+3x+5}{x+1}$ теңдеумен берілген қисықты алайық:

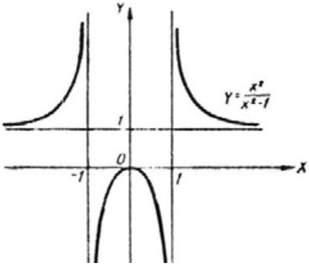
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{x(x + 1)} = 1,$$

$$b = \lim_{x+\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} - x\right) = 2.$$

Сонымен, мысалға алынып отырған қисықтың асимптотасы $y=x+2$ болады.

Аргумент $x$ тұрақты $x_0$ санына оның қай жағынан болса да ұмтылғанда функция $f(x)$ плюс немесе минус шексіздікке ұмтылуы мүмкін, яғни

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \infty, \qquad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \infty.$$



67-чертёж

Мұндай жағдайларда, біріншіден, $y = f(x)$ қисықтың сәйкес нүктесі не жоғары, не төмен қарай шексіздікке кетеді, екіншіден, $x = x_0$ вертикаль түзуге шексіз жақындайды, осы кейінгі түзуді $y = f(x)$ қисықтың вертикаль асимптотасы деп атайды.

Берілген $y = f(x)$ қисықтың вертикаль асимптотасын табу үшін функция $f(x)$ өзінің абсолют шамасы бойынша шексіздікке айналатын нүктелерді табу керек. Мәселен, ол нүктелер $x_1$, $x_2$,... болса, онда мына түзулер: $x = x_1, x = x_2,$ ... вертикаль асимптоталар болады.

Мысалы, мына $y = \frac{x^2}{x^2-1}$ теңдеумен кескінделетін қисықты алып қарасақ, бұл қисықтың вертикаль асимптоталары $x=1$, $x=-1$ және оның горизонталь асимптотасы бар, оны табу үшін $x$-ті плюс немесе минус шексіздікке ұмтылып берілген $\frac{x^2}{x^2-1}$ функциясының шегін іздеуіміз керек, яғни

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1.$$

Ендеше түзу *y=1*, мысал үшін алынып отырған функцияның горизонталь асимптотасы болып табылады. Бұл қисық 67-чертежде көрсетілген.

## § 4. Функциялардың графиктерін құру жолдары

Жоғарыдағы келтірілген функциялардың, үдеуі, кемуі, максимумдары, минимумдары, қисықтың ойыстығы, дөңестігі, оның майысу нүктелері, асимптоталары турасындағы теоремалар және қорытындылар олардың қалай өзгеруі жөнінде дұрыс және толық сипаттама беруге мүмкіндік туғызады; мұнымен бірге олардың графиктерін дұрысырақ құруға үлкен жағдайлар жасайды.

Бұл жерде тағы бір айта кететін мәселе мынау: функциялардың графиктерін құрғанда мына ерекше нүктелер – үзіліс, графиктердің координаталар осьтерімен қиылысу, максимум, минимум, майысу т.т. нүктелері – тіректі нүктелер есебінде пайдаланылады.

Енді функциялардың графиктерін құру жөнінде бір-екі мысал келтірейік.

а) $y = e^{-x^2}$ функцияның графигін құру керек.

*ОУ* осіне қарағанда, бұл функцияның графигі симметриялы екенін бірден байқауға болады.

Берілген функцияның анықталу облысы $(-\infty, \infty)$ интервалы және бұл интервалда оның барлық ретті туындылары бар.

Алдымен зерттелініп отырған функцияның экстремумын табайық, ол үшін

$$y' = -2xe^{-x^2},\ y'' = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

Бірінші ретті туындыны нольге теңейміз:

$-2x^{e-x^2} = 0$; бұл арадан $x$=0 және $y''/_{x=0} = -2 < 0$, яғни $x$=0 нүктесінде қаралып отырған функцияның максимумы бар. Бұл нүктедегі функцияның өзінің мәні $y\,/_{x=0} = 1$ болады және осы мән оның ең үлкен мәне болып табылады.

$x$-тің барлық теріс мәндері үшін $y' > 0$ болады, ендеше аргументтің бұл мәндерінде берілген функция үдеме; ал $x$-тің оң мәндері үшін $y' < 0$, демек, аргументтің бұл мәндерінде функция $y = e^{-x^2}$ кеміме.

$x$-тің қандай мәндерінде екінші ретті туынды нольге айналады, енді соны білейік:

$$y'' = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} = 0,$$

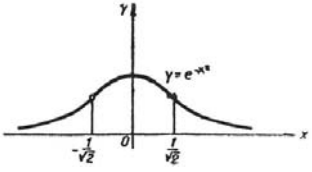
бұл арадан $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ интервалдың ішінде жатқан барлық $x$-тер үшін $y'' < 0$, ал оның сыртында жатқан нүктелерде $y'' > 0$. Олай болса, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ интервалдағы $x$-тер үшін зерттеліп отырған қисық дөңес жағымен орналасқан, ал оның сыртындағы нүктелер үшін ойыс жағымен жатады.

Нүктелер $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ майысу нүктелері.

Бұл нүктелердегі зерттеліп отырған функцияның мәндері

$$y/_{x=-\frac{1}{\sqrt{2}}} = y/_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ болады.}$$



68-чертёж

Міне, осы айтылғандардың барлығын еске алып, функцияның графигін құруға болады (68-чертеж).

Бұл зерттелген қисықты *Гаусс қисығы* деп атайды.

б) $y = x^2 e^{-x^2}$ функцияның графигін құру керек.

Біріншіден, бұл функцияның анықталу облысы $(-\infty, \infty)$ және *ОУ* осіне қарағанда оның графигі симметриялы болатынын бірден байқауға болады. Функцияның үзіліс нүктесі жоқ және қабылдайтын мәндерінің барлығы да оң, сондықтан оның графигі *ОХ* осінің үстіңгі жағында жатады.

Енді берілген функцияның экстремумдарын іздейік, ол үшін

$$y' = 2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2},$$

$$y'' - 2e^{-x^2}(1 - 5x^2 + 2x^4).$$

Бірінші ретті туындыны нольге теңеп, мынаны $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$ табамыз. Осы нүктелердегі екінші ретті туындының мәндерін табамыз: $f''(0) = 2 > 0$, ендеше $x_1 = 0$ нүктесінде зерттеліп отырған функцияның минимумы бар және $f(0) = 0; f''(-1) = -\frac{4}{e} < 0,$ ендеше $x_2 = -1$ нүктесінде зерттеліп отырған функцияның максимумы бар және $f(-1) =$

$\frac{1}{e}\, f''(1) = -\frac{4}{e} < 0,$ сондықтан $x_3 = 1$ нүктесінде функцияның максимумы болады, және $f(1) = \frac{1}{e}$.

$[1{,}1]$ сегменттің ішінде жатқан $x$-тер үшін $f''(x) > 0$, ал оның сыртында жатқан $x$-тер үшін $f''(x) < 0$, олай болса, $[-1{,}1]$ сегменттің ішінде жатқан $x$-тер үшін зерттеліпіп отырған функция өзінің ойыс жағымен орналасқан, ал оның сыртында жатқан нүктелер үшін дөңес жағымен жатады.

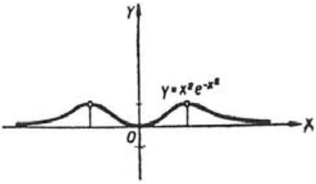
Енді $x$ плюс, минус шексіздікке ұмтылғандағы функцияның шегін табайық:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2e^{-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{2xe^{x^2}} = 0$$

(Лопиталь ережесін қолданамыз).

$OX$ осі немесе түзу $y = 0$ зерттеліпіп отырған қисықтың асимптотасы болып табылады.

Міне, осылардың барлығын білгеннен кейін берілген функкцияның графигін құру қиын емес (69-чертеж).



69-чертёж

## *Жаттығулар*

1. Мына $y = xlnx + 1$ қисыққа оның ординатасы $y = 1$ нүктесінде жанама жүргізу керек.

2. Мына $x = e_t,\ y = \sin t$ қисыққа оның $t = 0$ нүктесінде жанама жүргізу керек.

3. Мына $p^n = a^n \cos n\Theta$ поляр теңдеумен берілген қисыққа жүргізілген жанамамен радиус – вектордың арасындағы бұрышты табу керек.

Жауабы: $\mu = \frac{\pi}{2} + n\theta$.

4. $\rho = \varphi(\theta), \rho = \frac{\alpha}{\varphi(\theta)}$ қисықтарға жүргізілген жанамалар мен радиус – вектордың арасындағы бұрыштардың қосындығы $\pi$-ге тең екендігін дәлелдеу керек.

5. Аньези қисығы деп аталатын $x^2y = a^2(a - y)$ сызыққа нормальді мына $3y - 50x = 0$ түзуге параллель етіп жүргізу керек.

Жауабы: $50x - 3y = \frac{1497}{10}\alpha$

6. Мына $y = \alpha\cos ln\frac{x}{a}$ қисықтың $x = 2\pi a$ нүктесінде оған жанама жүргізу керек.

Жауабы: $x = 2\pi a$.

7. $y^2 = 2px$ параболаға жүргізілген нормальдің координаталар осьтері арасындағы кесіндісінің ұзындығы $\frac{p}{2}\sqrt{18}.$ Осы нормальдың теңдеуін табу керек.

Жауабы: $x + y = \frac{3}{2}p.$

8. Мына $e^{\frac{y}{a}} = x^2 - a^2$ қисықтың кез келген нүктесінде оған жүргізілген жанаманың және субтангенстің ұзындықтарының қосындысы жанау нүктесі координаталарының көбейтіндісіне пропорционал болатындығын дәлелдеу керек.

9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипске жүргізілген жанаманың координаталар осьтері арасындағы кесіндісінің ұзындығы ең кіші болатындай эллипстің нүктесінде оған нормаль жүргізу керек.

Жауабы: $\sqrt{ax} - \sqrt{by} = (a - b)\sqrt{a + b.}$

10. Астроида деп аталатын $x\overline{3} + y^{\overline{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ қисыққа жүргізілген жанаманың координаталар осьтері арасындағы кесіндісінің ұзындығы тұрақты санға тең екендігін дәлелдеу керек.

11. Қисық келесі параметрлік теңдеулермен

$$x = 2aln\sin t - 2a\,sin^2 t, y = \alpha\ \sin 2t$$

берілген. Осы қисыққа жүргізілген жанама мен нормальдің арасындағы $OX$ осі кесіндісінің ұзындығы $2a$-ға тең екенін дәлелдеу керек.

12. $x = a\sin t + \frac{a}{2}\sin t\,cos^2 t;\ \ y = -\frac{a}{2}cos^3 t$ қисыққа жүргізілген нормальдің координаталар осьтері арасындағы кесіндісінің ұзындығы тұрақты $a$-ға тең екенін дәлелдеу керек.

13. $p^2 = a^2$ спиральдің субтангенсінің және субнормалінің ұзындығын табу керек.

Жауабы: $S_t = \frac{2p^3}{a^2};\ \ S_n = \frac{a^2}{2p}$

Келесі функциялардың графиктерін құру керек:

14. $y = \sqrt[5]{x^4(x - 1).}$

15. $y = \sin x + \frac{1}{2\sin x}.$

16. $y = x^{\frac{4}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{a}{3}}.$

17. $y = \frac{1}{1-\sqrt{1-x}}.$

18. $y = \frac{2x^2-7x+3}{x^2-7x+12}.$

19. y=$\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}.$

20. $y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$

## *Үшінші бөлім*

# БІР АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАРЫНЫҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУІ

## VII ТАРАУ

## ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИНТЕГРАЛДАУ

### § 1. Алғашқы функция және анықталмаған интеграл

Дифференциалдық есептеуде мәселе берілген функцияның туындысын немесе дифференциалын табу және олардың көмегімен функциялардың өзгерісін зерттеу болды. Интегралдық есептеуде мәселе керісінше қойылады: берілген туындысы немесе дифференциалы бойынша функцияның өзін табу. Демек, дифференциалдау және интегралдау бір-біріне кері амалдар болып табылады.

Берілген туындысы немесе дифференциалы бойынша функцияның өзін табу проблемасы математикалық анализдің, жаратылыстану ғылымдарының, олардың ішінде, әсіресе физиканың, механиканың және техниканың алуан түрлі мәселелерінде жиі кездеседі.

Нақты айнымалы $x$-тің үздіксіз $f(x)$ функциясы берілсін; туындысы осы берілген функцияға тең екінші бір $F(x)$ функцияны табу керек.

Қойылған шарт бойынша

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

немесе бәрібір

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Осы шартты қанағаттандыратын $F(x)$ функцияны $f(x)$ функция үшін *алғашқы* немесе *әуелгі функция* деп атайды.

Енді бір көңіл жіберетін мәселе мына келесі теорема.

**Теорема.** *Егер функция* $F(x)$ *мына* $f(x)$ *функция үшін алғашқы функция болса, онда* $F(x) + \mathrm{C}$ *да (мұнда С – кез келген тұрақты сан) алғашқы функция болып табылады және керісінше, әрбір алғашқы функция осы* $F(x) + \mathrm{C}$ *түрде сипатталынады.*

Бұл теореманың бірінші бөлімінің дұрыстығын мынадан байқауға болады:

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x).$$

Енді екінші бөлімінің дәлелдеуіне келейік.

*Ф (х)* мына $f(x)$ функция үшін кез келген алғашқы функция болсын, онда

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Ендеше

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

бұл арадан

$$\Phi(x) - F(x) = C$$

немесе

$$\Phi(x) - F(x) + C.$$

Теорема дәлелденді.

Дәлелденген теоремадан біз мынадай қорытындыға келеміз: барлық алғашқы функцияларды білу үшін берілген $f(x)$ функция үшін тек бір ғана алғашқы функция $F(x)$ табылса болғаны, өйткені мына өрнек $F(x) + C$ олардың барлығын қамтитын болады.

Осы $F(x) + C$ (мұнда $C$ – кез келген тұрақты сан) өрнекті $f(x)$ функцияның *анықталмаған интегралы* деп атайды және оны былай белгілейді:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (3)$$

Мұнда $f(x)$ функцияны интеграл таңбасы ішіндегі функция, ал мына $f(x)\,dx$ өрнекті интеграл таңбасы ішіндегі өрнек деп атайды. Ал $dx$-ті интегралдау элементі дейді.

Мысалы, $f(x) = x^2$, онда

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C,$$

өйткені

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2.$$

Екінші мысал: $f(x) = \sin 2x$, бұл функцияның анықталмаған интегралы

$$\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

өйткені

$$\left(-\frac{\cos 2x}{2} + C\right)' = \sin 2x.$$

Енді физикадан бір-екі мысал келтірейік.

а) $t = 0$ мезгілдің ішінде материалды нүкте $M$ тік жоғары қарай $v_0$ бастапқы жылдамдықпен лақтырылған. Ауаның кедергісін еске алмай және нүктенің бастапқы жағдайы нольге тең деп есептеп, оның қозғалу заңын табу керек.

Нүктенің үдеуі $W = -\text{g}$ немесе $\frac{dv}{dt} = -\text{g}$, бұл арадан

$$v = \int (-\text{g})dt + C = -\text{g}t + C,$$

өйткені

$$\frac{dv}{dt} = -(\text{g}t + C)' = -\text{g}.$$

Енді бізге кез келген тұрақты $C$-нің тиісті мәнін табу керек, ол үшін табылған формуладағы $t$-нің орнына нольді қоямыз.

Сонда

$$v_0 = C,$$

ендеше

$$v = -gt + v_0.$$

Жылдамдықтың анықтамасы бойынша

$$\frac{ds}{dt} = -gt + v_0,$$

бұл арадан

$$s = \int (-\text{g}t + v_0)dt = -\frac{\text{g}t^2}{2} + v_0 t + C_1,$$

өйткені

$$\frac{ds}{dt} = \left(-\frac{\text{g}t^2}{2} + v_0 t + C_1\right)' = -\text{g}t + v_0.$$

Енді кез келген тұрақты $\text{C}_1$ -ді табу үшін, кейінгі формуладағы $t$-нің орнына нольді қоямыз. Сонда $\text{C}_1 = 0$ олай болса,

$$s = v_0 t - \frac{\text{g}t^2}{2}.$$

Міне, осы табылған теңдеу айтылып отырған материалды нүктенің қозғалу заңы болып табылады.

б) Радийдің ыдырау жылдамдығы оның өзіндегі заттың бүкіл мөлшеріне пропорционал. Айталық, $t_0$ мезгілдің ішіндегі радийдың мөлшері $R_0$ болсын.

Кез келген $t$ мезгілдегі радийдің мөлшері қандай болу керек?

Есептегі сұралып тұрған мөлшерін $R$ деп белгілесек, онда есептің шарттары бойынша

$$\frac{dR}{dt} = -kR,$$

(Мұнда $\kappa$ – тұрақты сан, оны пропорционалдық коэффициент деп атайды).

Енді осы теңдеуді былай жазуға болады:

$$\frac{dR}{dt} = -kdt$$

Бұл арадан

$$\int \frac{dR}{R} = -k \int dt + C$$

немесе

$$lnR = -kt + C.$$

Енді R-ді табайық:

$$R = e^{-kt+c} = e^c \cdot e^{-kt} = C_1 e^{-kt}.$$

Кейінгі теңдіктегі $t$-нің орнына $t_0$-ді қойсақ, онда

$R_0 = C_1 e^{-kt_0}$, бұл арадан $C_1 = R_0 e^{kt_0}$

Бұдан кейін

$$R = R_0 e^{-k(t-t_0).}$$

## § 2. Таблицалық интегралдар

Анықталмаған интеграл жоғарыда айтылған мына $\int f(x) \quad dx$ символмен өрнектелген интегралдан басқа, тағы да төмендегі түрде өрнектеледі:

$$\int d\varphi(x), \quad \int \varphi(x) d\psi(x).$$

Немесе бұл интегралды айтылған түрде келтіруге болады, мәселен:

$$\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx; \quad \int \varphi(x) d\psi(x) = \int \varphi(x)\psi'(x)dx;$$

$$\int \sin^2(x) d\cos x = -\int \sin^3 x dx.$$

Айталық, $u$ – айнымалы $x$-тің үздіксіз және дифференциалданатын функциясы болсын.

Дифференциалдық есептеудің негізгі формулаларын пайдаланып, келесі интегралдар таблицасын бірден жазуға болады:

1) $\int du = u + C;$

2) $\int u^a du = \frac{u^a+1}{a+1} + C$ ($\alpha$ –тұрақты сан және $\alpha \neq -1$;

3) $$\int \frac{du}{u^\beta} = -\frac{1}{(\beta-1)u^{\beta-1}} + C \ (\beta - \text{тұрақты сан және } \beta \neq 1);$$

4) $$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C. (u > 0);$$

5) $$\int \frac{du}{u} = lnu + C. (u > 0);$$

$$\int \frac{du}{u} = ln(-u) + C.\ (u < 0);$$

немесе бұл екі формуланы бір формула арқылы былай біріктіруге болады:

$$\int \frac{du}{u} = ln|u| + C. (u \neq 0);$$

6) $$\int a^u du = \frac{a^u}{ln_a} + C.\ (a - \text{тұрақты сан және } \alpha \neq 1);$$

7) $$\int e^u du = e^u + C;$$

8) $$\int \sin u \, du = -\cos u + C;$$

9) $$\int \cos u du = \sin u + C;$$

10) $$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C;$$

11) $$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C;$$

12) $$\int \frac{du}{1+u^2} = arctgu + C = -arcc\,\text{tg}\,u + C\,;$$

13) $$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = arc\sin u + C = -arc\cos u + C(-1 < u < 1)$$

14) $$\int ch\,u\,du = shu + C;$$

15) $$\int sh\,u\,du = chu + C;$$

16) $$\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C;$$

17) $$\int \frac{du}{ch^2 u} = -cthu + C.$$

Бұл табылған формулалардың дұрыстығын тексеру үшін, олардың оң жақтарында тұрған функцияларды $u$ бойынша дифференциалдау керек; егер мұның нәтижесінде интегралдар таңбасы ішіндегі функциялар шықса, онда формулалардың дұрыс болғаны. **Бұларды жатқа білу керек.**

Функцияларды интегралдау деген мәселе – тиісті тәсілдерді қолданып, берілген интегралды жоғарыда жазылған формулалардың біреуіне келтіріп, алғашқы функцияны табу деген сөз.

Тағы да бір көңіл аударатын мәселе мынау: интегралданатын функция таңбасындағы аргумент пен интеграл ішіндегі дифференциал таңбасындағы аргумент бірдей болу керек.

Енді жоғарыда келтірілген формулаларды қалай пайдалану керектігі жөнінде біраз мысалдар келтірейік.

а) $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{2+\sin x}}$. Бұл интегралдың нәтижесін бірден жазуға болмайды. Интеграл ішіндегі дифференциал таңбасындағы аргумент пен функция таңбасындағы аргументті бір түрге келтіру керек. Интеграл таңбасы ішіндегі бөлшектің алымы cos *xdx* мына $2+\sin x$ функцияның дифференциалы. Ендеше

$$\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{2+\sin x}}=\int\frac{d(2+\sin x)}{\sqrt{2+\sin x}}.$$

(4) Формуланы қолданып тапсақ,

$$\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{2+\sin x}}=\int\frac{d(2+\sin x)}{\sqrt{2+\sin x}}=2\sqrt{2+\sin x+C}.$$

б) $\displaystyle\int\frac{dx}{(arc\sin x)^3\sqrt{1-x^2}},$

бұл интегралдың таңбасы ішінде тұрған мына өрнек $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $arc\sin x$-тің дифференциалы, яғни $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=d\ arc\sin x$. Сондықтан

$$\int\frac{dx}{(arc\sin x)^3\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{d(arc\sin x)}{(arc\sin x)^3}=-\frac{1}{2(arc\sin x)^2}+C.$$

(3) формуланы қолданамыз.

в) $\int\frac{\sin 2\,xdx}{2sin^2\,x+3}$. Берілген интеграл таңбасы ішінде тұрған бөлшектің алымы $\sin 2xdx,$ мына $\frac{1}{2}$ $(2sin^2x+3)$ функцияның дифференциалы, яғни $\frac{1}{2}d(2sin^2x+3)\quad sin\ 2x\ \ dx$. Олай болса,

$$\int \frac{\sin 2x\, dx}{2sin^2x + 3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(sin^2x + 3)}{2sin^2x + 3} = \frac{1}{2}\ln(2sin^2x + 3) + C.$$

(5) формуланы қолданамыз.

## § 3. Анықталмаған интегралдың қасиеттері. Айнымалыларды ауыстыру жолымен интегралдау. Бөлімшелеп интегралдау.

1. Анықталмаған интегралдардың екі қасиетіне тоқтап кетейік:

а) Әрбір тұрақты санды интеграл таңбасының сыртына шығаруға және оның таңбасының ішіне енгізуге болады, яғни $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$ мұнда $k = \text{const} \neq 0$. Айталық, $F(x)$ мына *f(x)* функциясы үшін алғашқы функция болып табылса, онда функция $kF(x)$ мына $kf(x)$ функция үшін алғашқы функция болып табылатыны өзінен-өзі айқын, өйткені $[kF(x)]' = kF'(x) = kf(x)$. Бұл арадан

$$\{k[F(x) + C]\}' = [kF(x) + C_1]' = kF'(x).$$

Ендеше $k\int f(x)dx = \int kf(x)dx$.

Мысалы, мына интегралды қарайық

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 9},$$

бұл интегралдың алымын да, бөлімін де 9-ға бөлеміз. Сонда

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 9} = \int \frac{\frac{dx}{9}}{\frac{2}{9}x^2 + 1} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{2}{9}x^2 + 1}.$$

Енді осы кейінгі интегралдың алымын $\frac{\sqrt{2}}{3}$-ге көбейтеміз және бөлеміз. Сонда

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 9} = \frac{1}{9}\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}dx}{\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2}{9}x^2 + 1\right)} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)^2}.$$

(12) формуланы қолдансақ, онда

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 9} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)^2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} arc\, tg\frac{\sqrt{2}}{3}x + C.$$

б) Саны шектеулі функциялардың алгебралық қосындысынан алынған интеграл сол функциялардың әрқайсысынан алынған интегралдардың алгебралық қосындысына тең, яғни

$$\int [f(x) \pm \mathrm{g}(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int \mathrm{g}(x)dx.$$

Айталық, $F(x)$ мына $f(x)$ үшін, $\Phi(x)$ мына $\mathrm{g}(x)$ үшін алғашқы функциялар болсын. Сонда

$$\int f(x)dx \pm \int \mathrm{g}(x)dx = [F(x) + C_1] \pm [\Phi(x) + C_2] =$$
$$= [F(x) \pm \Phi(x)] + (C_1 + C_2).$$

$F(x) \pm \Phi(x)$ мына $f(x) \pm \mathrm{g}(x)$ үшін алғашқы функция болады, өйткені

$$[F(x) \pm \Phi(x)]' = F'(x) \pm \Phi'(x) = f(x) \pm \mathrm{g}(x),$$

ал $C_1 + C_2$ – кез келген тұрақты сан. Сондықтан

$$\int f(x)dx \pm \int \mathrm{g}(x)dx = \int [f(x) \pm \mathrm{g}(x)]dx.$$

Мысал келтірейік:

$$\int \frac{dx}{sin^4x} = \int \frac{(sin^2x + cos^2x)dx}{sin^4x} = \int \frac{sin^2x}{sin^4x}dx + \int \frac{cos^2xdx}{sin^2x\, sin^2x} =$$
$$= \int \frac{dx}{sin^2x} + \int \mathrm{ctg}^2x \frac{dx}{sin^2x} = -\mathrm{ctg}x -$$
$$- \int \mathrm{ctg}^2x\, d\, \mathrm{ctg}\, x + C = -\mathrm{ctg}\, x - \frac{\mathrm{ctg}^3x}{3} + C.$$

(11) және (2) формулалар бойынша

в) $d\int f(x)dx = d[F(x) + C] = dF(x) = f(x)dx.$

г) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = [\int f(x)dx]' = [F(x) + C]' - f(x).$

2. Келесі анықталмаған интегралдағы $\int f(x)dx$ айнымалы $x$-ті төмендегі қатыс

$$x = \varphi(t)$$

бойынша жаңа айнымалы *t* арқылы ауыстырамыз, мұнда $\varphi(t)$ – біркелкі, үздіксіз және дифференциалданатын функция. Сонда бастапқы берілген интеграл мына түрге көшеді:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Осы шыққан формуланы *интегралдағы айнымалыны ауыстыру формуласы* дейді.

Берілген интегралдағы айнымалыны ауыстырудағы мақсат функцияны интегралдау үшін қолайлы түрге келтіру.

Бір-екі мысал келтірейік:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2 dx.}$$

Айнымалы $x$-ті былай ауыстырайық:

$$x = a\,sint,$$

бұл арадан $dx = \mathrm{a}\cos tdt$. Енді

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int \alpha\ \cos t\ \alpha\ \cos t\ d\ t = \int a^2 cos^2\ t\ d\ t =$$

$$= a^2 \int \frac{1 + \cos 2\,t}{2} dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{4}\int \cos 2\,t\ d\ (2t) =$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2\,t + C = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin t \cos t + C$$

қайтадан бұрынғы айнымалы $x$-ке көшсек, онда

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2} arc\sin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C. \qquad (4)$$

Осы шыққан формуланы да таблицалық интегралдарға қосуға болады.

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{dx}{a}}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \left|\frac{x}{a} = t\right| = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1 + t^2} =$$

$$= \frac{a}{1} arc\mathrm{tg}t + C = \frac{1}{a} arc\mathrm{tg}\frac{x}{a} + C. \qquad (4^1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = arc\sin\frac{x}{a} + C. \quad (5)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

бұл интегралға мынадай ауыстыру жүргіземіз $x + \sqrt{x^2 \pm a^2} = z$, бұл арадан $\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right)dx = dz$ немесе $\frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2 \pm a^2}dx = dz$. Ауыстырудың өзін еске алсақ, онда: $\frac{z}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = dz$ немесе бұл арадан $\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{dz}{z}$.

Енді

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int \frac{dz}{z} = lnz + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C. \quad (6)$$

Осы кейінгі табылған үш интегралды да таблицалық интегралға қосуға болады.

3. Енді бөлімшелеп интегралдау тәсілін қарайық. Бұл тәсіл екі функцияның көбейтіндісін дифференциалдаудан келіп шығады. Айталық, $u$ және $v$ аргумент $x$-тің үздіксіз дифференциалданатын функциялары болсын. Сонда

$$d(uv) = udv + vdu,$$

бұл арадан

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Осы кейінгі теңдіктің екі жағын интегралдап, мынаны табамыз:

$$\int udv = uv = \int vdu. \qquad (7)$$

(7) формула бөлімшелеп интегралдау ережесін тағайындайды.

Енді (7) формуланы қалай пайдалану жөнінде бір-екі мысал келтірейік:

**I.** $\int arc\mathrm{tg}x\, dx,$ бұл интегралды шығару үшін бөлімшелеп интегралдаймыз, $arc\mathrm{tg}$ $x$-ті $u$-ға балаймыз, $dx$-ті $dv$-ге балаймыз, яғни

$$u = arc\mathrm{tg}x,\ dv = dx.$$

Сонда $du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x.$

(7) формула бойынша

$$\int arc\mathrm{tg}xdx = xarc\mathrm{tg}x - \int \frac{xdx}{1+x^2} + C =$$

$$= xarc\mathrm{tg}x - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + C = arc\mathrm{tg}x -$$

$$-\frac{1}{2} ln(x^2+1) + C.$$

**II.** $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx,$

алдымен мына интегралды қарайық,

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \int \frac{(x^2+a^2)dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

(6) формуланы пайдаланамыз. Сонда

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}. \qquad (8)$$

Осы (8) теңдіктің оң жағында тұрған интегралды жеке алып бөлімшелеп интегралдаймыз:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int x\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}};$$

$$u = x, \quad dv = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}};$$

$$du = dx, \;\; v = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+a^2)}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2;}$$

((4) формулаға сүйенеміз)

Енді (7) формуланы қолданып, мынаны табамыз:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2dx.}$$

Бұдан кейін (8) теңдік мына түрге көшеді:

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = a^2\, ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + x\sqrt{x^2+a^2} -$$

$$-\int \sqrt{x^2+a^2}dx$$

немесе

$$2\int \sqrt{x^2+a^2}dx = a^2 ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + x\sqrt{x^2+a^3,}$$

бұл арадан

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} + \frac{a^2}{2}ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right) + C. \quad (9)$$

## § 4. Жабайы рационал бөлшектерді интегралдау

**I.** Мына интегралды

$$\int \frac{dx}{x\pm a}$$

қарайық.

$$\int \frac{dx}{x\pm a} = \int \frac{d(x\pm a)}{x\pm a} = \ln(x\pm a) + C. \quad (10)$$

**II**. Енді мына интегралды қарайық:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\int \frac{2adx}{(x-a)(x+a)} =$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}dx = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} =$$

$$=\frac{1}{2a}\ln(x-a)-\frac{1}{2a}\ln(x+a)=\frac{1}{2a}ln\frac{x-a}{x+a}+C. \qquad (11)$$

**III.** Енді мына интегралды қарайық:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}=$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4\,a\,c}{4a^2}}.$$

Дискриминант $b^2-4\,ac>0$ болсын, онда алдыңғы (11) формуланы қолданып табамыз:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4\,a\,c}{4a^2}}=$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}}ln\frac{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}}{x+\frac{b}{2\,a}+\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}}+C;$$

Немесе

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}ln\frac{2\,a\,x+b-\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a\,x+b+\sqrt{b^2-4\,a\,c}}+C. \qquad (12)$$

Дискриминант $b^2-4\,ac<0$ болсын, онда

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4\,a\,c+b^2}{4\,a^2}};$$

$(4')$ фомуланы қолданамыз. Сонда

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\frac{2a}{\sqrt{4\,a\,c-b^2}}arc\text{tg}\frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)2a}{\sqrt{4\,a\,c-b^2}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4\,a\,c-b^2}}arc\text{tg}\frac{2\,\mathrm{a}\,\mathrm{x}+\mathrm{b}}{\sqrt{4\,\mathrm{a}\,\mathrm{c}-\mathrm{b}^2}}+\mathrm{C}. \qquad (13)$$

Таблицалық интегралдағы (5) формуладан мынадай қорытындыға келеміз: егер бөлшектің бөлімінің дифференциалы алымына тең болса, онда бұл бөлшектің интегралы бөлімінің логарифміне тең болады. Келесі карастырылатын интегралға осы қасиетті пайдалануға тура келеді.

**IV**. $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx,$

бұл интегралдың бөлімінің дифференциалы тең $(2ax+b)\quad dx$. Сондықтан интеграл таңбасы ішіндегі бөлшектің алымын ос көрсетілген өрнекке келтіруіміз керек, ол үшін бөлшектің алымын *2a*-ға көбейтеміз және бөлеміз, сонан кейін оған $pb$ санын қосамыз және одан $pb$ санын аламыз. Сонда

$$\int \frac{(px+q)dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\int \frac{2\,a\,p\,x+pb+2\,a\,q-pb}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$\frac{p}{2a}\int \frac{(2\,ax+b)dx}{ax^2+bx+c} + \frac{2\,q+pb}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \quad (14)$$

$$= \frac{p}{2a}ln(ax^2+bx+c) + \frac{2\,aq-pb}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Жоғарыда айтылған ескертпені міне осы арада қолдандық. (14) теңдіктің оң жағында тұрған интегралдың нәтижесі не арктангенс, не логарифм болады, ол бөлімде тұрған $ax^2+bx+c$ квадрат үш мүшенің дискриминантының таңбасына тәуелді.

**V**. $\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^m}.$

Алдымен плюс таңбасымен алайық:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^m}dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{m-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^m}. \quad (15)$$

(15) теңдіктің оң жағындағы екінші интегралды бөлімшелеп интегралдаймыз:

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)} = \int x \cdot \frac{xdx}{(x^2+a^2)^m},$$

$$u = x, \qquad dv = \frac{xdx}{(x^2+a^2)^m},$$

бұл арадан

$$du = dx, \qquad\qquad v = -\frac{1}{2\,(m-1)(x^2+a^2)^{m-1}}.$$

Бұдан кейін

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^m} = -\frac{x}{2(m-1)(x^2+a^2)^{m-1}} +$$

$$+\frac{1}{2(m-1)}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{m-1}}.$$

Енді осы теңдіктің оң жағын (15) теңдіктің оң жағындағы екінші интегралдың орнына қоямыз. Сонда

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^m}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{m-1}}+\frac{x}{2a^2(m-1)(x^2+a^2)^{m-1}}-$$
$$-\frac{1}{2a^2(m-1)}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{m-1}},$$

немесе

$$\int\frac{dx}{(x^2\pm a^2)^m}=\frac{x}{2a^2(m-1)(x^2\pm a^2)^{m-1}}+$$
$$+\frac{2m-3}{2m-2}\int\frac{dx}{(x^2\pm a^2)^{m-1}}. \qquad (16)$$

(16) формуланы *рекурренттік формула* деп атайды. Осы (16) теңдіктің оң жағында тұрған интегралға тағы осы (16) формуланың өзін қолданамыз. Сонда бара-бара бөлімнің дәреже көрсеткішін бірге жеткіземіз.

Мәселен,

$$\int\frac{dx}{(x^2-4)^3}=\frac{x}{16(x^2-4)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x^2-4)^2}=\frac{x}{16(x^2-4)^2}+$$
$$+\frac{3}{4}\cdot\frac{x}{8(x^2-4)}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x^2-4}=\frac{x}{16(x^2-4)^2}+\frac{3x}{32(x^2-4)}+$$
$$+\frac{3}{16}ln\frac{x-2}{x+2}+C.$$

**VI**. $\int\frac{dx}{(a\,x^2+bx+c)^m}$

бұл интегралды қаралып өткен V интегралға келтіруге болады.

$$\int\frac{dx}{(ax+bx+c)^m}=\frac{1}{a^m}\int\frac{d\left(x+\frac{b}{2\,a}\right)}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4\,a\,c}{4\,a^2}\right]^m}=$$
$$=\frac{1}{a^m}\int\frac{dz}{(z^2\pm k^2)^m}, \qquad (17)$$

мұнда

$$z=x+\frac{b}{2\,a},\frac{b^2-4\,a\,c}{4\,a^2}=\mp k^2.$$

## § 5. Рационал функцияларды интегралдау

$\frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)}$ – рационал функцияны қарайық, мұнда $f(x)$ және $\mathrm{g}(x)$ – көпмүшелер. Айталық, $\mathrm{g}(x)$ көпмүшенің дәреже көрсеткіші $f(x)$ – көпмүшенің дәреже көрсеткішінен артық, былайша, бөлшек – дұрыс бөлшек. Егер $f(x)$ –көпмүшенің дәрежесі, $\mathrm{g}(x)$ көпмүшенің дәрежесінен артық болса, онда көпмүшені көпмүшеге бөлеміз және сонда бөлінді $\frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)}$ бүтін бөлікке және дұрыс бөлшекке жіктеледі.

Енді осы рационал функцияның интегралын қарайық:

$$\int \frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)}dx.$$

Әрбір $\mathrm{g}(x)$ көпмүшені бірінші және екінші дәрежелі көбейткіштердің көбейтіндісіне жіктеп жазуға болады, яғни

$$\mathrm{g}(x) = (x-a)^k(x-b)^1 \dots (x^2+px+q)^m(x^2+r\,x+s)^n, \qquad (18)$$

мұнда дәреже көрсеткіштер $k, l, \dots, m, n -$ оң бүтін сандар, олардың қосындысы $\mathrm{g}(x)$ көпмшенің бас мүшесінің дәреже көрсеткішіне тең.

Бұл теорема жоғары алгебра пәнінен белгілі. Егер (18) теңдік орындалса, онда

$$\frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} +$$
$$+\frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_1}{(x-b)^1} + \ldots + \frac{p_1x+q_1}{x^2+px+q} +$$
$$+\frac{p_2x+q_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{p_mx+q_m}{(x^2+px+q)^m} + \frac{r_1x+s_1}{x^2+rx+s} +$$
$$+\frac{r_2x+s_2}{(x^2+rx+s)^2} + \ldots + \frac{r_nx+s_n}{(r^2+rx+s)^n}, \qquad (19)$$

мұнда $A_1, A_2, \dots, A_kB_1,\ B_2, \dots, B_1, \dots, p_1, p_2, p_m,\ q_1, r_1, s_1, \dots, r_k,\ s_n,$ – белгісіз, табуға жатаын коэффиценттер[1].

Белгісіз коэффициенттерді табу үшін (19) теңбе-теңдіктің екі жағын ортақ бөлімнен босатып жібереміз де, екі жағында тұрған көпмүшелердегі бірдей дәрежелі $x$-тердің коэффициенттерін бір-бірімен салыстырып, коэффициенттер бойынша теңдеулер системасын құрамыз. Осы теңдеулер системасынан табылған

---

[1] А.К. Сушкевичтің «Жоғары алгебра негіздері» атты кітабының 91–94 және 100–114-беттерін қараңыздар, 1932 ж.

коэффициенттердің мәндерін (19) теңдікке апарып қойып, ол теңдіктің екі жағын интегралдаймыз.

(19) теңдіктің оң жағында тұрған функцияларды қалай интегралдауды білеміз.

Енді осы айтылғандарды мысал жүзінде көрсетейік.

$$a)\ \int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2 - 2x^2} = \int \frac{dx}{\left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)\left(x^2 + x\sqrt{2} + 1\right)};$$

$$\frac{1}{\left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2} + 1\right)} = \frac{Ax+B}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{Cx+D}{x^2 + \sqrt{2} + 1};$$

$$1 = (Ax+B)\left(x^2 + x\sqrt{2} + 1\right) + (Cx+D)\left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right);$$

$$1 = Ax^2 + A\sqrt{2}x^2 + Ax + Bx^2 + Bx\sqrt{2} + B + Cx^3 -$$

$$-C\sqrt{2}x^2 + Cx + Dx^2 - D\sqrt{2}x + D.$$

Енді осы кейінгі теңбе-теңдіктің екі жағында тұрған дәрежелері бірдей $x$-тердің коэффициенттерін салыстырып табамыз:

$$A + C = 0$$

$$A\sqrt{2} + B\sqrt{2} - C\sqrt{2} - D\sqrt{2} + B + D = 0$$

$$A + B\sqrt{2} + C - D\sqrt{2} = 0$$

$$B + D = 1.$$

Осы теңдеулер системасын шешіп табамыз:

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \qquad B = \frac{1}{2}, \qquad C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \qquad D = \frac{1}{2}.$$

Бұдан кейін

$$\frac{1}{\left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)\left(x^2 + x\sqrt{2} + 1\right)} = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1},$$

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{dx}{\left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)\left(x^2 + x\sqrt{2} + 1\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} dx. \qquad (20)$$

(20) теңдіктің оң жағында тұрған интегралдарды табу жолы жоғарыда көрсетілді.

Міне, енді сол жолды әрқайсысына жеке-жеке қолданамыз:

$$\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2\sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx =$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1}=\frac{1}{2}ln\,(x^2+$$

$$+x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}ln\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{1}arc\text{tg}\frac{\left(\text{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2}}{1}.$$

Енді осы теңдіктің оң жағын (20) теңдіктің оң жағындағы бірінші интегралдың орнына апарып қояйық. Сонда

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}ln\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}arc\text{tg}\frac{x\sqrt{2}+1}{1}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx \qquad (21)$$

Енді (21) теңдіктің оң жағындағы интегралды жеке алайық:

$$\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}ln\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)-$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}ln\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)+arc\ \text{tg}\left(x\sqrt{2}-1\right).$$

Осы теңдіктің оң жағын (21) теңдіктің оң жағында тұрған интегралдың орнына апарып қойып табамыз:

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}ln\sqrt{\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}arc\text{tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$$

Бұл параграфтың қорытындысында айтып кететін мәселе мынау: рационал бөлшектерді жабайы бөлшектер қосындысына жіктеп рационал функциялардың интегралдарын табуды іс жүзінде асыруға болады, бірақ бұл мәселе жоғары дәрежелі алгебралық теңдеулерді шешумен байланысты, өйткені (18) формуланы білу үшін, мына $\text{g}(x)=0$ теңдеудің түбірлерін табу керек. Міне, жоғарыдағы баяндалған тәсілдің негізгі кемшілігі осында. Мәселен, мына $\int\frac{4x^9+21x^6+2x^3-3x^2-3}{(x^7-x+1)^2}dx$ интегралды бұл жолмен шығара алмаймыз.

Егер $f(x)$ – элементар функция болса, оның интегралы да элементар функция бола ма? – деген сұрақ туады.

Рационал функцияның интегралы әрқашан да элементар функция болып табылады. Бұдан басқа элементар функциялардың интегралдары элементар функциялар болуы да, болмауы да мүмкін.

Мәселен, мына сияқты интегралдар:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \qquad \int \frac{\cos x}{x} dx, \int e^{-x^2} dx, \qquad \int \sin(x^2) dx,$$

$$\int \cos(x^2) dx, \qquad \int \frac{dx}{lnx} \text{ т. т.}$$

элементар функциялар арқылы өрнектелмейтіні әлдеқашан зерттелген. Бұл интегралдарды «алынбайтын» интегралдар деп атайды. Бірақ тырнақшаның ішіне алынған терминді жаңағы келтірілген интегралдар мүлдем жоқ деген мағынада түсінбеу керек. Бұл интегралдардың бар болатындығын және олардың мәндері тиянақты функциялар болатынын келесі тараулардан көресіздер.

## § 6. Рационал функцияларды Остроградский әдісі бойынша интегралдау

Рационал функцияларды интегралдау проблемасының ең маңызды мәселелерінің біреуін шешкен орыс халқының атақты математигі Остроградский.

Рационал функциядан алынған интегралдың рационал бөлігін, $g(x)$ көпмүшенің түбірлерін білмей-ақ элементар алгебралық амалдардың көмегімен-ақ табуды Остроградский тұңғыш рет көрсетті.

Остроградскийдің бұл әдісін, рационал бөлшектен алынған интегралдың рационал бөлігін трасцендент бөлігінен айыру деп атайды.

Мына $\frac{f(x)}{g(x)}$ дұрыс бөлшектің интегралын қарайық:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx,$$

мұнда $f(x)$ және $g(x)$ – көпмүшелер.

Остроградский әдісі бойынша

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + \int \frac{\Phi(x)}{F(x)}dx, \tag{22}$$

мұнда $\psi(x), \ \psi(x), \ \Phi(x), \ F(x), -$ көпмүшелер, $\psi(x)$ – мына $g(x)$ пен оның туындысының ортақ ең үлкен бөлгіші, $F(x)$ – мына $g(x)$-ті $\psi(x)$-ке бөлгендегі шығатын бөлінді. Егер $\psi(x)$ көпмүшенің дәреже көрсеткіші $p$ болса, онда $\varphi(x)$-тің дәреже көрсеткіші $p$ – 1-ден аспауы керек; егер $\kappa$ – мына $F(x)$ көпмүшенің бас дәреже көрсеткіші $\kappa$–1-ден аспауы керек.

Шынында, егер $a, \quad b, \dots g(x)$ көпмүшенің еселігі, $k, \quad l, \dots \dots$ түбірлері болса, онда (19) теңдік орыдалады. Осы (19) теңдіктің екі жағын *dx*-ке көбейтіп интегралдасақ, онда

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = -\frac{A_3}{x-a} - . \ . \ . - \frac{A_k}{(k-1)(x-a)^{k-1}} - \frac{B_2}{x-b} -$$
$$- . \ . \ . - \frac{B_l}{(l-1)(x-b)^{l-1}} + . \ . \ . + \int \left[\frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \right.$$
$$\left. + \frac{a_1x+b_1}{x^2+px+q} + . \ . \ . + \frac{m_1x+n_1}{x^2+rx+s}\right] dx.$$

Осы кейінгі теңдіктің оң жағында тұрған интегралдан шығатын нәтижелер трансцендент функциялар, атап айтқанда, логарифм мен арктангенстер.

Интегралдың сыртында тұрған бөлшектерді қосып, мына түрге келтіреміз: $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Интеграл таңбасы ішінде тұрған бөлшектерді қосып, оларды мына түрде $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ келтіруге болады.

Сөйтіп,

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + \int \frac{\Phi(x)}{F(x)}dx.$$

Бір мысал келтірейік:

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^3+1)^2}dx.$$

Мұнда

$$g(x) = x(x^3+1)^2,$$
$$g'^{(x)} = \ (x^3+1)(x^3+6x^2+1). \quad \text{Демек,} \psi\ (x) = x^3+1,$$
$$F(x) = \frac{g(x)}{\psi\ (x)} = x(x^3+1).$$

(22) формула бойынша

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^3+1)^2}dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} + \int \frac{A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1}{x(x^3+1)}dx,$$

мұнда *A, B, C, A₁, B₁, C₁, D₁* – табуға жататын, әзірше белгісіз коэффициенттер. Оларды табу үшін кейінгі теңдіктің екі жағынан туынды алып, келесі теңбе-теңдікті құрамыз:

$$x^2+1=(2Ax^2+Bx)(x^3+1)-3x^3(Ax^2+Bx+C)+$$
$$+(A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1)(x^3+1).$$

Осы теңбе-теңдіктің екі жағындағы бірдей дәрежелі x-тің коэффициенттерін салыстырып табамыз:

$$A_1=0, B=0, C_1=0, A=\frac{1}{3}, C=\frac{1}{3}, B_1=\frac{1}{3}, D_1=1.$$

Ендеше

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^3+1)^2}dx = \frac{x^2+1}{3(x^3+1)} + \frac{1}{3}\int \frac{x^2+3}{x(x^3+1)} + dx. \qquad (23)$$

Енді осы (23) теңдіктің оң жағындағы интегралды жеке алайық:

$$\int \frac{x^2+3}{x(x^3+1)}dx = \int \frac{(x^2+3)dx}{x(x+1)(x^2-x+1)},$$
$$\frac{x^2+3}{x(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma x+\delta}{x^2-x+1},$$

бұл арадан

$$x^2+3=\alpha(x+1)(x^2-x+1)+\beta x(x^2-x+1)$$
$$+x(x+1)(\gamma x+\delta)$$

мұнда $\alpha, \beta, \Upsilon, \delta$ – әзірше белгісіз коэффиценттер. Оларды табудың екінші бір жолы былай: теңбе-теңдіктің екі жағындағы $x$-тің орнына кез келген сандарды қойып, белгісіз коэффициенттер бойынша теңдеулер системасын құрамыз. Бірақ $x$-тің орына интеграл таңбасы ішіндегі бөлшектің бөліміндегі көбейткіштердің түбірлерін қойған өте қолайлы болады.

Мәселен $x$-тің орнына нольді қойсақ, онда $\alpha = 3$; $x$-тің орнына – 1-ді қойсақ, онда 4=–3β, бұл арадан $\beta = -\frac{4}{3}$.

Айталық, $x_1 -$ мына $x^2-x+1$ квадрат үш мүшенің түбірі болсын, сонда ${x_1}^2 - x_1 + 1 = 0$, бұл арадан

$${x_1}^2 = x_1 - 1.$$

Енді теңбе-теңдіктегі $x$-тің орнына $x_1$-ді қойсақ, онда

$${x_1}^2+3=(\gamma {x_1}^2+\delta x_1)(x_1+1).$$

Бұл теңбе-теңдіктің оң жағындағы және сол жағындағы ${x_1}^2$-тың орнына $x_1 - 1$-ді қоямыз. Сонда:

$$x_1 - 1 + 3 = (\gamma x_1 - \gamma + \delta x_1)(x_1 + 1)$$

немесе

$$x_1 + 2 = (\gamma {x_1}^2 + \delta {x_1}^2 - \gamma x_1 + \gamma x_1 + \delta x_1 - \gamma)$$

$$x_1 + 2 = \gamma {x_1}^2 + \delta {x_1}^2 + \delta x_1 - \gamma.$$

${x_1}^2$ тағы да ауыстырамыз, сонда

$$x_1 + 2 = \gamma x_1 - \gamma + \delta x_1 - \delta + \delta x_1 - \gamma.$$

Осы кейінгі теңбе-теңдіктің екі жағындағы бірдей дәрежелі $x_1$-дің коэффициенттерін теңестіріп табамыз:

$$1 = \gamma + 2\delta,$$

$$2 = -\delta - 2\gamma, \qquad \gamma = -\frac{5}{3}, \;\; \delta = \frac{4}{3}$$

$$5 = -3\gamma,$$

$$\int \frac{x^2+3}{x(x^3+1)}dx = \int \frac{(x^2+3)d\,x}{x(x+1)(x^2-x+1)} = 3\int \frac{dx}{x} - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x+1} -$$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{5x-4}{x^2-x+1}dx = 3\,ln\,x - \frac{4}{3}ln(x+1) - \frac{1}{6}\int \frac{10x-8}{x^2-x+1}dx =$$

$$= 3\,ln\,x - \frac{4}{3}ln(x+1) - \frac{1}{6}\int \frac{10x-5-3}{x^2-x+1}dx =$$

$$= ln\,x^3 - \frac{4}{3}ln(x+1) - \frac{5}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} =$$

$$= ln\,x^3 - \frac{4}{3}ln(x+1) - \frac{5}{6}ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= ln\frac{x^3}{\sqrt[3]{(x+1)^4(x^2-x+1)^{\frac{5}{2}}}} + \frac{1}{\sqrt{2}}arc\,tg(x-1)\sqrt{2}.$$

Енді осы теңдіктің оң жағындағы өрнекті (22) теңдіктің оң жағындағы интегралдың орнына қомыз. Сонда

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^3+1)^2}dx = \frac{x^2+1}{3(x^3+1)} + ln\frac{x^3}{\sqrt[3]{(x+1)^4(x^2-x+1)^{\frac{5}{2}}}} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}arc\,tg(x-1)\sqrt{2} + C.$$

## § 7. Иррационал функцияларды интегралдау

Рационал функцияларды интегралдау үшін белгілі әдістің барлығын және әдіс қойылған есепті аяғына дейін шығаруға мүмкіндік беретінін өткен екі параграфта айттық.

Егер интеграл таңбасы ішінде иррационал өрнектер болса, онда тиісті ауыстыруларды қолданып, берілген интегралды рационал функцияның интегралына келтіреміз. Интеграл таңбасы ішіндегі иррационал өрнекті қолайлы ауыстыру арқылы рационал функцияға түрлендіруді берілген интегралды рационалдандыру дейді.

Иррационал функциядан алынған әрбір интегралды рационалдандыру мәселесі әрқашан да іс жүзіне аса бермейді.

Егер $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – тұрақты сандар, $\frac{l}{m}, \dots, \frac{r}{s}$ – рационал сандар, ал $R(x, y, \dots, z), x, y, \dots, z$ айнымалылардың рационал функциясы болса, онда рационал ауыстырудың көмегімен келесі интеграл

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \dots, \left(\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dx \qquad (24)$$

рационал функцияның интегралына келтіріледі. $n$ – мына $m, \dots, s$ сандардың ең кіші еселігі болсын. Төмендегі ауыстыруды жүргіземіз:

$$\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta} = z^{\,n}, \text{бұл арадан}$$

$$x = \frac{\delta z^n - \beta}{\alpha - \gamma z^n} = p(z), \qquad dx = p'(z)dz.$$

$$\int R\left[\rho(z), z^{n\cdot\frac{l}{m}}, \quad . \ . \ . \quad , z^{n\cdot\frac{r}{s}}\right] \rho'(z)\, dz.$$

Осы кейінгі интеграл таңбасы ішінде тұрған өрнек – айнымалы z-тің рационал функциясы болады, өйткені g(z) оның туындысы $\rho'(z)$ – рационал функциялар, $n \cdot \frac{l}{m}$, . . . . , $n \cdot \frac{r}{s}$ бүтін сандар. Бұл интегралды табу үшін §§ 6, 7 айтылған әдістерді қолданамыз.

I. Мысал келтірейік:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}},$$

мынадай $z^6 = x$ ауыстыру жүргіземіз, сонда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{z^3 d\, z}{1+z} = 6\int (1-z+z^2)d\, z - 6\int \frac{dz}{1+z} =$$
$$= 6z - 3z^2 + 2z^3 - 6\ln(1+z) + C = 6\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} +$$
$$+2\sqrt{x} - 6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right) + C.$$

Енді мынадай интегралды қарайық:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx.$$

Алдымен, бұл интегралдың дербес түрлерін қарайық.

$$\text{II.} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, (a>0).$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4\,a\,c}{4\,a^2}}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int - \frac{d\left(x+\frac{b}{2\,a}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4\,a\,c}{4\,a^2}}}$$

Енді осы кейінгі интегралға (6) формуланы қолданамыз. Сонда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} ln\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4\,a\,c}{4\,a^2}}\right)$$
$$+ C$$

немесе

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} ln\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right) + C. \qquad (25)$$

$$\text{III.} \int \frac{dx}{\sqrt{-ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2+4\,a\,c}{4\,a^2} - \left(x - \frac{b}{2a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{d\left(x - \frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\frac{b^2+4\,a\,c}{4\,a^2} - \left(x - \frac{b}{2a}\right)^2}}$$

Енді осы теңдіктің оң жағында тұрған интегралға (5) формуланы қолданамыз. Сонда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} arc\sin \frac{\left(x - \frac{b}{2a}\right)2a}{\sqrt{b^2 + 4\,a\,c}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} arc\sin \frac{2\,a\,x - b}{\sqrt{b^2 + 4\,a\,c}} + C. \qquad (26)$$

$$\text{IV.} \int \sqrt{a\,x^2 + bx + c}dx = \sqrt{a} \int \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}dx =$$

$$= \sqrt{a} \int \sqrt{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}}d\left(x + \frac{b}{2\,a}\right).$$

Бұл теңдіктің оң жағында тұрған интегралға (9) формуланы қолданамыз. Сонда

$$\int \sqrt{a\,x^2 + bx + c}\,dx = \sqrt{a}\left[\frac{x + \frac{b}{2a}}{2}\sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} + \right.$$

$$\left. + \frac{b^2 - 4\,a\,c}{2 \cdot 4a^{\overline{2}}} ln\left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}\right)\right] + C =$$

$$= \frac{2\,a\,x + b}{4\,a}\sqrt{a\,x^2 + bx + c} +$$

$$+ \frac{\sqrt{a}\left(b^{\overline{2}} - 4\,a\,c\right)}{8a^2} ln\left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}\right) + C. \qquad (27)$$

$$\text{V.} \int \sqrt{-a\,x^2 + bx + c}\;dx = \sqrt{a} \int \sqrt{-x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}dx =$$

$$= \sqrt{a} \int \sqrt{\frac{b^2 + 4\,a\,c}{4\,a^{\overline{2}}} = \left(x - \frac{b}{2\,a}\right)^2}\;d\;\left(x - \frac{b}{2\,a}\right).$$

Бұл теңдіктің оң жағында тұрған интегралға (4) формуланы қолданамыз. Сонда

$$\int \sqrt{-a\,x^2 + bx + c}\,dx =$$

$$= \sqrt{a}\left[\frac{x - \frac{b}{2a}}{2}\sqrt{\frac{b^2 + 4\,a\,c}{4\,a^2} - \left(x - \frac{b}{2\,a}\right)^2 +}\right.$$

$$\left. + \frac{b^2 + 4\,a\,c}{8\,a^2}\,arc\sin\frac{\left(x - \frac{b}{2a}\right)2\,a}{\sqrt{b^2 + 4\,a\,c}}\right] + C =$$

$$= \frac{\sqrt{a}(2\,ax - b)}{4\,a}\sqrt{-x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} +}$$

$$+ \frac{\sqrt{a}(b^2 + 4\,a\,c)}{8\,a^2}\,arc\sin\frac{2\,a\,x - b}{\sqrt{b^3 + 4\,a\,c}} + C. \tag{28}$$

VI. $I_m = \int \frac{x^m d\,x}{\sqrt{a\,x^2 + bx + c}},$ $(m \geq 1)$

Келтірілген интегралды табу үшін келесі туындыны іздейміз:

$$\left[\,x^{m-1}\sqrt{R(x)}\right]'$$

$$= \frac{2(m-1)x^{m-2}(a\,x^2 + bx + c) + x^{m-1}(2\,a\,x + b)}{2\sqrt{a\,x^2 + bx + c}} =$$

$$= ma\frac{x^m}{\sqrt{a\,x^2 + bx + c}} + \left(m - \frac{1}{2}\right)b\frac{x^{m-1}}{\sqrt{a\,x^2 + bx + 1}} +$$

$$+(m-1)c\frac{x^{m-2}}{\sqrt{a\,x^2 + bx + 1}}, \quad \text{мнда } R\,(x) = \sqrt{a\,x^2 + bx + c}.$$

Осы шыққан теңбе-теңдіктің екі жағын интегралдап табамыз:

$$x^{m-1}\sqrt{a\,x^2 + bx + c} = maI_m + \left(m - \frac{1}{2}\right)bI_{m-1} + (m-1)cI_{m-2.}$$

$m$-ге біртіндеп мәндер берейік: $m = 1$, онда

$$I_1 = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2a}I_0;$$

егер $m$=2 болса, онда

$$I_2 = \frac{1}{4a^2}(2\,a\,x - 3b)\sqrt{a\,x^2 + bx + c} + \frac{1}{8a^2}(3b^2 - 4\,a\,c)\cdot I_0.$$

Сонан әрі қарай

$$I_m = P_{m-1}(x)\sqrt{a\,x^2 + bx + 1} + \lambda I_0,$$

мұнда $P_{m-1}(x) = \alpha_{m-1}x^{m-1} + \alpha_{m-2}x^{m-2} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ коэффиценттері уақытша белгісіз $(m-1)$ дәрежелі көпмүше $\lambda$ да уақытша белгісіз тұрақты сан.

Сонымен,

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a\,x^2 + bx + c}} = (\alpha_{m-}x^{m-1} + \alpha_{m-2}x^{m-2} +. \ . \ . + \alpha_1 x + \alpha_0) \times$$

$$\times \sqrt{a\,x^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{a\,x^2 + bx + c}}.$$

$$\text{VII.} \int \frac{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} +. \ . \ . + b_{n-1}x + b_n}{\sqrt{a\,x^2 + bx + c}} dx =$$

$$= (c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} +. \ . \ . + c_1 x + c_0)\sqrt{a\,x^2 + bx + c} +$$

$$+\beta \int \frac{dx}{\sqrt{a\,x^2 + bx + c}}, \qquad (30)$$

(29) және (30) теңдіктердің оң жақтарында уақытша белгісіз $\alpha_{m-1},\ \alpha_{m-2},\ . \ . \ . \ ,\ \alpha_1,\ \alpha_0,\ \lambda,\ c_{n-1},\ c_{n-2},\ . \ . \ . \ ,\ c_1,\ c_0,\ \beta$ коэффиценттерді табу үшін осы теңдіктердің екі жақтарынан туынды алып, оның нәтижесінде шыққан өрнектерді ортақ бөлімге келтіріп және одан босатып, теңбе-теңдік құрамыз.

$$\text{VIII.} \int \frac{dx}{(x-\alpha)^m \sqrt{a\,x^2 + bx + c}},$$

бұл интегралды VI интегралға келтіруге болады, ол үшін мынадай $x - \alpha = \frac{1}{z}$ ауыстыру жүргіземіз. Сонда

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m \sqrt{a\,x^2 + bx + c}} =$$

$$= -\int \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt{(a\,\alpha^2 + b\,\alpha + c)z^2 + (2a\,\alpha + b)z + a}}. \qquad (31)$$

$$\text{IX.} \int \frac{dx}{\left(a\,x^{\overline{2}} + \beta\right)\sqrt{a\,x^{\overline{2}} + c}},$$

мұнда $\alpha, \beta, a, c$ кез келген тұрақты сандар. Бұл интегралды табу үшін төмендегі ауыстыруды жасаймыз: $\left(\sqrt{a\,x^2 + c}\right)' = z,$

бұл арадан

$$\frac{dx}{\sqrt{a\,x^{\overline{2}} + c}} = \frac{dz}{a - z^{\overline{2}}},\ \alpha\,x^2 + \beta = \frac{(\alpha\,c - a\beta)z^{\overline{2}} + a^2\beta}{a\,(a - z^2)}.$$

Бұдан кейін

$$\int \frac{dx}{\left(\alpha\, x^{\overline{2}} + \beta\right)\sqrt{ax^{\overline{2}} + c}} = a \int \frac{dz}{(\alpha\, c - a\beta)z^{\overline{2}} + a^2\beta}. \quad (32)$$

$$\text{X.} \int \frac{(px + q)dx}{(a\, x^2 + \beta x + \gamma)\sqrt{a\, x^2 + bx + c}},$$

бұл интеграл жөнінде екі жағдайды қараймыз.

Бірінші жағдай: квадрат үшмүшелердегі коэффициенттер $\alpha, \beta, a, b$ өзара пропорционал, яғни

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = h.$$

Бұл жағдайда қаралып отырған интегралды мына сияқты

$$\int \frac{pdx}{(\alpha\, x^2 + \beta)\sqrt{a\, x^{\overline{2}} + c}}, \qquad \int \frac{pxdx}{\left(\alpha\, x^{\overline{2}} + \beta\right)\sqrt{ax^{\overline{2}} + c}}$$

интегралдарға келтіруге болады. Ол үшін төмендегі ауыстыруды жүргіземіз:

$$(a\, x^2 + bx + c)' = u,$$

бұл арадан

$$ax^2 + bx + c = \frac{u^2 - (b^2 - 4\, a\, c)}{4\, a},$$

$$\alpha x^2 + \beta x + \lambda = \frac{h[u^2 - (b^2 - 4\, a\, c)] + 4\, a\gamma - 4\, a\, c\, h}{4\, a},$$

$$(px + q)dx = \frac{pu - bp + 2aq}{4\, a}\, du.$$

Бұдан кейін

$$\int \frac{(px + q)dx}{(a\, x^2 + \beta x + \gamma)\sqrt{a\, x^2 + bx + c}} = \frac{2}{\sqrt{a}}$$

$$\int \frac{(pu - bp + 2aq)du}{(\mathrm{h}\, u^2 - \mathrm{h}\, b^2 + 4\, a\, h\, c + 4\, a\, \gamma - 4a\, c\, h)\sqrt{u^2 - (b^2 - 4\, a\, c)}}. (33)$$

(33) теңдіктің оң жағында тұрған интегралды екі интегралға айырып жазуға болады және мұнда бірінші интегралдың алымында бір дәрежелі «*u*» бар, сондықтан ол интеграл мынадай $\sqrt{u^2 - (b^2 - 4\, a\, c)} = t$ ауыстырудың көмегімен интегралданады; екінші интеграл-қарастырылған IX интеграл.

Екінші жағдай: коэффициенттар $\alpha, \beta$ және $a, b$ пропорционал емес. Бұл жолы мынадай $x = \frac{ku+}{u+1}$ ауыстыру жүргіземіз, мұнда *k, l*

– әзірше белгісіз, тұрақты сандар. Осы жүргізіліп отырған ауыстырудан табамыз:

$$\alpha\, x^2+\beta x+\gamma=\frac{(\alpha\, k^2+\beta k+\gamma)u^2+(2\alpha lk+\beta k+\beta l+2\gamma)u+\alpha l^2+\beta l+\gamma}{(u+1)^2};$$

$$ax^2+bx+c=\frac{(ak^2+bk+c)u^2+(2alk+bk+bl+2c)u+al^2+bl+c}{(u+1)^2}.$$

$k$, $l$ сандарын сайлап алу өз қолымызда болғандықтан, оларды келесі теңдеулер системасы

$$\begin{gathered}2\alpha lk+\beta k+\beta l+2\gamma=0,\\ 2alk+bk+bl+2c=0,\end{gathered}\qquad(33^1)$$

орындалатындай етіп алайық. Мына анықтауыш $\alpha b-a\beta\neq 0$ деп ұйғарайық, сонда $(33')$ системадан табамыз:

$$l+k=\frac{2a\,\gamma-\alpha\, c}{\alpha\, b-a\,\beta},\qquad lk=\frac{c\,\beta-b\,\gamma}{\alpha\, b-a\,\beta},$$

Сөйтіп, $l$ және $k$ бір тиісті квадрат теңдеудің түбірі болатын болды. $(33^1)$ системаны еске алсақ, онда

$$\alpha\, x^2+\beta x+\gamma=\frac{(\alpha\, k^2+\beta k+\gamma)u^2+\alpha l^2+\beta l+\gamma}{(u+1)^2},$$

$$a\, x^2+bx+c=\frac{(a\, k^2+bk+c)u^2+al^2+bl+c}{(u+1)^2},$$

$$px+q=\frac{(pk+q)u+pl+q}{u+1},$$

$$dx=\frac{k-l}{(u+1)^2}du.$$

Міне, енді осы кейінгі өрнектердің барлығын X интегралға апарып қойып, сонан кейін біраз ықшамдасақ, сонда

$$\int\frac{(px+q)dx}{(\alpha\, x^2+\beta x+\gamma)\sqrt{a\, x^2+bx+c}}=$$

$$=(k-l)(mk+n)\int\frac{udu}{(\alpha_1u^2+\beta_1)\sqrt{a_1u^2+c_1}}+$$

$$+(k-l)(m+n)\int\frac{du}{\left(\alpha_1u^2(\alpha_1u^2+\beta_1)\sqrt{a_1u^2+c_1}\right)}.\qquad(34)$$

мұнда $\alpha_1=\alpha k^2+\beta k+\gamma,\ \beta_1=\alpha l^2+\beta l+\gamma,$

$$a_1=ak^2+bk+c,\qquad b_1=ab^2+bl+c.$$

Осы қарастырылған VII, VIII, IX, X интегралдарға бір-бір мысалдан келтірейік:

$$a) \qquad \int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = (Ax^2 + Bx + c)\sqrt{x^2 + 2x + 2 +}$$

$$+\lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}. \qquad (35)$$

Белгісіз A, B, C, $\lambda$ коэффициенттерді табу үшін (35) теңдіктің екі жағынан туынды алып, сонан кейін ортақ бөлімге келтіріп және одан босатып, келесі теңбе-теңдікті құрамыз:

$$x^3 - x + 1 = (2Ax + B)(x^2 + 2x + 2) + (Ax^2 + Bx + c) \times$$

$$\times (x + 1) + \lambda.$$

Екі жақтағы бірдей дәрежелі $x$-тердің коэффициенттерін теңдестіріп келесі системаны құрамыз:

$$3A = 1, \qquad 5A + 2B = 0, \qquad 4A + 3B + C = 1,$$

$$2B + C + \lambda = 1,$$

бұл арадан

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = -\frac{5}{6}, \; C = \frac{1}{6}, \qquad \lambda = \frac{5}{2}.$$

Осы табылған коэффицинеттерді (35) теңдіктің оң жағына апарып қоямыз. Сонда

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \frac{1}{6}(2x^2 - 5x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} +$$

$$+\frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}};$$

егер (25) формуланы еске алсақ, онда

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \frac{1}{6}(2x^2 - 5x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} +$$

$$\frac{5}{2} ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right) + C.$$

$$б) \int \frac{dx}{(x + 1)^3\sqrt{x^2 - 2x - 1}},$$

бұл интегралды табу үшін мынадай $x + 1 = \frac{1}{z}$ ауыстыру жасаймыз. Сонда

$$\int \frac{dx}{(x + 1)^3\sqrt{x^2 - 2x - 1}} = -\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{2z^2 - 4z + 1}},$$

бұл интеграл жаңағы мұның алдында көрсетілген жолмен шығады.

$$\text{в)} \int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{2x^2+2x+1}}$$

$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{1}{2}$ ендеше мынадай ауыстыру $(x^2+x+1)' = z$ жасаймыз; бұл арадан

$$dx = \frac{1}{2}dz,\ x^2+x+1 = \frac{1}{4}(z^2+3),$$

$$2x^2+2x+1 = \frac{1}{2}(z^2+3).$$

Енді

$$\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{2x^2+2x+1}} = \sqrt{2}\int \frac{zdz}{(z^2+3)\sqrt{z^2+1}} +$$

$$+\sqrt{2}\int \frac{dz}{(z^2+3)\sqrt{z^2+1}}.$$

Осы кейінгі теңдіктің оң жағындағы интегралға мынадай $\sqrt{z^2+1} = t$ ауыстыру жүргіземіз. Сонда

$$\sqrt{2}\int \frac{zdz}{(z^2+3)\sqrt{z^2+1}} == \sqrt{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = arc\text{tg}\frac{t}{\sqrt{2}} =$$

$$= arc\text{tg}\frac{\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{2}} = arc\text{tg}\sqrt{\text{2x}^2+\text{2x}+1.}$$

Бұдан кейін

$$\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{2x^2+2x+1}} = arc\text{tg}\sqrt{2x^2+2x+1} +$$

$$+\int \frac{dz}{(z^2+3)\sqrt{z^2+1}}. \qquad (36)$$

(36) теңдіктің оң жағындағы екінші интегралға мынадай ауыстыру жүргіземіз:

$$\left(\sqrt{z^2+1}\right)' = t,\ \text{ сонда}$$

$$\int \frac{dz}{(z^2+3)\sqrt{z^2+1}} = -\int \frac{dt}{2t^2-3} = -\frac{1}{4\sqrt{\frac{3}{2}}} ln\frac{t-\sqrt{\frac{3}{2}}}{t+\sqrt{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} ln\frac{2x+1\sqrt{3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}}{2x+1-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}}.$$

Енді осы өрнекті (36) теңдіктің оң жағына апарып қойып табамыз:

$$\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{2x^2+2x+1}} = arc\,\mathrm{tg}\sqrt{2x^2+2+1}+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}ln\frac{2x+1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}}{2x+1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2x^2+2x+1}}+C.$$

IX, X интегралдардағы қолданылған тәсілдерді Абель тәсілдері деп атайды.

## § 8. Биномдық дифференциалды интегралдау

Биномдық дифференциал деп мына өрнекті $x^m(a+b\,x^n)^p dx$ айтады. Осы өрнектің интегралын қараймыз:

$$\int x^m(a+b\,x^n)^p dx, \qquad (37)$$

мұнда *m, n, p* – кез келген тұрақты рационал сандар, ал $a$ мен $b$ – нольден айрықша тұрақты сандар.

Егер $p$ – оң бүтін сан болса, онда жақшалардың ішіндегі $a+b\,x^n$ екі мүшені Ньютон биномы формуласы бойынша жіктейміз де, сонан кейін барлық мүшелерді $x^m$-ге көбейтіп, әрқайсысынан жеке-жеке интеграл аламыз.

Айталық, p – бөлшек болсын, яғни $\rho=\frac{\alpha}{\beta}$.

Егер $\frac{m+1}{n}$ – бүтін сан болса, немесе нольге тең болса, онда (37) интеграл рационал функцияның интегралына келтіріледі.

Мұны дәлелдеу үшін келесі ауыстыруды

$$a+b\,x^n=z^N$$

жүргіземіз, мұнда N – бөлім $\beta$-ның еселігі, бұл арадан

$$x=b^{-\frac{1}{n}}(z^N-a)^{\frac{1}{n}}, \qquad x^{m+1}=b^{-\frac{m+1}{n}}(z^N-a)^{\frac{n+1}{n}},$$
$$x^m dx=\frac{N}{n}b^{-\frac{m+1}{n}}z^{N-1}(z^N-a)^{\frac{m+1}{n}}dz.$$

Енді

$$\int x^m(a+b\,x^n)^p dx=\frac{N}{n}b^{-\frac{m+1}{n}}\int z^{N\frac{\alpha}{\beta}}\; z^{N-1}\,(z^N-a)^{\frac{m+1}{n}-1}dz \qquad (38)$$

(38) теңдіктің оң жағындағы интеграл таңбасы ішіндегі өрнек рационал өрнек, өйткені $N, N\cdot\frac{\alpha}{\beta}$ – оң бүтін сан, $\frac{m+1}{n}$ – бүтін сан немесе ноль.

$\frac{m+1}{n}$ – бүтін сан болмасын. Қарастырылған жағдайға келтіру үшін (37) интегралды біраз түрлендіреміз:

$$\int x^m(a+b\,x^n)^p dx = \int x^{m+pn}(ax^{-n}+b)^p dx. \quad (39)$$

Қарастырылып өткен жағдай негізі бойынша (39) теңдіктің оң жағындағы интеграл рационал функция интегралына келтіріледі, егер $\frac{m+pn}{-n} - 1 = \frac{m+pn+1}{-n} = -\left(\frac{m+1}{n} + p\right) -$ бүтін сан немесе ноль болса.

Мұны дәлелдеу үшін төмендегі ауыстыруды жүргіземіз: $ax^{-n} + b = z^N$, мұнда N – бөлім $\beta$-ның еселігі. Бұл арадан

$$x = \frac{(z^N - b)^{-\bar{n}}}{a^{-\frac{1}{n}}}; \;\; x^{m+pn+1} = a^{\frac{1}{n}}(z^N - b)^{-\frac{m+pn-1}{n}}$$

$$x^{m+pn}dx = -\frac{a^{\frac{1}{n}}N}{n} z^{N-1}(z^N - b)^{-\frac{m+pn+1}{n}-1}dz.$$

Бұдан кейін

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \int x^{m+pn}(ax^{-n}+b)^p dx =$$

$$= -\frac{Na^{\frac{1}{n}}}{n}\int z^{N\cdot\frac{\alpha}{\beta}} \cdot z^{N-1}\,(z^N - b)^{-\frac{m\pm pn+1}{n}-1}dz. \quad (40)$$

(40) теңдіктің оң жағындағы интеграл таңбасы ішіндегі өрнек рационал өрнек.

Мысал келтірейік:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx = \int x^{-2(1+x_3)^{\frac{1}{3}}}dx,$$

мұнда

$$m = -2, \qquad n = 3, \qquad p = \frac{1}{3}; \;\; \frac{m+1}{n} = -\frac{1}{3}.$$

Екінші жағдай орындалмайтын болды. Үшінші жағдайды тексерейік $\frac{m+1}{n} + p = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$. Үшінші жағдай орындалатын болды. Сондықтан берілген интегралды түрлендіреміз. Сонда

$$\int x^{-2}\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{3}}dx = \int x^{-1}\left(x^{-3}+1\right)^{\frac{1}{3}}dx = \int \left(x^{-3}+1\right)^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{x}. \quad (41)$$

Енді мынадай $x^3 + 1 = z^3$ ауыстыру жүргіземіз. Бұл ауыстырудан

$$x^{-3} = z^3 - 1; \; -3\ln x = ln(z^3 - 1);$$

$$-\frac{3dx}{x}=\frac{3z^3dz}{z^3-1}\ \text{немесе}\ \frac{dx}{x}=-\frac{z^2dz}{z^3-1}.$$

Тиісті табылған өрнектерді (41) теңдіктің оң жағындағы интеграл таңбасы ішіндегі өрнектің орнына қоямыз. Сонда:

$$\int x^{-2}\left(1+x^3\right)\overline{3}\,dx=-\int\frac{z^3dz}{z^3-1}=-\int\frac{z^3-1+1}{z^3-1}dz=$$

$$=-\int dz-\int\frac{dz}{z^3-1}=-z-\int\frac{dz}{(z-1)(z^2+z+1)}. \qquad (42)$$

(42) теңдіктің оң жағында тұрған интегралды жеке алайық

$$\int\frac{dz}{(z-1)(z^2+z+1)}=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z-1}-\frac{1}{3}\int\frac{z+2}{z^2+z+1}dz=$$

$$=\frac{1}{3}ln(z-1)-\frac{1}{6}\int\frac{2z+1}{z^2+z+1}dz-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+z+1}=$$

$$=\frac{1}{3}ln(z-1)-\frac{1}{6}ln(z^2+z+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}arc\text{tg}\frac{2\text{z}+1}{\sqrt{3}}.$$

Осы кейінгі табылған нәтижені (42) теңдіктің оң жағындағы интегралдың орнына қойсақ, онда

$$\int x^{-2}\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{3}}dx=-z-\frac{1}{6}ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}arc\text{tg}\frac{2\text{z}+1}{\sqrt{3}}+\text{C},$$

мұнда $\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{x^3}}=z.$

*Ескертпе.* Егер айтылған үш шарттың (р – оң бүтін сан, $\frac{m+1}{n}$ – бүтін сан немесе ноль, $\frac{m+1}{n}+\text{р}$ – бүтін сан немесе ноль) бірде-біреуі орындалмаса, онда (37) интеграл элементар функциялар арқылы мүлде өрнектелмейді. Мұны дәлелдеген орыстың атақты математигі П. Л. Чебышев.

## § 9. Трансцендент функцияларды интегралдау

1. Трансцендент функцияның интегралын элементар функциялар арқылы өрнектеу өте сирек жағдайларда ғана іс жүзіне асады.

Егер интеграл таңбасы ішінде тұрған функция екі функцияның көбейтіндісі болса және оның біреуі рационал, екіншісі трансцендент функция болса, онда мұндай интегралды табу үшін бөлімшелеп интегралдау әдісін қолдануға тура келеді. Мәселен, мына интегралдарды қарайық.

$$\int R(x)\ln\ xdx, \int R(x)arc\,\mathrm{tg}\,xdx, \int R(x)arc\ ctg\ xdx,$$

$$\int R(x)arc\sin xdx, \int R(x)\ arc\cos xdx$$

мұнда $R(x)$ – бүтін рационал функция. Бұл интегралдар бөлімшелеп интегралданады және былай: $u$ үшін трансцендент функцияларды алу керек, ал $dv$ үшін $R(x)\ dx$-ті алу керек.

Енді мына интегралдарды қарайық:

$$\int F(x)e^{ax}dx,\ \int F(x)\sin a\ x\ d\ x,\ \int F(x)\cos a\ x\ d\ x,$$

мұнда $F(x)$ – бүтін рационал функция. Бұл интегралдар да жаңағы айтылған жолмен интегралданады.

Егер осы интегралдардағы көбейткіш $F(x)$ көпмүше болмай, бөлшек болса (рационал функция болса), онда бұл интегралдар элементар функциялар арқылы өрнектелмейді.

Келесі екі интегралды қарайық:

$$\int e^{ax}\cos b\ x\ d\ x,\ \int e^{ax}\sin b\ x\ d\ x,$$

бұларды да бөлімшелеп интегралдау керек және былай:

$u = e^{ax},\ dv = \cos b\ x\ d\ x,$ бұл арадан

$$du = ae^{ax}dx;\quad v = \frac{1}{b}\sin bx.$$

Енді

$$\int e^{ax}\cos b\ x\ d\ x = \frac{1}{b}e^{ax}\sin b\ x - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin b\ x\ d\ x.$$

Тағы да бөлімшелеп интегралдаймыз: $u = e^{ax},\ dv = \sin b\ x\ d\ x,$ бұл арадан $du = ae^{ax}dx,\ \ v = -\frac{1}{b}\cos bx$. Бұдан кейін

$$\int e^{ax}\cos a\ x\ d\ x = \frac{1}{b}e^{ax}\sin b\ x +$$

$$+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos b\ x\ d\ x.$$

Сөйтіп бұл арадан

$$\int e^{ax}\cos b\ x\ d\ x = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C. \qquad (43)$$

Дәл осы жолмен төмендегі интегралды табамыз:

$$\int e^{ax}\sin b\,x\,d\,x = \frac{e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)}{a^2+b^2} + C. \qquad (44)$$

Енді мына екі интегралды қарайық:

$$\int x^n\,e^{ax}\cos b\,x\,d\,x, \qquad \int x^n\,a^{ax}\sin b\,x\,d\,x.$$

(44) теңдіктің екі жағынан туынды алайық, сонда

$$e^{ax}\sin b\,x = \frac{d}{dx}\left[e^{ax}\cdot\frac{a\sin b\,x - b\cos b\,x}{a^2+b^2}\right].$$

Осы кейінгі теңдіктегі $a$-ны айнымалы параметр деп қарап, теңдіктің екі жағын $a$ бойынша дифференциалдайық, сонда

$$\frac{d}{d\,a}(e^{ax}\sin b\,x) = \frac{d}{d\,a}\left[\frac{d}{dx}\left(e^{ax}\cdot\frac{a\sin bx - b\cos b\,x}{a^2+b^2}\right)\right]$$

немесе сол жағынан а бойынша туындыны тауып және оң жағындағы дифференциалдау ретін өзгертіп, мына теңдікке келеміз:

$$xe^{ax}\sin bx = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{da}\left(e^{ax}\cdot\frac{a\sin bx - b\cos b\,x}{a^2+b^2}\right)\right] \qquad (45)$$

Бұл теңдіктің екі жағын интегралдап, мынаны табамыз:

$$\int xe^{ax}\sin b\,x\,d\,x = \frac{d}{da}\left(e^{ax}\cdot\frac{a\sin bx - b\cos b\,x}{a^2+b^2}\right).$$

(45) теңдіктің екі жағын тағы да $a$ бойынша дифференциалдап табамыз:

$$x^2e^{ax}\sin bx = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2}{d\,a^2}\left(e^{ax}\cdot\frac{a\sin b\,x - b\cos b\,x}{a^2+b^2}\right)\right].$$

Бұл теңбе-теңдіктің екі жағын индегралдасақ, онда

$$\int x^2e^{ax}\sin b\,x\,d\,x = \frac{d^2}{d\,a^2}\left(e^{ax}\cdot\frac{a\sin b\,x - b\cos b\,x}{a^2+b^2}\right).$$

Міне, осы амалды $n$ рет жүргізіп табамыз:

$$\int x^ne^{ax}\sin b\,x\,d\,x = \frac{d^n}{d\,a^n}\left(e^{ax}\cdot\frac{a\sin b\,x - b\cos b\,x}{a^2+b^2}\right) + C. \qquad (46)$$

Дәл осы сияқты

$$\int x^ne^{ax}\,cos\,b\,x\,d\,x = \frac{d^n}{d\,a^n}\left(e^{ax}\cdot\frac{b\sin b\,x - a\cos b\,x}{a^2+b^2}\right) + C. \qquad (47)$$

2. Интеграл таңбасы ішінде мына тригонометриялық функциялардың $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}x$, $\mathrm{ctg}x$, $secx$, $cscx$ рационал функциясы болсын.

Мәселен, төмендегі интегралды қарайық:

$$\int R\,(\sin x, \cos x)dx. \qquad (48)$$

Мұндай интегралды рационалдандыруға әбден болады. Ол үшін келесі ауыстыруды жүргіземіз:

$$u = tg\frac{x}{2}, \qquad (-\pi < x < \pi),$$

бұл арадан

$$\sin x = \frac{2\,\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$x = 2\,arc\,\text{tg}\,u, \qquad dx = \frac{2\,d\,u}{1+u^2}.$$

Осы өрнектерді (48) интеграл таңбасы ішіндегі функцияның орнына қойсақ, онда

$$\int R\,(\sin x, \cos x)dx = 2\int R\left(\frac{2\,u}{1+u^2}, \qquad \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2},$$

кейінгі теңдіктің оң жағындағы интеграл рационал функцияның интегралы.

(48) интегралды іздегенде жоғары алгебра пәнінен белгілі мына қағиданы пайдалануға тура келеді. Ол қағида мынау: егер бүтін немесе бөлшек рационал функция $R\,(u, v)$ аргументтердің біреуінің таңбасын өзгерткенде, (мәселен, $u$-дың таңбасын өзгерткенде) өзінің мәнін өзгертпесе, яғни

$$R\,(-u, v) = R\,(u, v),$$

онда мұндай рационал функцияны мына түрге $R\,(u, v) = R_1(u^2, v)$ келтіруге болады. Егер $u$-дың таңбасын өзгерткенде функция өзінің таңбасын өзгертетін болса, яғни

$$R\,(-u, v) = -R\,(u, v),$$

онда мұндай функцияны мына түрге $R\,(u, v) = R_2(u^2, v)\cdot u$ келтіруге болады.

Мысалы, (48) интеграл таңбасы ішіндегі өрнек $R\,(\sin x, \cos x)\,dx, \sin x$-тің таңбасын өзгерткенде өзінің таңбасын өзгертеді, сондықтан $R\,(\sin x, \cos x)\,dx = R_1 \quad (\sin^2 x, \cos x)$ $\sin x dx = -R_1\,\,(1-\cos^2 x,\ \cos x)\,d\cos x$.

Ендеше бұл функцияны рационалдыру үшін мына ауыстыру $t = \cos x$ жеткілікті.

Әйтпесе, тағы да былай

$$R\,(\sin x, \cos x)dx = R_0(\sin x, \cos^2 x)\cos x\,d\,x =$$
$$= R_0(\sin x, 1 - sin^2 x)\,d\sin x.$$

Бұл жерде мынадай ауыстыру t = sin $x$ қолайлы.

3. Енді мына типті интегралды қарайық:

$$\int \sin^p x \cos^q x dx, \text{ мнда } \rho, q \text{ рационал сандар, ал } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Келесі ауыстыруды жүргіземіз: $z = \sin^2 x$, бұл арадан

$$dz = 2\sin x \cos x \, d\, x,$$

$$sin^p x \, cos^q x \, d\, x = \frac{1}{2} sin^{p-1} x \, (1 - sin^2 x)^{\frac{q-1}{2}} 2 \sin x \cos x \, d\, x =$$

$$= \frac{1}{2} (1 - z)^{\frac{q-1}{2}} z^{\frac{q-1}{2}} dz.$$

Ендеше

$$\int \sin^p x \cos^q x dx = \frac{1}{2} \int (1 - z)^{\frac{q-1}{2}} z^{\frac{p-1}{2}} dz. \qquad (49)$$

(49) теңдіктің оң жағындағы интеграл биномдық дифференциалдан алынған интеграл.

Бір-екі мысал келтірейік:

$$a) \int \frac{sin^5 x}{cos^4 x} dx.$$

Бұл интегралдың таңбасы ішіндегі өрнек $\sin x$-ті $\sin x$-ке ауыстырғанда өзінің таңбасын ауыстырады. Сондықтан мынадай $t = \cos x$ ауыстыруды қолданамыз. Сонда

$$\int \frac{sin^5 x}{cos^4 x} dx = -\int \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t^4} dt = -t - \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\, cos^3 x} + C.$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 4},$$

бұл интегралды былай интегралдаған қолайлы:

$$\int \frac{dx}{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3cos^2\frac{x}{2} - 3sin^2\frac{x}{2} + 4\, sin^2\frac{x}{2} + 4\, cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$\int \frac{\frac{dx}{cos^2\frac{x}{2}}}{4\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 7} = 2\int \frac{d\, tg\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 4\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 7} = \frac{2}{3} arc\mathrm{tg} \frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 2}{\sqrt{3}} + C$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{\sin x},$$

бұл интегралды табу үшін мына $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = u$ ауыстыруды жүргіземіз. Сонда

$$\int \frac{dx}{\sin x} = ln\text{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Егер $x$-тің орнына $x + \frac{\pi}{2}$ - ді қойсақ, онда

$$\int \frac{dx}{cos\,x} = ln\text{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

### *Жаттығулар*

Келесі интегралдарды есептеп шығару керек:

1. $\int \frac{dx}{1 + cos^2 x}$.　　　Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{2}} arc\text{tg}\left(\frac{\text{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right) + C.$

2. $\int \frac{dx}{cos^3 x\, sin^3 x}$.　　　Жауабы: $\frac{1}{2\,cos^2 x} + \frac{1}{2\,sin^2 x} + 2ln\text{tg}x + C.$

3. $\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx$.　　　Жауабы: $\sqrt{a^2 - b^2} - a \times arc\,cos\frac{a}{x} + C.$

4. $\int \frac{x^2 dx}{(x\cos x - \sin x)^2}$　Жауабы: $\text{tg}\left(x + arc\text{tg}\frac{1}{x}\right) + C.$

5. $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^2\, d\, x$.　Жауабы: $e^x \text{tg}\frac{x}{2} + C.$

6. $\int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} dx$.　Жауабы: $\frac{1}{3} ln \frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2} + C.$

7. $\int \frac{dx}{1 - x^6}$. Жауабы: $\frac{1}{12} ln \frac{(1+x)^2(1+x+x^2)}{(1-x)^2(1-x+x^2)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} arc\text{tg}\frac{\mathrm{x}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{x}^3}$
$+ \mathrm{C}.$

8. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$. Жауабы: $-2arc\ \text{tg} \times \frac{\sqrt{1+x-x^2} - (1+x)}{x}$
$+ C.$

9. $\int \frac{x\, d\, x}{(x^2-1)\sqrt{x^2+2x+4}}$. Жауабы: $\frac{1}{2\sqrt{7}} ln \frac{x - 1 - \sqrt{7} + \sqrt{x^2+2x+4}}{x - 1 + \sqrt{7} + \sqrt{x^2+2x+4}}$
$+$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}} ln \frac{x + 1 - \sqrt{3} + \sqrt{x^2+2x+4}}{x + 1 + \sqrt{3} + \sqrt{x^2+2x+4}}$$

10. $\int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+-4}}$　Жауабы: $ln \frac{\sqrt{x^2+2x+4} - 1}{\sqrt{x^2+2x+4} + 1} -$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} arc\ \text{tg}\frac{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}{x+1} + C.$$

11. $\int \frac{x^4 d\, x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.　　　Жауабы: $\frac{x(x^2-3)}{2\sqrt{1-x}} - \frac{3}{2} arc\sin x + C.$

12. $\int x^3(a+x^2)^{\frac{1}{3}}dx.$ Жауабы: $\frac{3}{14}(a+x^2)^{\frac{4}{3}}\left(x^2-\frac{3a}{4}\right)+C.$

13. $\int \frac{dx}{a+b\cos x}.$ Жауабы: $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}ln\times$

$$\times\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}+C.$$

14. $\int \sin^4 x\cos^2 x\,d\,x$ Жауабы: $\frac{1}{16}\left(x-\frac{\sin 4\,x}{4}-\frac{sin^3 2x}{3}\right)+C.$

15. $\int \frac{1-r\cos x}{1-2\,r\cos x+r^2}dx.$ Жауабы: $\frac{x}{2}+arc\,\mathrm{tg}\left(\frac{1+\mathrm{r}}{1-\mathrm{r}}\mathrm{tg}\frac{\mathrm{x}}{2}\right)+\mathrm{C}.$

16. $\int \frac{dx}{a^2cos^2x+b^2sin^2x}$ Жауабы: $\frac{1}{ab}arc\mathrm{tg}\frac{b}{a}\mathrm{tg}\,x+C.$

17. $\int e^{ax}cos^2x\,d\,x.$ Жауабы: $\frac{e^{ax}}{a(a^2+4)}+(a^2cos^2x+$

$$+2a\sin x\cos x\;+2)+C.$$

18. $\int \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{(4+\mathrm{tg}^2 x)\mathrm{tg}^3 x}dx.$ Жауабы: $-\frac{1}{8\mathrm{tg}^2 x}-\frac{ln\,\mathrm{tg}\,x}{16}+\frac{ln(4+tg^2x)}{32}+\mathrm{C}.$

19. $\int \frac{\sin x}{1+\mathrm{tg}\,x}dx.$ Жауабы: $\frac{1}{2\sqrt{2}}ln\frac{\cos x+\sin x+\sqrt{2}}{\sin x+\cos x}-$

$$-\frac{\cos 2x}{2(\sin x+\cos x)}+C.$$

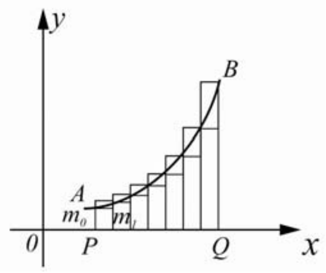
20. $\int \frac{1+tg\,x}{\sin 2\,x}dx.$ Жауабы: $\frac{1}{2}tg\,x+\frac{1}{2}\ln tg\,x+C.$

# VIII ТАРАУ
# АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ АНЫҚТАМАСЫ ЖӘНЕ БОЛУ ШАРТТАРЫ

## § 1. Анықталған интеграл ұғымына келтіретін есептер

Интегралдық есептеу, дифференциалдық есептеуден тәуелсіз, одан бұрын дамыған ілім. Осы екі ілімнің арасындағы терең байланыс тек XVII ғасырдың аяғында ғана тағайындалды. Бұл екі ілімнің шешетін негізгі проблемалары шексіз аздар немесе математикалық анализдің өзара кері проблемалары болды; қосу және азайту амалдары бір-бірімен қандай қатынаста болса, функцияларды интегралдау және дифференциалдау амалдары да бір-бірімен сондай қатынаста болады. Осы тарихи кез қазіргі уақыттағы «Математикалық анализ» деп аталатын ілімнің туу кезі. Сол кезден бастап математика ғылымының осы екі тарауы тез дами бастады; әсіресе интегралдық есептеу жеке бытыраңқы есептерді шешуден, өте әлді жалпы методтар жасауға көшті.

Шынында, анықталған интеграл ұғымы геометрия, механика және физика проблемаларын шешудің нәтижесінде туған.



70-чертеж

Анықталған интегралдың математикалық анықтамасын берместен бұрын осы ұғымға келтіретін есептерді қарайық. 1. Мынадай геометриялық есепті қарайық: $y = f(x)$, $[a, b]$ аралығында берілген үздіксіз және осы аралықта үдеме функция болсын. *OX* осінен жоғары жатқан *AMB* доғасы осы функциямен кескінделетін болсын, былайша айтқанда, $y = f(x)$ *AMB* қисығының теңдеуі.

Жоғарғы жағынан *AMB* доғасымен, бүйір жағынан *AP* және *BQ* ординаталарымен, төменгі жағынан *PQ* кесіндісімен қоршалған жазық фигураның (70-чертеж) ауданын табу керек.

Бұл есепті шешу үшін, $[a, b]$ аралығын *PQ* кесіндісін абсциссалары мына сандарға тең $a = x_0, x_1, x_2, . \ . \ . , x_{n-1}, x_n = b$ аралық нүктелермен *n* бөлшек кесінділерге бөлеміз, сонан соң осы бөлу нүктелері арқылы *OY* осіне доғамен қиылысқанша параллельдер жүргіземіз. Сонда есептеп табайық деп отырған ауданымыз *n* қисық сызықты трапецияларға жіктелінеді.

Енді ұсақ трапециялардың ішінен $i$-ші трапецияны сайлап алайық, бұл трапецияның бір бүйір қабырғасы $[x_i, x_{i+1}]$ бөлшек аралықтың ұзындығына, яғни мына санға тең: $x_{i+1} - x_i$ екінші бүйір қабырғасы қисық доға.

Табаны $[x_i, x_{i+1}]$ бөлшек аралықта жататын, биіктіктері $f(x_i)$ $f(x_{i+1})$ сандарына тең тік төртбұрышты құрайық. Сонда жаңағы сайлап алған трапецияның ауданы мына екі санның: $f(x_i)\ (x_{i+1} - x_i)$ және $f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$ арасында жатады. Егер көрсетілген осы тік төртбұрыштарды барлық бөлшек сегменттерде құрсақ және ол тік төртбұрыштардың аудандарын s және S арқылы белгілесек, сонда

$$s = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i),$$

$$S = f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \ ... + f(x_n)(x_n - x_{n-1}) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i).$$

Егер іздеп отырған ауданның шамасын $u$ деп белгілесек, онда бұл аудан төмендегі теңсіздікті

$$s < u < S$$

қанағаттандырады.

Енді S пен s-тің айырмасын құрайық:

$$S - s = (x_1 - a)[f(x_1) - f(a)] + (x_2 - x_1)[f(x_2) - f(x_1)] +$$
$$+ . . . +(b - x_{n-1})[f(b) - f(x_{n-1})]. \qquad (1)$$

$x_1 - a,\ x_2 - x_1, . . . \ , b - x_{n-1}$ айырмалардың ішіндегі ең үлкені $\eta$ болсын; егер барлық осы айырмалардың орнына $\eta$ санын қойсақ, онда (1) теңдіктің оң жағы өскен болар еді, яғни

$$S - s < \eta[f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + . . . + f(b) - f(x_{n-1})]$$

немесе

$$S - s < \eta[f(b) - f(a)].$$

Кейінгі теңсіздіктен біз мынадай қорытындыға келеміз: барлық $x_{i+1} - x_i$ айырмалардың ең үлкені нольге ұмтылғанда, айырма $S - s$ та нольге ұмтылады және мұнымен бірге мына айырмалар да $S - u, u - s$ нольге ұмтылады, олай болса, $u$ осы екі $S$ және $s$ қосындылардың ортақ шегі. Сонымен,

$$u = \lim_{\eta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = \lim_{\eta \to 0} \sum_{t=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i).$$

Сөйтіп, іздеп отырған ауданның шамасы барлық бөлшек сегменттердің ұзындықтары нольге ұмтылғандағы $S$ пен $s$-тің шегіне тең болатын болды.

Айтылып отырған қорытынды кеміме функция үшін де дұрыс. Егер $f(x)$ функцияның $[a, b]$ аралығында бірнеше максимумы және минимумы болса, онда $[a, b]$ аралығын функцияның не максимумы, не минимумы болғандай етіп бірнеше бөлшек аралықтарға (сегменттерге) бөлеміз.

**1.** Мысал үшін, XVII ғасырда өмір сүрген француз ғалымы Ферманың қарастырған есебін алайық.

$y = A\,x^{\mu}$ қисық сызықпен, *ОХ* осімен және *ОУ* осіне параллель $x = a,\ x = b$ түзулермен қоршалған фигураның ауданын табу керек. Қарастырып отырған функциядағы дәреже көрсеткіш $\mu$ – кез келген тұрақты нақты сан.

Бұл есепті шығару үшін $[a,b]$ сегментін (аралығын) абсциссалары мына сандарға тең $a, a(1+\alpha),\ a(1+\alpha)^2, \ldots,\ a(1+\alpha)^{n-1},\ b$ нүктелермен *n* бөлшек сегменттерге бөлеміз, мұнда $\alpha$ санын мына шартты

$$a\,(1+\alpha)^n = b$$

қанағаттандырады. Осы бөлу нүктелеріне сәйкес ординаталардың мәндері төмендегі сандарға тең болады:

$$Aa^{\mu},\ Aa^{\mu}(1+\alpha)^{\mu},\ Aa^{\mu}(1+\alpha)^{2\mu}, \ .\ .\ .\ \ , Aa^{\mu}(1+\alpha)^{\mu(n-1)}.$$

Барлық бөлшек сегменттерді табандары есебіне алып жоғарыда айтылғандай тік төртбұрыштарды құрамыз. Мұндай тік төртбұрыштардың саны *n*. Осы тік төртбұрыштардың ішінен біреуін, мәселен, *к*-інші тік төртбұрышты сайлап алайық. Бұл сайлап алған тік төртбұрыштың ауданы мынаған тең:

$$[a(1+\alpha)^k - a(1+\alpha)^{k-1}]A\,a^{\mu}(1+\alpha)^{(k-1)\mu} =$$
$$= A\,a^{\mu+1}\alpha(1+\alpha)^{(k-1)(\mu+1)}.$$

Олай болса, құрылған барлық тік төртбұрыштардың аудандарының қосындысы болады:

$$S = A\,a^{\mu+1}\alpha\big[1 + (1+\alpha)^{\mu+1} + (1+\alpha)^{2(\mu+1)} + \ .\ .\ .\ + \\ +(1+\alpha)^{(n-1)(\mu+1)}\big] \qquad (2)$$

Егер $\mu+1$ саны нольге тең болмаса, онда (2) теңдіктің оң жағындағы квадрат жақшалардың ішіндегі өрнек еселігі мына санға $(1+\alpha)^{\mu+1}$ тең, геометриялық прогрессияның қосындысы, сондықтан

$$S = A\,a^{\mu+1}\alpha \cdot \frac{(1+\alpha)^{n(\mu+1)}-1}{(1+\alpha)^{\mu+1}-1} = \frac{A\,\alpha[a(1+\alpha)^n]^{\mu+1} - A\,a^{\mu+1}\alpha}{(1+\alpha)^{\mu+1}-1}.$$

Егер кейінгі формуладағы $a(1+\alpha)^n$ орнына *b* санын қойсақ, онда

$$S = \frac{A\,\alpha(b^{\mu+1} - \alpha^{\mu+1})}{(1+\alpha)^{\mu+1} - 1}. \qquad (3)$$

Енді іздеп отырған ауданның шамасын табу үшін, $\alpha$-ны нольге ұмтылтып (3) теңдіктің шегін табамыз. Сонымен, ізделініп отырған ауданың шамасын *u* деп белгілесек, онда[1]

$$u = \lim_{\alpha\to 0} S = A\,(b^{\mu+1} - a^{\mu+1}) \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{(1+\alpha)^{\mu+1} - 1} =$$

---

[1] Мына қатынастың $\frac{(1+\alpha)\mu^{\pm1}-1}{\alpha}$, $\alpha$ нольге ұмтылғандағы шегі мына $(1+\alpha)^{\mu+1}$ өрнектің $\alpha$ бойынша алынған туындысының $\alpha = 0$ болғандығы мәніне, яғни $(\mu+1)$-ге тең.

$$= \frac{A\,(b^{\mu+1} - \alpha^{\mu+1})}{\mu + 1}.$$

Егер $\mu = -1$ болса, онда бағанағы іштей қоршалған тік төртұрыштардың аудандарының қосындысы (2) теңдік бойынша тең болады: $S = n\,A\,\alpha,$ міне, осы өрнектің шегін табу керек; мұнда $n$ мен $a$ төмендегі қатыс

$$a(1 + \alpha)^n = b \tag{4}$$

арқылы бір-бірімен байланысты.

(4) теңдіктің екі жағын $a$ санына бөліп жіберіп, сонан кейін логарифмдейміз. Сонда

$$nln(1 + \alpha) = ln\frac{b}{a}$$

немесе бұл арадан

$$n = \frac{ln\frac{b}{a}}{ln(1 + \alpha)}.$$

Кейінгі теңдіктің екі жағын $A\alpha$-ға көбейтеміз де, $\alpha$-ны нольге ұмтылтып шек аламыз, сонда

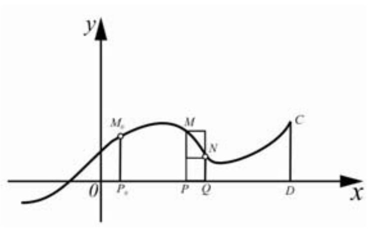
$$\lim_{\alpha\to 0} S = \lim_{\alpha\to 0} nA\alpha = A\,ln\frac{b}{a}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{ln(1 + \alpha)} =$$

$$= A\,ln\frac{b}{a}\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{ln(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} = A\,ln\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\ln e}.$$

Сонымен, бұл жағдайда ізделініп отырған аудан

$$u = A\,ln\frac{b}{a}.$$

**2.** Интегралдық есептеудің туының өзі фигуралардың аудандарын есептеп табудың нәтижесінде пайда болғаны мәлім.



71-чертеж

Айталық функция $y = f(x)$, *XOY* жазықтығында үздіксіз бір қисық сызықты кескіндесін. Онда біз мына теңдеуді $y = f(x)$ осы қисықтың теңдеуі деп атаймыз. Енді біз осы қисықпен, *OX* осімен, қозғалмайтын $M_0P_0$ ординатамен және айнымалы MP ординатамен қоршалған ауданды қарастырайық, бұл ауданның шамасын $u$ деп белгілейік (71-чертеж). Осы айтылып отырған ауданның шамасы сөзсіз *MP*-нің абсциссасына тәуелді болады. Функция $f(x)$ үздіксіз болғандықтан, аудан $u(x)$ те үздіксіз болады.

Бір-біріне өте жақын жатқан екі *MP* және *NQ* ординаталарды қарастырайық. Бұл ординаталардың абсциссалары болады $x$ және $x+\Delta x$. $PQ=\Delta x$ кесіндісін табаны үшін алып, тік төртбұрыштарды құрайық. Бұл тіктөртбұрыштардың біреуінің биіктігі *MN* доғаның ең үлкен ординатасына, екіншісінің биіктігі жаңағы доғаның ең кіші ординатасына тең болсын. Ең үлкен ординатаны $H$ арқылы, ең кіші ординатаны $h$ арқылы белгілейік.

Аудан $u(x)$-тің есімшесі $\Delta u$ жоғарыда айтылған тік төртбұрыштардың аудандарының арасында жатады, яғни

$$h\Delta x < \Delta u < H\Delta x$$

немесе $\Delta x$-ке бөліп мынаны табамыз:

$$h < \frac{\Delta u}{\Delta x} < H.$$

Енді $\Delta x$-ті нольге ұмтылтып, кейінгі теңсіздіктің барлық жағынан шек алатын болсақ, онда

$$f(x) < \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} < f(x) \tag{5}$$

өйткені $f(x)$ үздіксіз болғандықтан, $\Delta x$ нольге ұмтылғанда $H$-нен $h$ бір шекке, мәселен MP-ге немесе бәрібір $f(x)$-ке ұмтылады.

(5) теңсіздіктен біз мынадай қорытындыға келеміз:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'\ (x) = f(x).$$

Сөйтіп, біз мынадай теореманы дәлелдедік: *берілген* $y=f(x)$ *қисық сызықпен, OX осімен, қозғалмайтын* $M_0P_0$ *ординатамен және қозғалмалы MP ординатамен қоршалған айнымалы фигура ауданының x бойынша алынған туындысы* $[a,b]$ *аралығының барлық нүктелерінде* $f(x)$ *функцияға тең. Былайша айтқанда, аудан* $u(x), f(x)$ *функцияның алғашқы немесе бастапқы функциясы болып табылады.*

Сонымен, бұл теорема бойынша әрбір үздіксіз функция $f(x)$ екінші бір функцияның туындысы болып табылатын болды.

Бұл теорема – интегралдық есептеудің негізгі теоремасы. Негізгі теореманы геометриялық интуицияға (сезімге) сүйеніп отырып дәлелдедік. Бұлай дәлелдеу дұрыс болғанымен, логикалық жағынан жеткілікті дәлелдеу болып табылмайды. Көп уақыт бойы ғылыми жұртшылық осылай дәлелдеуге риза болып келді.

Интегралдық есептеуді мызғымас негізге келтіру үшін бұл теореманы, геометриялық елеске көшпей, аналитикалық жолмен дәлелдеу қажет.

**3.** Анықталған интеграл ұғымына тек геометриялық есептер ғана келтіріп қоймайды, физикалық есептер де келтіреді. Мысал, үшін, төмендегі физикалық есепті қарайық. Материалды нүкте $p$ күшінің әрекетімен түзу сызықтың бойымен қозғалады деп ұйғарайық. Күштің бағыты қозғалыс бағытымен дәл келсін де, жүрілген жолдың ұзындығы $l$ болсын.

Егер күш $p$ тұрақты болса, онда бұл күштің өндірген жұмысының шамасы $pl$ болады. Ал егер күш $p$ айнымалы болса, онда жаңағы жазылған көбейтіндіні қолданып, күштің өндірген жұмысын табуға болмайды, басқа жолды қолдануға тура келеді. Міне, енді біз осыған келейік.

Материалды нүкте $M$ айнымалы $p$ күшінің әсерімен түзудің бойымен қозғалсын. Осы түзуді абсцисса осі үшін алайық. Нүктеге әсер етуші күштің шамасы оның жағдайына тәуелді болсын, былайша айтқанда, $M$ нүктесінің абсциссасы $x$-тің функциясы болсын:

$$p = f(x)$$

$p$ күшінің әсерімен $M$ нүктесі $x_0 = a$ жағдайдан $x_n = b$ жағдайға келетін болсын. Енді осы күштің $[a, b]$ аралығында өндіретін жұмысын есептеп табайық. Ол үшін $[a, b]$ аралығын бірдей етіп $n$ бөлшек сегменттерге бөлеміз. Бөлуші нүктелер мына тәртіппен орналассын:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < . . . < x_{n-1} < x_n = b.$$

Әрбір бөлшек сегменттің ұзындығы болады:

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}.$$

Осы әрбір бөлшектің шегінде р күшін тұрақты деп есептейміз. Бірінші бөлшек сегментте күштің шамасы $f(x_0)$ болады да, екінші бөлшек сегментте: $f(x_0 + \Delta x_i)$, үшіншіде: $f(x_0 + 2\Delta x_i)$, сонан әрі қарай $n$-ші бөлшек сегментте күштің шамасы $f[x_0 + (n-1)\Delta x_i]$ болады. Әсер етуші күш пен қозғалыстың бағыты бір-бірімен дәл келгендіктен, жаңағы айтылған бөлшек сегменттердегі күштің өндіретін элементар жұмыстарының шамалары:

$$f(x_0)\Delta x_i, f(x_0 + \Delta x_i)\Delta x_i, . . . , f[x_0 + (n-1)\Delta x_i]\Delta x_i$$

Ал $p = f(x)$ күштің $[a,b]$ аралығында өндіретін жұмысының жуық мәні жоғарыда жазылған элементар жұмыстардың қосындысына тең болады, яғни

$$f(x_0)\Delta x_i, f(x_0 + x_i)\Delta x_i + \ldots + f[x_0 + (n-1)\Delta x_i]\Delta x_i.$$

Бұл қосынды – интегралдық қосынды. $p = f(x)$ күштің $[a,b]$ аралығында өндірген жұмысының дәл мәнін табу үшін барлық $\Delta x_i$-лерді нольге ұмтылтып, жоғарыда жазылған қосындыдан шек алу керек. Сонымен, іздеп отырған жұмыстың шамасын Т деп белгілеп табамыз:

$$T = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i\to 0}^{n-1} f(x_0 + i\Delta x_i)\Delta x_i.$$

## § 2. Анықталған интегралдың аналитикалық анықтамасы

**1.** Геометриялық интуицияға сүйенбей, шама және сан ұғымы арқылы анықталған интегралды анықтау тек өткен ғасырда ғана шешілді. Мұндай анықтаманы ресми немесе аналитикалық анықтама дейді, міне, осы анықтамаға келейік.

$y = f(x), [a,b]$ аралығында анықталған, бұл аралықтың ешбір нүктесінде шексіздікке айналып кетпейтін, басқаша айтқанда, шектелген функция болсын. Бұл функция үздіксіз және үзілісті болуы да мүмкін.

$[a,b]$ аралығын абсциссалары мына сандарға тең: $a = x_0, x_1\, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ нүктелермен еркімізше $n$ бөлшек сегменттерге бөлейік. Сонда бөлу нүктелері былай орналасуы керек:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

ал бөлшек сегменттер

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1,} x_n] \text{ болады.}$$

Әрбір $[x_i, x_{i+1}]$ бөлшек сегменттің бойында жатқан $\xi_i$ нүктесін сайлап алайық та, осы нүктелердегі $f(x)$ функцияның мәндерін тауып, төмендегі қосындыны құрайық:

$$\sigma = f(\xi_0)(x_1 - x_0) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i). \qquad (6)$$

Осы құрылған (6) қосындыны интегралдық қосынды немесе Риман қосындысы деп атайды.

Интегралдық қосындының шамасы $[a, b]$ кесіндісін қалай етіп бөлу тәсіліне және сайлап алынған $\xi_i$ нүктелеріне тәуелді.

Айырмалар $x_{i+1} - x_i$=$\Delta x_i$ $(1 = 0, 1,\ 2, \dots, n + 1)$ бөлшек сегменттердің ұзындықтарын береді. Осы айрмалардың ең үлкенін $max(\ x_{i+1} - x_i) = max\ \ \Delta x_i$ деп белгілейік.

*Егер* $max\Delta x$ *нольге ұмтылғанда, (6) қосынды* $\sigma, (a, b)$ *аралығын бөлу тәсіліне және* $\xi^i$ *нүктелерін қалай сайлап алуға тәуелді емес бір тиянақты J шегіне ұмтылса, онда осы J шегін* $f(x)$ *функциясының* $[a, b]$ *аралығында алынған анықталған интегралы деп атайды және оны былай белгілейді:*

$$J = \int_a^b f(x)dx \tag{7}$$

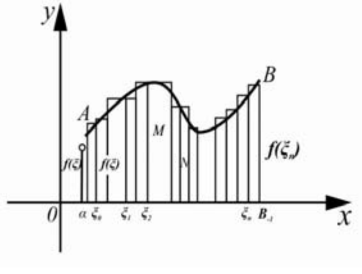
$b$ санын анықталған интегралдың жоғарғы шегі деп атайды да, ал $a$ санын оның төменгі шегі дейді.

Егер I саны бар болатын болса, онда $f(x)$ функцияны $[a, b]$ аралығында интегралданатын функция деп атайды. Осы кейінгі пікірді дәл былай тұжырымдауға болады: егер алдын ала берілген оң, мейлінше аз $\varepsilon$ санына сәйкес басқа бір оң $\delta$ саны табылып, бөлшек сегменттердің ең үлкенінің ұзындығы $\delta$-дан кіші $[max\Delta\, x_i < \delta]$ болатындай етіп $[a, b]$ аралығын бөлшектегенде, мына теңсіздік.

$$|\sigma - J| < \varepsilon$$

орындалса, онда $f(x)$ функциясын $[a, b]$ аралығында интегралданатын функция деп атайды.

**2.** Енді анықталған интегралдың геометриялық мағынасына тоқтап кетейік. Ең әуелі $(a, b)$ аралығында функция $f(x)$ оң деп ұйғарайық. $y = f(x)$ теңдеумен берілген қисықпен, абсцисса осімен және ордината осіне параллель $x = a,\ x = b$ түзулермен қоршалған фигураның ауданын қарайық (72-чертеж).



72-чертеж

(6) интегралдық қосындының әрбір қосылғышы $f(\xi_i)\,\Delta x_i$ табаны $\Delta x_i$-ге, биіктігі $f(\xi_i)$ -ге тік төртбұрыштың ауданын

береді; олай болса, интегралдық қосындының өзі, барлық бөлшек сегменттер $[x_i,\ x_{i+1}]\ (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ табаны есебінде алынып құрылған, биіктіктері $f(\xi_i)$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ сандарына тең тік төртбұрыштардың (тікшелердің) аудандарының қосындысын береді.

Сондықтан барлық бөлшек сегменттердің ұзындықтарының ең үлкені нольге ұмтылғандағы *интегралдық қосындының шегі* жоғарыдағы айтылған *жазық фигураның ауданын өрнектейді.*

Сөйтіп (7) формуладағы, анықталған интегралдың геометриялық мағынасы: $y = f(x)$ теңдеумен берілген қисықпен, *OX* осімен және *OУ* осіне параллель $x = a,\ x = b$ түзулермен қоршалған облыстың ауданы болатын болды.

Егер функция $f(x), [a, b]$ аралығында нольден кем, яғни теріс таңбалы болса немесе бұл аралықта оның таңбасы өзгеріп тұратын болса да, бәрібір кейінгі тұжырымдалған қорытынды дұрыс болады. Бірақ мұнда бір айтып кететін мәселе мынау: егер функция $f(x)$-тің таңбасы $[a, b]$ кесіндінің барлық нүктелерінде теріс болса, онда функцияны кескіндейтін қисықтың *AB* доғасы *OУ* осінің теріс жағында жатқан болар еді және $f(\xi_i)\,\Delta x_i < 0$, өйткені $f(\xi_i) < 0,\ \Delta x_i = \ x_{i+1} - x_i > 0$. Олай болса, интегралдық қосындының таңбасы теріс болады, демек, мына өрнек:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

*aABb* фигураның теріс таңбамен алынған ауданын береді.

Егер $[a, b]$ кесіндісінде $f(x)$ функцияның таңбасы бірнеше рет өзгерсе, былайша айтқанда, бұл функцияның графигі X-тер осін бірнеше рет қиса, онда анықталған интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

абсцисса осі мен қисықтың және $x = a,\ x = b$ ординаталардың арасында жатқан облыстардың аудандарының алгебралық қосындысына тең болады.

## § 3. Анықталған интегралдың болу теоремасы интегралданатын функциялар

**1.** $y = f(x)[a, b]$ аралығында анықталған шектелген функция болсын. Осы функцияның $[a, b]$ аралығындағы ең дәл жоғарғы шекаралығын $M$ арқылы, ал ең дәл төменгі шекаралығын $m$ арқылы белгілейік. Сонда $[a, b]$ аралығының барлық нүктелері үшін бұл функция мына қос теңсіздікті қанағаттандырады:

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Енді $[a, b]$ аралығын қалағанымызша $n$ бөлшек сегменттерге бөлейік. Бөлу нүктелерінің абсциссалары мына сандар болсын: $a = x_0. x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ және бұл сандардың орналасу тәртібі былай:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \; . \; . \; . < x_{n-1} < x_n = b.$$

Барлық бөлшек сегменттерді былай етіп белгілейміз: $[x_i \; x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$, олардың ұзындықтары $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$. Осы бөлшек сегменттер ұзындықтарының ең үлкенін $max\ (x_{i+1} - x_i) = max \Delta x_i$ деп белгілейік. $[x_i, x_{i+1}]$ бөлшек сегменттегі $f(x)$ функцияның ең дәл жоғарғы шекаралығын $M_i$ арқылы, ал ең дәл төменгі шекаралығын $m^i$ арқылы белгілейік. Бұларды былай жазамыз:

$$M_i = \underset{[x_i, x_{i+1}]}{sup} f(x), \quad m_i = \underset{[x_i, x_{i+1}]}{inf} f(x) \quad (i = 0,1,2 \dots, n-1)$$

Бұдан кейін төмендегі екі қосындыны құрайық:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x; \quad s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i,$$

Бірінші қосындыны *Дарбудың жоғарғы қосындысы деп, ал* екінші қосындыны *Дарбудың төменгі қосындысы* деп атайды.

Геометриялық көзқараспен қарағанда Дарбудың жоғарғы қосындысы $y = f(x)$ қисықтың сыртына шығып тұрған тік төртбұрыштардың аудандарының қосындысын, ал төменгі қосынды қисықтың ішкі жағында жатқан тік төртбұрыштардың аудандарының қосындысын береді.

Интегралдық қосындымен Дарбу қосындыларының арасында мынадай қатыс бар: $s \leq \sigma \leq S$.

Мұны мынадан байқауға болады: $[x_i, \; x_{i+1}]$ бөлшек сегменттің ішінде жатқан кез келген $\xi_i$ нүктесін алып, осы нүктедегі функцияның мәнін табалық, ол $f(\xi)$ болады. Бұл мән мына қос теңсіздікті қанағаттандырады:

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i.$$

Кейінгі теңсіздіктің екі жағын $\Delta x$-ге көбейтіп және таңбаша $i$-ге 0-ден бастап *n–1*-ге дейін мәндер беріп қосындыласақ,

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

немесе

$$s \leq \sigma \leq S. \tag{8}$$

Анықталған интегралдар теориясындағы негізгі теорема мынау:

**Теорема.** *Берілген функция* $f(x)$, $[a,b]$ *аралығында интегралдану үшін барлық бөлшек сегменттердің ұзындықтарының ең үлкені нольге ұмтылғанда, Дарбудың жоғарғы қосындысы мен төменгі қосындысының айырмасы нольге ұмтылуы қажетті және жеткілікті.*

Әуелі жеткіліктігін дәлелдейік. Айталық, $\lim\,(S - s) = 0$, олай болса, $\lim s = \lim S = J$. Бұл арадан:

$$s \leq J \leq S,$$

екінші жағынан

$$s \leq \sigma \leq S.$$

Қойылған шарт бойынша, егер барлық $\Delta x_i$-тер тым аз болса, онда

$$S - s < \varepsilon$$

мұнда $\varepsilon$ – алдын ала берілген оң құнарсыз аз сан. Олай болса, жаңағы жазылған теңсіздік S пен s-тің арасында жатқан ς және *J* сандары үшін де дұрыс болады:

Бұл теңсіздіктің орындалуы $f(x)$ функцияның $[a,b]$ аралығында анықталған интегралының болуын дәлелдейді.

Енді қажеттілігін былай дәлелдейміз: функция $f(x)$, $[a,b]$ аралығында интегралданатын болсын, олай болса мына теңсіздік

$$|\sigma - J| < \frac{\varepsilon}{2}$$

орындалады, егер $\max \Delta x < \delta$.

Жоғарыда жазылған теңсіздікті мына түрде де жазуға болады:

$$J = \frac{\varepsilon}{2} < \sigma < J + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Төменгі және жоғарғы қосындылар s және S интегралдық қосындылар үшін дәл төменгі және дәл жоғарғы шекаралық болып табылатыны (8) теңсіздіктен көрініп тұр. Сондықтан

$$J = \frac{\varepsilon}{2} \leq s \leq S \leq J + \frac{\varepsilon}{2},$$

бұл арадан

$$S - s < \varepsilon.$$

Осы теңсіздіктің орындалуы теореманың қажеттілік шартының орындалуын дәлелдейді.

**2.** Енді қандай функциялар интегралданатын функциялар табын құрады, міне, соған келейік.

Егер $M_i - m_i$ айырманы $\omega_i$ арқылы белгілейтін болсақ, яғни $M_i - m_i{=}\omega_i$, онда

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \cdot \Delta x_i$$

және анықталған интегралдың болу шарты былай жазылған болар еді:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \cdot \Delta x_i = 0 \tag{9}$$

**I.** *Егер функция* $f(x)$, $[a, b]$ *аралығында үздіксіз болса, онда ол бұл аралықта интегралданатын болады.*

*Дәлелдеу.* Функция $f(x)$, $[a, b]$ аралығында үздіксіз болғандықтан, Кантор теоремасы бойынша алдын ала берілген оң, құнарсыз аз $\varepsilon$ саны бойынша $\delta$ санын тауып, $[a, b]$ аралығын саны шекті, әрқайсысының ұзындығы $\delta$ санынан кем, бөлшек сегменттерге бөлуге болады да, осы бөлшек сегменттің әрқайсысында функцияның тербелісі $\omega_i < \varepsilon$ болады.

Сондықтан

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon(b - a).$$

$b$ – $a$ тұрақты сан, ал $\varepsilon$ – кез келген оң құнарсыз аз сан. Олай болса, функцияның интегралдану шарты – (9) шарт орындалады.

**II.** *Егер* $[a, b]$ *аралығында шектелген* $f(x)$ *функцияның үзіліс нүктелерінің саны шекті болса, онда бұл функция осы аралықта интегралданатын болады.*

*Дәлелдеу.* Айталық, $[a, b]$ аралығының бойында жатқан мына нүктелер $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ функцияның үзіліс нүктелері болсын. Осы нүктелерді, ұзындығы алдын ала берілген оң құнарсыз аз $\varepsilon$ санынан асып кетпейтін мынадай

$$\left(x^{(1)} - \varepsilon^{(1)}, \quad x^{(1)} + \varepsilon^{(1)}\right),$$
$$\left(x^{(2)} - \varepsilon^{(2)}, \quad x^{(2)} + x^{(2)}\right), \ldots, \left(x^{(k)} - \varepsilon^{(k)},\right.$$
$$\left. x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}\right.$$

интервалдармен (аймақтармен) қоршаймыз. Бұл интервалдардың сыртында жатқан аралықтарда функция $f(x)$ үздіксіз. Олардың әрқайсысы үшін Кантор теоремасын қолданамыз. $\varepsilon$ бойынша табылған сандардың ең кішісін $\delta$ деп белгілейік және бұл сан $\varepsilon$ санынан кіші болатын болсын: $\delta < \varepsilon$. Енді $[a, b]$ аралығын, ұзындықтары $\Delta x_i, \delta$ санынан аспайтындай етіп саны шекті бөлшек сегменттерге бөлеміз. Сонда осы бөлшек сегменттердің ішінде, бағанағы айтылған интервалдардың сыртында жататындары бар, бұлардың бойында жатқан нүктелер үшін $\omega_i < \varepsilon$. Ал екінші жағынан осы сегменттердің біразы айтылған интервалдардың ішінде не толығымен немесе жартылай орналасуы мүмкін.

Функция $f(x)[a, b]$ аралығында шектелген болғандықтан, кейінгі сегменттердің әрқайсысындағы функцияның тербелісі, бүкіл $[a, b]$ аралығындағы оның тербелісінен асып кетпейді. Мұндағы тербелісті $\omega^{(2)}$ деп белгілейтін болса, онда

$$\omega_i^{(2)} < M - m. \qquad (10)$$

Енді Дарбу қосындыларын құрайық:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=0}^{н-1} m_i \cdot \Delta x_{i.}$$

Бұл арадан

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i. \qquad (11)$$

(II) теңдіктің оң жағында тұрған қосындыны екі қосындыға ажыратып жазамыз:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \Sigma' {\omega_i}^{(1)} {\Delta x_i}^{(1)} + \Sigma'' {\omega_i}^{(2)} {\Delta x_i}^{(2)}. \qquad (12)$$

(12) теңдіктің оң жағында тұрған бірінші қосынды үзіліс нүктелерді қоршап тұрған интервалдардың сыртында жатқан

бөлшек сегменттер бойынша алынған, ал екінші қосынды сол интервалдардың ішінде толық немесе жартылай жатқан бөлшек сегменттер бойынша алынған. Сондықтан бірінші қосындыны былай бағалауға болады:

$$\left|\Sigma'\omega^{(1)}{}_i\Delta x_i{}^{(1)}\right| < \varepsilon\Sigma'\Delta x_i{}^{(1)} < \varepsilon(b-a). \qquad (13)$$

Екінші $\Sigma''\omega^{(2)}\Delta x_i{}^{(2)}$ қосындыны алып қарайтын болсақ ондағы бөлшек сегменттердің ұзындығын екі түрде бағалауға болады: осының алдында айтылған интервалдардың ішінде толығымен жатқан бөлшек сегменттердің ұзындықтарының қосындысы $k^{\varepsilon}$ санынан кіші ($< 2\,k^{\varepsilon}$), ал ол интервалдарға тие немесе жартылай жатқан бөлшек сегменттердің саны 2к-дан артық емес, олай болса, олардың ұзындықтарының қосындысы $2\,k^{\delta}$ санынан кіші, ал $2\,k^{\varepsilon}$ санынан тіпті кіші болады. Сөйтіп,

$$\left|\Sigma''\omega_i{}^{(2)}\Delta x_i{}^{(2)}\right| < (M-m)\Sigma''\Delta x_i{}^{(2)} < (M-m)3\,k\,\varepsilon.$$

Сонымен

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i| < \varepsilon[b-a+3k(M-m)|,$$

квадрат жақшалардың ішіндегі тұрақты сан, ал $\varepsilon$ – кез келген оң құнарсыз аз сан, сондықтан $\max\Delta x_i$ нольге ұмтылғанда, қосынды

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i$$

нольге ұмтылады.

**III.** *Шектелген бірkелкі функция* $f(x)$ *әрқашан интегралданатын функция болады.*

*Дәлелдеу.* Айталық, $f(x)[a,b]$ аралығында біркелкі үдеме функция болсын. $(a,b)$ аралығын абсциссалары мына сандарға тең $a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ нүктелермен $n$ бөлшек сегменттерге бөлеміз. Сонда қарастырып отырған функцияның $[x_i,\ x_{i+1}]$ бөлшек сегменттегі тербелісі.

$$\omega_i = f(x_{i+1}) - fx_i$$

болады.

Алдын ала еркінше берілген оң құнарсыз аз $\varepsilon$ саны бойынша $\delta$ санын былай етіп алайық:

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}.$$

Егер $max\,\Delta\,x_i < \delta$ болса, онда

$$\left|\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}-1} \omega_{\mathrm{i}} \Delta \mathrm{x}_{\mathrm{i}}\right| < \delta \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = \delta[f(b) - f(a)],$$

немесе

$$\left|\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}-1} \omega_{\mathrm{i}} \Delta \mathrm{x}_{\mathrm{i}}\right| < \varepsilon.$$

Бұл теңсіздіктің орындалуы функцияның интегралданатынын дәлелдейді.

**IV.** *Егер функция $f(x)[a,b]$ аралығында интегралданатын болса, онда оның абсолют шамасы $f(x)$-те бұл аралықта интегралданатын болады.*

*Дәлелдеу.* $x'$және $x''$ $[a,b]$ аралығының кез келген екі нүктесі болсын. Онда

$$|f(x'')| - |f(x')| \leq f(x'') - f(x'). \tag{14}$$

Енді $[a,b]$ аралығын, *n* бөлшек сегменттерге бөлейік, $[x_i, x_{i+1}]$ бөлшек сегментіндегі $f(x)$ функцияның тербелісін $\omega_i$ арқылы, ал оның абсолют шамасы $f(x)$-тің тербелісін $\omega_i$ арқылы белгілесек, онда (14) теңсіздіктің салдарынан мына теңсіздік орындалады:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i' \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i. \tag{15}$$

Теореманың шарты бойынша $f(x)\,[a,b]$ аралығында интегралданатын функция, сондықтан (15) теңсіздіктің оң жағында тұрған қосынды $max\Delta x_i$ нольге ұмтылғанда, нольге ұмтылады. Олай болса бұл жағдайда (15) теңсіздіктің сол жағында тұрған теңсіздік те нольге ұмтылады. Оның нольге ұмтылуы теореманың дұрыстығын дәлелдейді.

**V.** *Егер екі функция $f(x)$ және $g\,(x)$ $[a,b]$ аралығында интегралданатын болса, онда бұл функциялардың қосындысы, айырмасы және көбейтіндісі интегралданатын функция болады.*

Бұл теореманың дәлелдеуін келтірмесек те болады, оқушылар өздері дәлелдесін.

**VI.** *Егер функция $f(x)[a,b]$ аралығында интегралданатын болса, онда ол $[a,b]$ аралығының кез келген бөлігінде интегралданатын болады; мұнымен бірге, егер $[a,b]$ аралығы бірнеше бөліктерден құралатын болса және бұл бөліктердің әрқайсысында функция $f(x)$ интегралданатын болса, онда ол функция бүкіл $[a,b]$ аралығында интегралданады.*

*Дәлелдеу.* $[a, b]$ аралығын бөлшек сегменттерге бөліп, мына қосындыны

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \, \Delta x_i$$

қарастырайық.

Аралық $[\alpha, \beta)$, $[a, b]$ аралығының бір бөлігі болсын, сонда $\alpha$ мен $\beta$ бөлу нүктелерінің ішіне енеді. $[\alpha, \beta]$ аралығы үшін жаңағыдай қосынды, егер оның бірнеше оң таңбалы қосылғыштарын шығарып тастайтын болсақ, осы қосындының өзінен келіп шығады. Бұл кейінгі қосынды, егер бастапқы қосынды нольге ұмтылатын болса, сөзсіз нольге ұмтылады.

Енді $[a, b]$ аралығы екі $[a, \mathrm{c}]$ және $[\mathrm{c}, b]$ сегменттерден тұратын болсын, онымен бірге осы сегменттердің әрқайсысында $f(x)$ функциясы интегралданатын болсын. Ол уақытта $[a, b]$ аралығы үшін құрылған қосынды

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \, \Delta x_i$$

*c* саны бөлуші нүктелердің біреуінің абсциссасы болып табылса, $[a, \mathrm{c}]$ және $[\mathrm{c}, b]$ аралықтары үшін құрылған осы қосындының өзі тәрізді екі қосындының қосындысы болады. Кейінгі екі қосынды нольге ұмтылады, олай болса, бірінші қосынды да нольге ұмтылады.

**VII.** *Егер интегралданатын функцияның мәнін саны шекті нүктелерде өзгертсек, одан функцияның интегралдануы бұзылмайды.*

### § 4. Анықталған интегралдың қасиеттері

**1.** Егер функция $f(x)$ $[a, b]$ аралығында интегралданатын болса, онда ол $[a, b]$ аралығында да интегралданады және

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Анықтама бойынша

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

**2.** *Функция $f(x)$ мына үш $[a,b]$, $[a,\text{c}]$ және $[\text{c},b]$ аралықтардың ең үлкенінде интегралданатын болсын; онда бұл функция қалған аралықтардың екеуінде де интегралданатын болады.*

*Дәлелдеу.* с нүктесі $a$ мен $b$-нің арасында жататын болсын, яғни $a < c < b,\ f(x)\,[a,\ b]$ аралығында интегралданатын функция. Олай болса, бұл функция $[a,\text{c}]$ және $[\text{c},b]$ аралықтарында интегралданатынын біз жоғарыда айтып кеттік.

$[a,b]$ аралығын бөлшек сегменттерге бөлеміз және с нүктесін бөлу нүктесінің бірі деп есептейміз де, интегралдық қосындыны құрамыз, сонда

$$\sum_a^b f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Енді $max\Delta x_i$-ді нольге ұмтылтып, кейінгі теңдіктің екі жағынан шек аламыз, сонда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{16}$$

Енді с нүктесі $[a,b]$ аралығының сыртында жатқан жағдайды қарастырайық. Сонымен, $a < b < c$ болсын, онда (16) формула бойынша

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f\,(x)\,dx + \int_b^c f\,(x)\,dx$$

немесе бұл арадан

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f\,(x)\,dx - \int_b^c f\,(x)\,dx = \int_a^c f\,(x)\,dx + \int_c^b f\,(x)\ dx.$$

Сонымен, (16) формула с нүктесі $[a,b]$ аралығы жөнінде қалай орналасса да дұрыс болатын болды.

**3.** *Егер функция $f(x)\,[a,\ b]$ аралығында интегралданатын болса, онда k f (x) (мұнда k – тұрақты сан) да осы аралықта интегралданатын болады және*

$$\int_a^b k\,f\,(x)\,dx = k\int_a^b f\,(x)\,dx.$$

**4.** *Егер екі функция* $f(x)$ *және* $g(x)[a,\ b]$ *аралығында интегралданатын болса, онда* $f(x) \pm g(x)$ *да интегралданатын болады және*

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Бұл қасиеттерді оқушылардың өздері де дәлелдей алады.

**5.** *Егер* $[a,\ b]$ *аралығында интегралданатын функция* $f(x)$ *теріс болмаса және* $a < b$, *онда*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Мұны да оқушылардың өздері дәлелдей алады.

**6.** $[a,\ b]$ *аралығында интегралданатын функциялар* $f(x)$ *және* $g(x)$ *осы аралықтың барлық нүктелері үшін мына теңсіздікті қанағаттандырса,* $f(x) \leq g(x)$ *немесе* $f(x) < g(x)$, *онда*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{немесе} \quad \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx.$$

Осының алдындағы қасиет бойынша

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \leq 0,$$

бұл арадан дәлелдейік деп отырған теңсіздік келіп шығады.

**7.** *Егер функция* $f(x)[a,\ b]$ *аралығында интегралданатын болса және* $a < b$ *болса, онда*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{17}$$

*Егер функция* $f(x)\,[a,\ b]$ *аралығында интегралданатын болса, онда* $f(x)$ да осы аралықта, интегралданатынын біз жоғарыда дәлелдеген болатынбыз.

Енді (17) теңсіздіктің дұрыстығын дәлелдейік. Ол үшін $[a,\ b]$ аралығын *n* бөлшек сегменттерге бөліп, интегралдық қосындыны құрамыз:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f\,(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ал

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f\,(\xi_i)\Delta x_i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left|f\,(\xi_i)\right| \Delta x_i.$$

$max\Delta x_i$-ді нольге ұмтылып, теңсіздіктің екі жағынан шек аламыз, сонда

$$\left|\int_a^b f\,(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f\,(x)|dx$$

болады.

**8.** *Егер функция* $f(x)[a,\ b]$ *аралығында интегралданатын болса және осы аралықтың барлық нүктелері үшін төмендегі қос теңсіздік*

$$m \leq f\,(x) \leq M$$

орындалса, онда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f\,(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Мына теңсіздіктердің

$$m\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \leq M\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i$$

орындалуы өзінен-өзі айқын. Осы арадан шекке көшсек дәлелдейік деп отырған теңсіздіктер келіп шығады.

**9.** *Егер функция* $f(x)\ [a,\ b]$ *аралығында интегралданатын болса және осы аралықтың барлық нүктелері үшін мына теңсіздіктер*

$$m \leq f\,(x) \leq M$$

орындалса, онда

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = \mu\,(b-a), \tag{18}$$

мұнда $\mu$, *m* мен *M*-нің арасында жатқан сан: $m \leq \mu \leq M$.

8) Қасиет бойынша

$$m(b-a) \leq \int_a^b f\,(x)\,dx \leq M(b-a),$$

бұл арадан

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(x)\,dx \leq M.$$

Былай ұйғарып

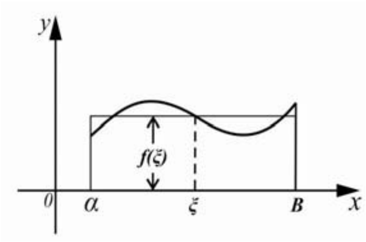
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(x)\,dx = \mu$$

керекті теңдікті дәлелдейміз.

9) *Қасиеттен мына салдар келіп шығады: егер функция $f(x)$ $[a,\ b]$ аралығында үздіксіз болса, онда (18) теңдіктің орнына төмендегі теңдік болады:*

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = (b-a)\,f\ (\xi), \qquad (19)$$

мұнда $\xi\ -a$ мен $b$-нің арасында жатқан тиянақты бір сан.



73-чертеж

(19) теңдіктің дұрыстығын былай дәлелдейміз: функция $f(x)$ $[a,\ b]$ аралығында үздіксіз болғандықтан, Вейерштрасс теоремасы бойынша ол өзінің дәл төменгі $m$ және дәл жоғарғы M шекаралықтарын қабылдайды. Олай болса, Коши теоремасы бойынша функция $f(x)$ $m$ мен $M$-нің арасында жатқан барлық сандарды қабылдайды, былайша айтқанда, $[a,\ b]$ аралығында ең болмағанда бір $\xi$ нүктесі табылып, осы нүктедегі $f(x)$ функцияның мәні $\mu$ санына тең болады, яғни $\mu = f\ (\xi)$.

9) Қасиетті және оның салдарын, анықталған интегралдың орта мәні жөніндегі теорема деп атайды.

Енді (19) формуланың геометриялық мағынасына көшейік. Бұл теңдіктің сол жағындағы анықталған интеграл, функцияның графигімен, абсцисса осімен, $x = a$ және $x = b$ түзулермен қоршалған фигураның ауданын береді, ал оның оң жағында тұрған көбейтінді биіктігі $f\,(\xi)$-ге, табаны $b-a$-ға тең тік төртбұрыштың ауданын кескіндейді (73-чертеж).

Анықталған интегралдың орта мәні жөніндегі жоғарыда тұжырымдалған теореманы жалпылауға болады.

1) $f(x)$ және $g\,(x)[a,\ b]$ аралығында интегралданатын функциялар болсын; $[a,\ b]$ аралығында жатқан барлық нүктелер үшін функция $f(x)$ мына теңсіздікті $m \le f\,(x) \le M$ қанағаттандырсын да, ал $g\,(x)$ таңбасын өзгертпесін: $\mathrm{g}\,(x) \ge 0[\mathrm{g}\,(x) \le 0]$, сонда

$$\int_a^b f\,(x)\,\mathrm{g}\,(x)\,dx = \mu \int_a^b \mathrm{g}\,(x)\,dx, \qquad (20)$$

мұнда $\mu - m$ мен $M$-нің арасында жатқан сан.

*Дәлелдеу.* Ең әуелі $\mathrm{g}\,(x) \ge 0$ болсын деп ұйғарайық,

Онда

$$m\,\mathrm{g}\,(x) \le f\,(x)\mathrm{g}\,(x) \le M\,\mathrm{g}\,(x).$$

Бұл теңсіздіктердің барлық жағын интегралдап, мынаны табамыз:

$$m\int_a^b \mathrm{g}\,(x)\,dx \le \int_a^b f\,(x)\,\mathrm{g}\,(x)\,dx \le M\int_a^b \mathrm{g}\,(x)\,dx.$$

5) Қасиет және $\mathrm{g}\,(x)$ функция туралы ұйғару бойынша

$$\int_a^b \mathrm{g}\,(x)\,dx \ge 0.$$

Сондықтан кейінгі теңсіздіктердің әрбір жағын

$$\int_a^b g\,(x)\,dx\text{-ке}$$

бөліп жіберіп табамыз:

$$m \le \frac{\int_a^b f\,(x)\ \ g\,(x)\ \ dx}{\int_a^b g\,(x)\ \ dx} \le M.$$

Былай ұйғарып,

$$\frac{\int\limits_a^b f\,(x)\;\; g\,(x)\;\; dx}{\int\limits_a^b g\,(x)\;\; dx} = \mu.$$

керекті нәтижеге келеміз.

Бұл теоремадан да мынадай салдар шығады: егер функция $f(x)[a,\ b]$ аралығында үздіксіз болса, онда (20) формуланың орнына мына формула қолданылады:

$$\int\limits_a^b f\,(x)\,\mathrm{g}\,(x)\,dx = f\,(\xi)\int\limits_a^b \mathrm{g}\,(x)\,dx, \qquad (21)$$

мұнда $\xi -\ a$ мен $b$-нің арасында жатқан бір тиянақты сан.

Егер функция $f(x)[a,\ b]$ аралығында интегралданатын болса, онда ол $[a,\ x]$ аралығында да интегралданатынын (мұнда $x -\ a$ мен $b$-нің арасында жатқан кез келген мәнді көрсетеді) біз жоғарыда көрсеттік. Анықталған интегралдың жоғарғы шегі $b$-ні $x$-пен ауыстырып, мына өрнекті табамыз:

$$F\,(x) = \int\limits_a^x f\,(t)\,dt.$$

Әрине, бұл өрнек, $x$-тің функциясы[1] болып табылады. Енді осы функцияға қандай қасиеттер тән, соны зерттейік.

11. *Егер функция $f(x)[a,\ b]$ аралығында интегралданатын болса, онда $F\ (x)$ осы аралықта x-тің үздіксіз функциясы болады.*

*Дәлелдеу.* $x$-ке еркімізше $\Delta x = h$ өсімшені берейік. Нүкте $x + h$ қарастырып отырған аралықтың сыртына шығып кетпеуі керек. Сонда

$$F\,(x+h) = \int\limits_a^{x+h} f\,(t)\,dt.$$

Бұл арадан

$$F\,(x+h) - F(x) = \int\limits_a^{x+h} f\,(t)\,dt - \int\limits_a^x f\,(t)\,dt = \int\limits_a^x f\,(t)\,dt +$$

---

[1] Интеграл ішіндегі функцияны аргументі x-тің орнына t-ні, y-ті, z-ті, u-ды,... қоюға болады, одан интегралдың мәні өзгермейді.

$$+\int_{a}^{x+h} f\,(t)\,dt-\int_{a}^{x} f\,(t)\,dt=\int_{a}^{x+h} f\,(t)\,dt.$$

Кейінгі теңдіктің оң жағында тұрған интегралға анықталған интегралдың орта мәні турасындағы теореманы қолдансақ, онда

$$F\,(x+h)-F(x)=\mu h, \tag{22}$$

мұндағы $\mu-$ интеграл астындағы функцияның $(x, x+h)$ аралығындағы дәл жоғарғы және дәл төменгі шекаралықтарының арасында жататын сан. Егер $h$ нольге ұмтылатын болса, онда $F\,(x+h)-F\,(x)$ айырма да нольге ұмтылады, бұл айырманың нольге ұмтылуы теореманы дәлелдейді.

**12.** *Егер функция* $f(x)$ $[a,\ b]$ *аралығында үздіксіз болса, онда мына интегралдың*

$$F\,(x)=\int_{a}^{x} f\,(t)\,dt.$$

*жоғарғы айнымалы шегі бойынша алынған туындысы интеграл астындағы функцияға тең болады, яғни* $[a,\ b]$ *аралығындағы барлық нүктелер үшін мына теңдік орындалады:*

$$F'(x)=f\,(x).$$

*Дәлелдеу.* Функция $f(x)\,[a,\ b]$ аралығында үздіксіз болғандықтан (22) теңдіктің орнына төмендегі теңдік болады:

$$F\,(x+h)-F(x)=hf(\xi),$$

мұнда $x\leq\xi\leq x+h,$ егер $h>0$ немесе $x+h\leq\xi\leq x,$ егер $h<0$ болса.

Осы теңдіктің екі жағын $h$-қа бөліп жіберіп, сонан кейін $h$-тың өзін нольге ұмтылтып шекке көшсек, сонда мынадай болады:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F\,(x+h)-F\,(x)}{h}=F'(x)=f(x),$$

өйткені $h$ нольге ұмтылатын болса, $\xi$ $x$-ке ұмтылады, ал $f(x)-$ үздіксіз функция.

Осы дәлелденген теоремадан өте қажетті мынадай қорытынды келіп шығады*: егер функция* $f(x)$ *үздіксіз болса, онда мына функция*

$$F(x)=\int_{a}^{x} f\,(t)\,dt \tag{23}$$

*оның алғашқы функциясы болады.* Сөйтіп, әрбір үздіксіз фукцияның алғашқы функциясы болады.

Бұл арадан жоғарғы шегі айнымалы анықталған интегралды анықталмаған интеграл орнына қарауға болады деген де қорытынды шығаруға болады.

## § 5. Орта мән жөніндегі екінші теорема

Бұл – екі функцияның көбейтіндісінен алынған анықталған интеграл туралы теорема. Математикалық анализдің кейбір оқулықтарында бұл теореманы *Бонне теоремасы* деп те атайды.

**Теорема.** Егер $[\alpha,\ b]$ аралығында $f(x)$ – біркелкі функция, ал $\varphi(x)-$ шектелген және интегралданатын болса, онда $[a,\ b]$ аралығының бойында жатқан бір $\xi$ нүктесі табылып, төмендегі теңдік орындалады:

$$\int_a^b f\ (x)\ \varphi\ (x)\ dx = f\ (a)\ \int_a^\xi \varphi\ (x)\ dx + f\ (b) \int_\xi^b \varphi\ (x)\ dx. \quad (23)$$

*Дәлелдеу.* $f\ (x)-$ үдеме функция болсын және $f\ (a)=0$. Енді $[\alpha, b]$ аралығын абсциссалары мына сандарға тең $a=x_0, x_1, x_2, \ldots$ $\ldots,\ x_{n-1},\ x_n=b$ нүктелермен $n$ бөлшек сегменттерге бөлейік. Сонда

$$\int_a^b f\ (x)\ \varphi\ (x)\ dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\ (x)\ \varphi\ (x)\ dx.$$

Немесе бұл теңдікті былай етіп жазайық:

$$\int_a^b f\ (x)\ \varphi\ (x)\ dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_k+1} [f\ (x) -\ f(x_k)]\varphi\ (x) dx +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} f\ (x_k) \int_{x_k}^{x_k+1} \varphi\ (x)\ dx. \quad (24)$$

(24) теңдіктің оң жағында тұрған бірінші қосындыны $J$ арқылы белгілейік, яғни

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_k+1} [f\ (x) - f(x_k)]\ \varphi\ (x)\ dx.$$

Егер барлық айырмалар $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ нольге ұмтылса, онда $I$ де нольге ұмтылады, міне осыны дәлелдейік.

Дұрысында

$$|I| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_k+1} [(f\ x_{k+1}) = f(x_k)]|\varphi(x)|dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} [f(\ x_{k+1}) - f\ (x_k)] \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi(x)|dx.$$

Мына интегралдардың

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi(x)|d_x$$

мәндерінің ең үлкенін $\mu$ деп белгілесек, онда

$$|I| \leq \mu \sum_{k=0}^{n-1} [f\ (x_{k+1}) - f\ (x_k)] = \mu[f\ (b) - \ f\ (a)] = \mu\ f\ (b),$$

өйткені $f\ (a) = 0$.

Функция $\varphi\ (x)[\alpha, b]$ аралығында шектелген болғандықтан, осы аралықтың барлық нүктелері үшін келесі теңсіздік орындалады:

$$|\varphi\ (x)| \leq L,$$

мұнда $L$ – оң тұрақты сан; олай болса:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi\ (x)|\ dx \leq L\ (x_{k+1} - x_k).$$

Осы теңсіздікті еске алып төмендегіні табамыз:

$$|I| \leq L\ f\ (b)\ (x_{k+1} - x_k). \tag{25}$$

Егер барлық айырмалар $x_{k+1} - x_k$ нольге ұмтылатын болса, $J$-дің нольге ұмтылатыны (25) теңсіздіктен көрініп тұр.

Сонымен, (24) теңдік мына түрге келетін болды:

$$\int_d^b f\ (x)\ \varphi\ (x)\ dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n-1} f\ (x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi\ (x)\ dx. \tag{26}$$

Енді (26) теңдіктің оң жағында тұрған шек таңбасы астындағы қосындыны түрлендірейік:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\,(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi\,(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} f\,(x_k)\left[\int_{x_k}^{b} \varphi\,(x)\,dx - \right.$$

$$\left. - \int_{x_{k+1}}^{b} \varphi\,(x)\,dx\right] = \sum_{k=0}^{n-2} f\,(x_k) \int_{x_k}^{b} \varphi\,(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n-1} f\,(x_k) \int_{x_{k+1}}^{b} \varphi\,(x)\,dx.$$

Осы теңдіктің оң жағында тұрған бірінші қосындыда $k = 0$ мәніне сәйкес келетін қосылғыш нольге айналады, өйткені $f\,(x_0) = f\,(a) = 0$ екінші қосындыда $k = n - 1$ мәнге сәйкес келетін қосылғыш нольге айналады, өйткені

$$\int_{x_n}^{b} \varphi\,(x)\,dx = \int_{b}^{b} \varphi\,(x)\,dx = 0.$$

Сөйтіп,

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\,(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi\,(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} f\,(x_k) \int_{x_k}^{b} \varphi\,(x)\,dx -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} [f\,(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi\,(x)\,dx].$$

Бұл арадан

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\,(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi\,(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} [f\,(x_k) - f\,(x_{k-1}) \int_{x_k}^{b} \varphi\,(x)\,dx. \quad (27)$$

Былай ұйғарайық:

$$\int_{x}^{b} \varphi\,(t)\,dt = \Phi\,(x),$$

онда $[a, b]$ аралығында $\Phi\,(x)$ – үздіксіз болып табылады; сондықтан бұл аралықта ол функцияның дәл жоғарғы және дәл төменгі шекаралықтары бар, олар:

$$Sup\,\Phi\,(x) = M, \;\; inf\Phi\,(x) = m.$$

Бұдан кейін (27) теңдік былай түрленеді:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\,(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi\,(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} [f\,(x_k) — f\,(x_{k-1})]\Phi\,(x_k). \quad (28)$$

$f\ (x) -$ біркелкі болғандықтан, мына айырмалардың $f\ (x_k) - f\ (x_{k-1})$ барлығы да теріс емес. Сондықтан, егер (28) теңдіктің оң жағындағы барлық $\Phi\ (x_k)$-тың орнына *M*-ді қойса, онда ол өседі, ал барлық $\Phi\ (x_k)$-тің орнына $m$-ді қойса, одан (28) теңдіктің оң жағы кемиді. Міне, осының нәтижесінде

$$m \sum_{k=1}^{n-1} [f\ (x_k) - f\ (x_{k-1})] \leq \sum_{k=0}^{n-1} f\ (x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x)\, dx \leq$$

$$\leq M \sum_{k=1}^{n-1} [\, f\ (x_k) - f\ (x_{k-1})]. \qquad (29)$$

Ал

$$\sum_{k=1}^{n-1} [f\ (x_k) - f\ (x_{k-1})] = f\ (x_{n-1}).$$

Сондықтан теңсіздік мына түрге көшеді:

$$m\, f\ (x_{n-1}) \leq \sum_{k=0}^{n-1} f\ (x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi\ (x)\, dx \leq M\, f\ (x_{n-1}).$$

$x_{n-1}$-ді b-ге тең деп, яғни $x_{n-1} = b$ деп алуға ешкім бөгет жасамайды, олай болса:

$$m\, f\ (b) \leq \sum_{k=0}^{n-1} f\ (x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi\ (x)\, dx \leq M\, f(b). \qquad (30)$$

Барлық $x_{k+1} - x_k$ айырмаларды нольге ұмтылтып, (30) теңсіздіктің барлық жағынан шек және (26) теңдікті еске ала отыра табамыз:

$$f\ (b) \leq \int_a^b f\ (x)\, \varphi\ (x)\, dx \leq Mf\ (b).$$

Функция $\Phi\ (x)\ [a, b]$ аралығында үздіксіз болумен байланысты, осы аралықта $\xi$ нүктесі табылып келесі теңдік

$$\int_b^a f\ (x)\, \varphi\ (x)\, dx = \Phi\ (\xi)\, f\ (b)$$

орындалады немесе

$$\int_{b}^{a} f\,(x)\,\varphi\,(x)\,dx = f(b)\int_{b}^{a} \varphi\,(x)\,dx. \qquad (31)$$

Міне, осы теңдіктің орындалуын дәлелдеу керек еді.

Енді функция $f\,(x)$ – кез келген үдеме функция болсын және $f\,(a) \neq 0$. Мына $f\,(x) - f\,(a)$ айырмаға (31) формуланы әбден қолдануға болады:

$$\int_{b}^{a} [f\,(x)\ - f\,(a)]\varphi\,(x)\,dx = [f\,(b) - f\,(a)]\int_{\xi}^{b} \varphi\,(x)\,dx.$$

Бұл арадан

$$\int_{b}^{a} f\,(x)\,\varphi\,(x)\,dx = f\,(a)\int_{a}^{\xi} \varphi\,(x)\,dx + f(b)\int_{\xi}^{b} \varphi\,(x)\,dx. \ (32)$$

Сонымен, теорема түгелінен дәлелденді.

Үдеме функция үшін дәлелденген (32) формула кеміме функция үшін де дұрыс болады. Мұның дұрыстығына көз жеткізу үшін тек таңбаларын ауыстыру керек.

## § 6. Анықталған интегралды есептеп шығару

1. Бір аралықта берілген функцияның анықталған интегралын табу үшін, анықтама бойынша біз ең алдымен аралықты бөлшек сегменттерге бөліп, интегралдық қосындыны құрып, барлық бөлшек сегменттердің ұзындықтарын нольге ұмтылтып, жаңағы интегралдық қосындысының шегін табамыз.

Анықталған интегралдың мәнін бұл жолмен іздеу қиын жолдың бірі. Сондықтан бұдан гөрі оңайырақ жол табу керек. Ол жол – мына келесі теорема.

**Теорема.** *Егер* $[a, b]$ *аралығында интегралданатын* $f\,(x)$ *функциясы үшін алғашқы функция*

$$F\,(x) = \int f\,(x)dx$$

болатын болса, онда

$$\int_{a}^{b} f\,(x)\,dx = F\,(b) - F\,(a) = F\,(x)\Big|_{a}^{b}. \qquad (33)$$

(33) формуланы *Ньютон-Лейбниц формуласы* деп атайды.

*Дәлелдеу.* $[a, b]$ аралығын абсциссалары мына сандарға $a = x_0, x_1, x_2, . . . , x_{n-1}, x_n = b$ тең нүктелермен $n$ бөлшек сегменттерге бөлеміз; бұл бөлу нүктелерінің орналасу тәртібі былай:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < . . . < x_{n-1} < x_n = b.$$

Енді мына $F\ (b) - F\ (a)$ айырманы қарайық. Бұл айырманың өзін былай етіп жазуға болады:

$$F\ (b) - F\ (a) = [F\ (x_1) - F\ (x_0)] + [F\ (x_2) - F\ (x_1)] +$$

$$+ . . . + [F\ (x_n) - F(x_{n-1})] = \sum_{i=0}^{n-1} [F\ (x_{i+1}) - F\ (x_i)].$$

Қосындының таңбасының ішіндегі әрбір айырмаға, шекті өсімше жөніндегі Лагранж теоремасын қолданамыз, сонда

$$F\ (b) - F\ (a) = \sum_{i=0}^{n-1} F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

мұнда $\xi_i - a$ мен $b -$ ні арасында жатқан бір тиянақты нүкте (бірақ қандай екені белгісіз). Теореманың шарты бойынша, $[a, b]$ аралығының барық нүктелері үшін $F'(x) = f\ (x)$. Олай болса:

$$F\ (b) - F\ (a) = \sum_{i=0}^{n-1} f\ (\xi_i)\Delta x_i.$$

Бұл теңдіктің оң жағындағы қосынды – инегралдық қосынды. Егер $\max \Delta x_i$ -ді нольге ұмтылтып кейінгі теңдіктің екі жағынан шек алатын болса онда

$$F\ (b) - F\ (a) = \int_a^b f\ (x)\ dx,$$

өйткені $f\ (x) -\ [a, b]$ аралығында интегралданатын функция.

(33) формуланы пайдалану жөнінде бірнеше мысалдар келтірейік:

$$1)\ \int_a^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Интеграл астында тұрған $\sqrt{a^2 - x^2}$ функцияның алғашқы функциясы мына функция $\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} arc \sin\frac{x}{a}$ болатыны[1] анықталмаған интегралдар теориясынан белгілі. Олай болса,

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} arc \sin\frac{x}{a}\right]_{-a}^{a} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

$$2) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2} dx \qquad (0 < x < 1).$$

Алдымен біз анықталмаған

$$\int \frac{1 - r^2}{1 - 2\,r\cos x + r^2} dx$$

интегралды қарастырамыз. Алғашқы функцияны табу үшін мынадай ауыстыру $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ жасаймыз. Сонда

$$\int \frac{1 - r^2}{1 - \ r\cos x + r^2} dx = 2(1 - r^2) \int \frac{d\,t}{(1 - r)^2 + (1 + r)^2 t^2} =$$

$$= 2 arc \operatorname{tg} \frac{1 + r}{1 - r} t = 2\ arc \operatorname{tg} \left(\frac{1 + r}{1 - r} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

Сонымен, алғашқы функция:

$$F\ (x) = 2\ arc\ tg\ \left(\frac{1 + r}{1 - r} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

Олай болса,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2\,r\cos x + r^2} dx = arc\ tg\ \left(\frac{1 + r}{1 - r} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) \ \Big|_{-\pi}^{\pi}.$$

Егер бірден $x$-тің орнына $\pi$-ді және $-\pi$-ді қойсақ, онда алғашқы функция өзінің мағынасын жоғалтып жібереді. Бірақ, дегенмен мына шектер

$$\lim_{x \to -\pi + 0} F\ (x) = -\pi, \qquad \lim_{x \to \pi - 0} F\ (x) = \pi$$

бар.

Егер $F(-\pi)$ және $F(+\pi)$-лерді осы шектерге тең десек, онда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2\,r\cos x + r^2} dx = \ F\ (x)\ \Big|_{-\pi}^{\pi} = F\ (\pi) - F(-\pi) = 2\pi. \ \ .$$

---

[1] Бәрібір жойылып кететіндіктен, алғашқы функциядағы С жазылмайды.

3) $\int_{0}^{1} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx.$

Алдымен анықталмаған интегралды

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$$

жеке алайық:

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx = \int \frac{x^4-x^2+1+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} dx$$

$$= \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x^2 dx}{x^6+1} = arc\,\mathrm{tg}\,x + \frac{1}{3} arc\,\mathrm{tg}\,x^3$$

Енді берілген анықталған интегралдың мәнін (33) формула бойынша табамыз:

$$\int_{0}^{1} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx = \left(arc\,\mathrm{tg}\,x + \frac{1}{3}\, arc\,\mathrm{tg}\,x^3\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Егер бастапқы берілген интегралдағы функцияның алғашқы функциясы үшін мына функцияны $-\frac{1}{3} arc\,\mathrm{tg}\,\frac{3x\,(x^2-1)}{x^4-4\,x^2+1}$ алсақ, онда

$$\int_{0}^{1} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx = 0,$$

бұл мүмкін емес, өйткені интеграл астында тұрған функцияның таңбасы оң, сондықтан мұндай функцияның анықталған интегралы нольге тең болу мүмкін емес. Қарастырып отырған анықталған интегралдың осы жағдайда нольге айналып кету себебі, алғашқы функция

$$F\,(x) = -\frac{1}{3} arc\,\mathrm{tg} \frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1},$$

[0,1] аралығының бойында жатқан мына нүктеде $x_0 = \sqrt{2-}\sqrt{3}$ өзінің үздіксіздік қасиетін жоғалтады. Егер ол интегралды екі интегралға былай ажыратып жазсақ:

$$\int_{0}^{1} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx = \int_{0}^{x_0-0} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx + \int_{x_0+0}^{1} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx,$$

онда нәтижесі дұрыс болып шығады және $\frac{\pi}{3}$-ке тең болады.

2. Енді бөлімшелеп интегралдау тәсілін қарайық. Бұл жөнінде келесі теореманы дәлелдеу керек.

**Теорема.** *Егер функциялар* $u(x)$ және $v(x)$ өздерінің бірінші ретті туындыларымен бірге $[a, b]$ аралығында үздіксіз болса, онда төмендегі формула

$$\int_a^b u(x)dv = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v\,(x)\,d\,u \qquad (34)$$

орындалады.

(34) формуланы бөлімшелеп интегралдау формуласы деп атайды.

*Дәлелдеу.* Анықталмаған интегралдар үшін бұл формула былай болатын:

$$\int u\,d\,v = u(x)v(x) - \int vdu.$$

Бұдан анықталған интеграл алатын болсақ, онда

$$\int_a^b u\,d\;v = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,d\,u.$$

Мысал келтірейік:

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^m\,x\,d\,x,$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,d\,x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Берілген интегралды былай жазуға болады:

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^m\,x\,d\,x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{m-1}\,x\,d\,(\text{-}\cos x).$$

Мұны бөлімшелеп интегралдайтын болсақ:

$$I_m = -sin^{m-1}\,x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{m-2}\,x\,cos^2 d\,x =$$

$$= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{m-2}xdx = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^m xdx.$$

Немесе

$$I_m = (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m;$$

бұл арадан

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2.} \qquad (35)$$

(35) формуланы рекуррентік формула деп атайды, өйткені осы формуладан $J_2, J_3, J_4, \ldots$ табуға болады. Мәселен

$$I_{m-2} = \frac{m-3}{m-2} I_{m-4}, \quad I_{m-4} = \frac{m-5}{m-4} I_{m-6}, \;.\;.\;.$$

Айталық, $m - 2n$, онда

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)\,(2n-3)\;.\;.\;.3\cdot 1}{2n\,(2\,n-2)\;.\;.\;.4\cdot 2} I_0 =$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\;.\;.\;.3\cdot 1}{2n(2n-2)\;.\;.\;.4\cdot 2}\frac{\pi}{2}.$$

Егер $m = 2n+1$, онда

$$I_{m+1} = \frac{2n\,(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n+1)\,(2n-1)\;.\;.\;.5\cdot 3\cdot 1} I_1 =$$

$$= \frac{2n\,(2n-2)\;.\;.\;.4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1).\;.\;.5\cdot 3\cdot 1}$$

Сөйтіп,

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^m\,x\,d\,x = \begin{cases} \dfrac{(2n-1)!!}{2n!!}\dfrac{\pi}{2}, & \text{егер } m = 2\,n \\ \dfrac{2\,n!!}{(2n+1)\,!!}, & \text{егер } m = 2\,n+1. \end{cases}$$

Анықталған интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^m\,x\,d\,x,$$

ол да осыған тең болады, яғни

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^m\,x\,d\,x = \begin{cases} \dfrac{(2n-1)!!}{2n!!}\dfrac{\pi}{2}, & \text{егер } m = 2\,n \\ \dfrac{2\,n!!}{(2n+1)\,!!}, & \text{егер } m = 2\,n+1. \end{cases}$$

## § 7. Анықталған интегралдағы айнымалыны ауыстыру

$f\ (x)$ функцияны $[a, b]$ аралығында алынған анықталған интегралын қарайық:

$$\int_a^b f\ (x)\, dx.$$

Осы интегралдың мәнін табу үшін, кейбір жағдайда айнымалы x-ті басқа тәуелсіз айнымалымен ауыстырған қолайлы болады.

Айталық, $\varphi(t)$ $[\alpha, \beta]$ аралығында анықталған, осы аралықта өзі үздіксіз және үздіксіз $\varphi^1\ (t)$ туындысы бар функция деп ұйғарайық. Тәуелсіз айнымалы t $\alpha$-дан $\beta$-ға дейін үздіксіз өзгергенде, функция $\varphi(t)$ әрқашан бір бағытта $\varphi(\alpha) = a$-дан $\varphi(\beta) = b$-ге дейін үздіксіз өзгеретін болсын, былайша айтқанда $\varphi(t)$ біркелкі функция болсын.

$[\alpha, \beta]$ аралығын, мына аралық мәндермен

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ . \ . \ . < t_{n-1} < t_n = \beta$$

$n$ бөлшек сегменттерге бөлеміз. $x = \varphi(t)$ функцияның бұған сәйкес мәндері

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ . \ . \ . < x_{n-1} x_n = b$$

болсын.

Сонда

$$x_{i+1} - x^i = \varphi\ (t_{i+1}) - \varphi(t_i).$$

Енді осы айырмаға шекті өсімше жөніндегі Лагранж теоремасын қолдансақ, сонда

$$x_{i+1} - x_i = (t_{i+1} - t_i)\varphi'(\theta_i),$$

мұнда $\theta_i - t_i$ мен $t_{i+1}$-дің арасында жатқан бір тиянақты сан, бірақ қандай екені белгісіз.

Қарастырып отырған интеграл анықтама бойынша барлық айырмалар $x_{i+1} - x_i$ нольге ұмтылғандағы мына интегралдық қосындының:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f\ (\xi_i)\ (x_{i+I} - x_i)$$

шегі. Бұл қосындыдағы $\xi_i - [x_i,\ x_{i+1}]$ сегменттерінде жатқан кез келген нүктелер. Сондықтан бұл нүктелерді былай сайлап алайық:

$$\xi_i = \varphi\ (\theta_i).$$

Бұдан кейін интегралдық қосынды мына түрге айналады:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f\,[\varphi\,(\theta_i)]\,\varphi'(\theta_i)\,(t_{i+1} - t_i). \qquad (36)$$

Енді барлық $t_{i+1} - t_i$ айырмаларды нольге ұмтылтып, осы кейінгі қосындыдан шек аламыз, сонда (36) теңдіктің сол жағы мына

$$\int_a^b f\,(x)' dx$$

анықталған интегралға ұмтылады да, ал оның оң жағындағы қосынды мына

$$\int_\alpha^\beta f\,[\varphi\,(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

анықталған интегралға ұмтылады. Сонымен:

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\,[\varphi\,(t)\,]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (37)$$

(37) формуланы, анықталған интегралдағы айнымалыны ауыстыру формуласы деп атайды.

Енді (37) формуланы пайдалану жөнінде бірнеше мысалдар келтірейік.

$$1)\ \int_0^a (a^2 - x^2)^n\,dx$$

$n$ −натурал сан. $x$-ті былай ауыстырамыз:

$$x = a\sin t,$$

бұл арадан

$$dx = a\cos t\;d\;t.$$

Айнымалы $x$-тің өзгеру облысы $[0,\ a]$ аралығы. Енді біз тәуелсіз айнымалы $t$-нің өзгеру облысын табуымыз керек, ол үшін ауыстырудағы $x$-тің орнына әуелі төменгі шек – нольді, онан кейін оның орнына жоғарғы шек $a$-ны қою керек. Сонда $t$-нің өзгеру облысы $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ болады. Осы ауыстырудың нәтижесінде

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^n \, dx = a^{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n+1} t \; d\,t = a^{2n+1} \frac{2\,n\,!!}{(2\,n+1)\,!!}$$

болып шығады.

$$\frac{2\,n-1}{2}$$

Мынандай

$$\int_0^a (a^2 - x^2) \, dx$$

интегралға да осы ауыстыруды жасайтын болсақ, онда

$$\frac{2\,n-1}{2}$$

$$\int_0^a (a^2 - x^2) \cdot \qquad dx = a^{2n} \frac{(2n-1)!!}{2\,n} \frac{\pi}{2}.$$

Енді бір көңіл жіберетін мәселе мынау: егер (37) формуланы қадағалап қолданбаса, қисынсыз нәтижеге келуіміз мүмкін. Мұндай жағдайдың іс жүзінде болуын көрсету үшін келесі мысалды қарайық:

2) $$\int_0^{\pi} \frac{d\,x}{a^2\,cos^2 + b^2\,sin^{2\,x}},$$

интеграл астында тұрған бөлшектің алымын да, бөлімін де $cos^2\,x$-ке бөлсек, сонда:

$$\int_0^{\pi} \frac{\frac{dx}{cos^2 x}}{a^2 + b^2 tg^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{a^2 + b^2\,\mathrm{tg}^2 x}.$$

Мынадай ауыстыру $t = \mathrm{tg}x$ жасайық. Сонда $x = 0$ болса $t = 0,\ x = \pi$ болса $t = 0$. Олай болса (37) формуланы бірден қолданып табамыз:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\,x}{a^2 cos^2 x + b^2 sin^2 x} = \int_0^{0} \frac{d\,t}{a^2 + b^2 t^2} = 0.$$

Бұл мүмкін емес, өйткені интеграл астындағы функция оң. Мұндай қайшылықтың болу себебі: $x$ нольден $\pi$-ге дейін өзгергенде $\frac{\pi}{2}$-ді басып өтеді, ал бұл нүктеде мына функция $t = \mathrm{tg}x$ үздіксіз қасиетін жоғалтып, үзілісті болады.

Дұрыс нәтиже шығару үшін бастапқы берілген интегралдың өзін екіге ажыратып жазу керек:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\,x}{a^2cos^2x + b^2sin^2x} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,x}{a^2cos^2x + b^2sin^2x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\,x}{a^2cos^2x + b^2sin^2x}.$$

Екінші интегралды жеке алып, ондағы $x$-тің орнына $x = \pi - t$-ні қояйық, сонда

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\,x}{a^2cos^2x + b^2sin^2x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{a^2cos^2x + b^2sin^2t}.$$

Сонымен,

$$\int_0^{\pi} \frac{d\,x}{a^2cos^2x + b^2sin^2x} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,x}{a^2cos^2x + b^2sin^2x}.$$

Енді мынау интегралды қарайық:

$$\int_0^{l} \frac{d\,x}{a^2cos^2x + x^2sin^2b},$$

мұнда $0 < l < \frac{\pi}{2}$.

Бұл интегралға бұрынғы $t = \text{tg}x$ ауыстыруды жүргіземіз. Айнымалы $x$ нольден $l$-ге дейін өзгергенде, $t$ нольден tg$l$-ге дейін өзгереді. Сөйтіп:

$$\int_0^{l} \frac{d\,x}{a^2cos^2x + b^2sin^2x} = \int_0^{tg\,l} \frac{d\,t}{a^2 + b^2t^2} =$$

$$= \frac{1}{ab}\left[arc\,tg\,\frac{b\,t}{a}\right]_0^{tg\,l} = \frac{1}{ab}arc\,\text{tg}\,\frac{b}{a}\,\text{tg}\,l.$$

Бұл жерде біздің жасаған ауыстыруымыз ешбір қайшылыққа келтірмеу керек, өйткені tg$x$-тің туындысы $\frac{1}{cos^2x}$, ал $x$ нольден $l$-ге дейін $\left(l < \frac{\pi}{2}\right)$ өзгергенде

$$\frac{1}{cos^2x} > 0.$$

Ең бастапқы берілген интегралдың мәнін табу үшін жаңағы табылған интегралдан $l$-ді $\frac{\pi}{2} - 0$ ұмтылтып шек алу керек. Сонда

$$\int_0^{\pi} \frac{d\,x}{a^2cos^2x + b^2sin^2x} = 2\lim \int_0^{l} \frac{d\,x}{a^2cos^2x + b^2sin^2x} =$$

$$= \frac{2}{ab} \lim_{l\to\frac{\pi}{2}-0} arc\,\mathrm{tg}\frac{b}{a}\mathrm{tg}\,l = \frac{2}{a\,b}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{a\,b}.$$

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$

Берілген интегралдың мәнін табу үшін мынадай ауыстыру жасаймыз:

$$x = \mathrm{tg}\,t.$$

Айнымалы x-тің өзгеру облысы белгілі, ол $[0,1]$ аралығы. Айнымалы $t$-нің өзгеру облысын табу үшін, ауыстырудағы x-тің орнына әуелі нольді, онан кейін 1-ді қоямыз. Сонда $t$-нің өзгеру облысы мына аралық $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ болады.

Ауыстырудың екі жағын дифференциалдасақ, сонда:

$$dx = \frac{d\,t}{cos^2t}.$$

$x$-тің және $dx$-тің мәндерін берілген интегралға қойсақ,

$$\int_0^{l} \frac{l_n(1+x)}{1+x^2}d\,x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+\mathrm{tg}\,t)}{1+\mathrm{tg}^2t}\;\frac{d\,t}{cos^2t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\mathrm{tg}\,t)dt.$$

Енді

$$1 + \mathrm{tg}\,t = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} + tg\,t = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t},$$

олай болса

$$\ln(1+tg\,t) = \ln\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right) + \frac{1}{2}ln2 - lncos\,t$$

Демек.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln\,(1+tg\;t)d\,t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln\;\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\,d\,t = \frac{1}{2}ln2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\,t -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln\cos t\;d\;t.$$

Кейінгі теңдіктің оң жағында тұрған бірінші интегралдағы айнымалыны ауыстырайық:

$$\frac{\pi}{4}+t=\frac{\pi}{2}-z.$$

Сонда

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln(1+\mathrm{tg}\,t)\;d\;t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ln\cos t\;d\;t + \frac{\pi}{8}ln2 -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{4}} ln\cos t\;d\;t = \frac{\pi}{8}ln2.$$

Сөйтіп,

$$\int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2}d\;x = \frac{\pi}{2}ln2.$$

$$4)\quad I\,(r) = \int_0^{\pi} ln(1-2\,r\cos x + r^2)\;d\;x.$$

Егер $|r| \neq 1,$ интеграл астындағы функция үздіксіз, демек бұл жағдайда функцияның анықталған интегралы бар. Міне, осыны іздеп табайық.

Төмендегі теңсіздіктердің

$$(1-|r|)^2 \leq 1-2\,r\cos x + r^2 \leq (1+|r|)^2$$

орындалуы өзінен-өзі айқын.

Осы теңсіздіктердің барлық жағын логарифмдеп, 0-ден $\pi$-ге дейін интегралдайтын болсақ, онда

$$2\pi ln(1-|r|) \leq I(r) \leq 2\pi ln(1+|r|).$$

Кейінгі теңсіздіктерден мынаны байқауға болады: егер $r \to 0,$ онда $J(r) \to 0.$

Енді мына интегралды қарайық:

$$I(-r)=\int_0^\pi ln(1+2\,r\cos x+r^2)\,d\,x.$$

Осы интегралдағы айнымалы $x$-ті былай ауыстырамыз: $x=\pi-t$, сонда айнымалы $t,\pi$-ден 0-ге дейін өзгереді және

$$I(-r)=-\int_\pi^0 ln[1+2\,r\cos(\pi-t)+r^2]d\,t=$$

$$=\int_0^\pi ln(1-2\,r\cos t+r^2)\,d\,t=I(r).$$

Кейінгі шыққан нәтижеге сүйеніп, былай жазамыз:

$$2I(r)=I(r)+I(-r)$$

немесе

$$2I(r)=\int_0^\pi[ln(1-2\,r\cos x+r^2)+ln(1+2\,r\cos x+r^2)]dx=$$

$$=\int_0^\pi ln(1-2\,r\cos x+r^2)(1+2\,r\cos x+r^2)\,d\,x=$$

$$=\int_0^\pi ln(1-2\,r^2\cos 2x+r^4)d\,x.$$

Егер былай ұйғарсақ: $x=\frac{t}{2}$, онда

$$2I(r)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ln(1-2\,r^2\cos t+r^4)\,d\,t=\frac{1}{2}\int_0^\pi+\frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}.$$

Осы теңдіктің оң жағында тұрған екінші интегралдағы айнымалыны былай ауыстырамыз $t=2\pi-u$, сонда мына нәтиже келіп шығады

$$2I(r)=I(r^2),$$

бұл жерден

$$I(r)=\frac{1}{2}I\,(r^2),$$

$$I\,(r^2)=\frac{1}{2}I\,(r^4),$$

сонда

$$I(r) = \frac{1}{2^2} I\left(r^{2^2}\right),$$

. . . . . . . . . .

$$I(r) = \frac{1}{2^n} I\left(r^{2^n}\right) \quad (n = 1, \qquad 2, \qquad .,.).$$

Егер $|r| < 1$ болса, онда $n$ шексіздікке ұмтылғанда $r^{2^n} \to 0$ және $J\left(r^{2^n}\right) \to 0$. Сондықтан $J(r) = 0$, егер $|r| < 1$.

Енді $|r| < 1$ жағдайды қарастырайық.

Интеграл астындағы функцияны жеке алып, оны мына түрде жазайық:

$$1 - 2\, r \cos x + r^2 = r^2 \left(1 - 2\frac{1}{r}\cos x + \frac{1}{r^2}\right).$$

Бұл теңдіктің екі жағын әуелі логарифмдеп, онан кейін 0-ден $\pi$-ге дейін интегралдап табамыз:

$$I(r) = 2\pi ln|r| + I\left(\frac{1}{r}\right).$$

Мұның алдында ғана болған қорытынды бойынша, $J\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, олай болса,

$$I(r) = 2\pi ln.|r|,$$

егер $|r| > 1$ болса.

### *Жаттығулар*

Төмендегі интегралдарды есептеп шығарыңыздар:

1. $\int_0^{\pi} \frac{\sin 3x}{\sin x} d\, x.$ Жауабы: $\pi$.

2. $\int_0^{\pi} \frac{\sin mx}{\sin x} d\, x, \qquad m > 0 -$ бүтін сан.

Бұл жерде $m$ жұп және тақ жағдайларды қарастыру керек.

Жауабы: $0,$ егер $m -$ жп болса
$\pi$ егер $m -$ тақ болса;

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln \sin x\, d\, x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln \cos x\, d\, x$

дәлелдеу керек.

4. $\int_0^{1} \sqrt{(1 - x^2)^{m-1}}\, dx, \qquad m > 0 -$ бүтін сан.

5. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x\, d\, x}{\sqrt{1 - 2\, a \cos x + a^2}},$ $a > 0$ 2-ге тең, егер $a < 1$;

$\frac{2}{a}$те егер $a > 1$.

Нсау: мынадай ауыстыру: $\cos x = z$ жасау керек.

6. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ln \sin x\, d\, x = -\frac{\pi}{2} ln2$ Дәлелдеу керек.

7. Радиусы а метр, тереңдігі b метр цилиндрлік цистернадан суды насоспен сыртқа шығару үшін қанша жұмыс жұмсау керек, соны есептеп шығарыңдар.

Жауабы:$\frac{\pi a^2 b^2}{2}$.

8. Мына интегралдың

$$\int\limits_0^{2x} \frac{\sin t}{t} d\, t,$$

$x$ бойынша алынған туындысын табу керек.

Мына интегралды

$$I = \int\limits_2^3 \frac{X^2 d\, x}{1 + x^2}$$

бағалау керек.

Жауабы: $0{,}85 < I < 0{,}90$.

Нұсқау: а) егер функция $f(x)$ $[a, \text{в}]$ аралығында үдеме болса, онда

$$(b - a) f(a) < \int\limits_a^b f(x)\, d\, x < (b - a) \frac{f\,(a) + f\,(b)}{2},$$

б) егер функция $f(x)$ $[a, \text{в}]$ аралығында кеміме болса, онда

$$(b - a) \frac{f\,(a) + f\,(b)}{2} < \int\limits_a^b f(x)\, d\, x < (b - a)\, f\,(b).$$

Келесі теңсіздіктердің дұрыстығын дәлелдеу керек.

10. $0 < \int\limits_0^1 \frac{x^{19} d\, x}{\sqrt[3]{1 + x^6}} < \frac{1}{20}$.

11. $1 < \int\limits_0^1 \frac{1 + x^{20}}{1 + x^{40}} < 1 + \frac{1}{42}$.

12. $\int\limits_{-1}^1 \frac{d\, x}{(a - x)\sqrt{1 - x^2}},$ $a > 1$. Жауабы: $\frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{a}^2 - 1}}$.

13. $\int_{-1}^{1} \frac{x^4\, d\, x}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$. Жауабы: $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$.

14. $\int_{0}^{\pi} \frac{sin^2\, x\, d\, x}{1+2\, a \cos x + a^2}$. Жауабы: $\frac{\pi}{2}$, егер $|a| < 1$,

$\frac{\pi}{2\, a^2}$, егер $|a| > 1$

15. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\, x}{(a^2 sin^2 + b^2 cos^2 x)^2}$, Жауабы: $\frac{\pi}{2\, a\, b}$.

# IX ТАРАУ
# ИНТЕГРАЛДАРДЫҢ МӘНІН ЖУЫҚТАП ТАБУ

## § 1. Лагранждың интерполяциялық полиномы

Айталық, $f(x) - [a, b]$ аралығында берілген бір функция. $\varepsilon$ —алдын ала берілген оң құнарсыз аз сан болсын.

Енді мәселені былай қоялық:

$[a, b]$ аралығындағы барлық $x$-тер үшін төмендегі шартты

$$|f\ (x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

қанағаттандыратын, $f\ (x)$-тен гөрі жабайырақ басқа бір $\varphi(x)$ функциясын табуға бола ма?

Егер мұндай функцияны табуға мүмкін болса, онда функция $\varphi(x)$, $f\ (x)$ функцияның дәлдігі $\varepsilon$-ге дейін жуық мәнін береді. Кейбір жағдайда функция $\varphi(x)$ функция $f\ (x)$-тің тек жуық мәнін ғана беріп қоймайды, $\varphi(x)$-тің қасиеті бойынша $f\ (x)$-тің қасиетін білуге болады.

Берілген $f\ (x)$ функциясын, $[a, b]$ аралығында $n$ дәрежелі көпмүшемен де кескіндеуге болады. Мұндай полином (көпмүше) үшін, $[a, b]$ аралығының алдын ала берілген нүктелерінде $f\ (x)$ функциясымен дәлме-дәл келетін полиномды алуға болады. Мұндай полиномның коэффициенттерінің саны $n + 1$, сондықтан оны табу үшін, оның мәндерін $[a, b]$ аралығының $n + 1$ нүктелерінде беру керек.

Сонымен, бұл жөніндегі есепті мына түрде қоюға болады: берілген функция $f\ (x)$ үшін $[a, b]$ аралығының мына нүктелерінде $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ мынадай мәндерді

$$y_0 = f\ (x_0),\ \ y_1 = f\ (x_1),\ \ \ .\ .\ .\ .\ \ \ ,\ \ \ \ \ \ y_n, = f\ (x_n)$$
қабылдайтындай, дәрежесі $n$-нен жоғары емес полином $P\ (x)$-ті табу керек.

Мұндай есепті *интерполяциялау есебі* деп атайды. Интерполяциялау полиномын мына түрде алуға болады:

$$P\ (x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ .\ .\ .\ (x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ .\ .\ .\ (x_0-x_n)} f\ (x_0) +$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ .\ .\ .\ (x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ .\ .\ .\ (x_1-x_n)} f\ (x_1) + .\ .\ . +$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ .\ .\ .(x-x_n-1)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ .\ .\ .(x_n-x_{n-1})} f\ (x_n).$$

Бұл полиномды *Лагранждың интерполяциялау полиномы* деп атайды.

Лагранждың интерполяциялық формуласына бір мысал келтірейік:

$x = 1$ болғанда 5-ке тең, $x = 2$ болғанда 13-ке тең және $x = 5$ болғанда 17-ге тең мәндерді қабылдайтын екі дәрежелі көпмүшені табу керек.

$n = 2$, Лагранж формуласы бойынша

$$y = P(x) = 5 \cdot \frac{(x-2)(x-5)}{(1-2)(1-5)} + 13\frac{(x-1)(x-5)}{(2-1)(2-5)} +$$
$$+17\frac{(x-1)(x-2)}{(5-1)(5-2)} = -\frac{5}{3}x^2 + 13x - \frac{19}{3}.$$

## § 2. Анықталған интегралдарды жуықтап есептеу жолдары

**1.** Механика, физика және техниканың көп мәселелері дәл мәнін табу мүмкін емес анықталған интегралдарға келтіріледі. Мұндай интегралдарды есептеп шығару үшін жуық формулаларды жасауға тура келеді. Бұл формулалардың саны өте көп. Бірен-сараны ғана болмаса, олардың бәрін бірдей көрсету мүмкін емес.

Мына

$$\int_a^b f\ (x)\ dx$$

анықталған интегралдың мәнін табу керек, мұнда $f\ (x) - [a, b]$ аралығында берілген үздіксіз функция. Егер интеграл астында тұрған функцияның алғашқы функциясы белгілі болса, онда Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша бұл интегралдың дәл мәнін тапқан болар едік. Бірақ тәжірибелік есептерде кездесетін көп интегралды көрсетілген формула негізінде есептеп шығару мүмкін емес, өйткені алғашқы функциялары элементар функциялар арқылы өрнектелетін интегралдардың саны тіпті шамалы. Сондықтан, көбінесе анықталған интегралдардың жуық мәнін іздейді. Мұның бірнеше жолдары бар. Олардың біреуі мынау: $[a, b]$ аралығын бірдей етіп $n$ бөлшек сегменттерге бөлейік, сонда $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$ және интегралдық қосынды мына түрде болған болар еді:

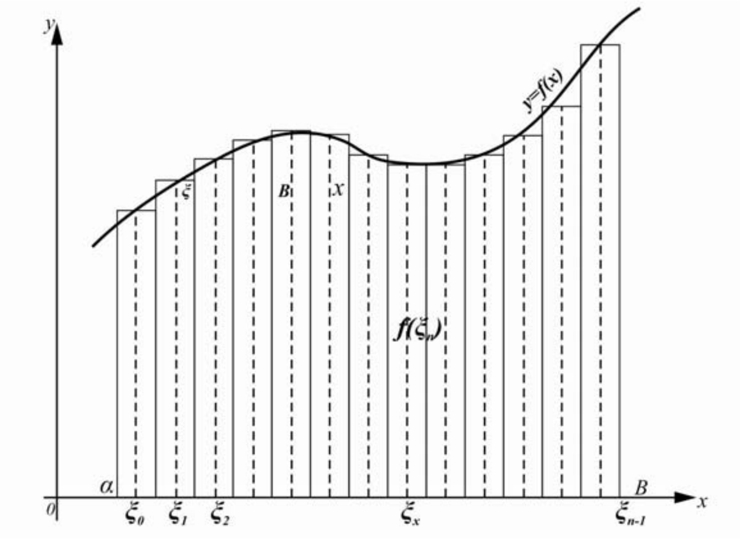
$$\sigma = \frac{b-a}{n}[f\ (\xi_0) + f\ (\xi_1) + \ldots + f\ (\xi_{n-1})].$$

Сонда анықталған интегралдың жуық мәні

$$\int_a^b f\ (x)\, d\, x \approx \frac{b-a}{n}[f\ (\xi_0) + f\ (\xi_1) + \ldots + f\ (\xi_{n-1})]. \qquad (1)$$

болады.

(1) формуланың геометриялық мағынасы айқын (74-чертеж).



74-чертеж

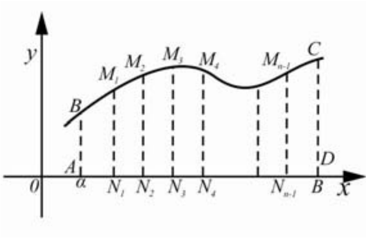
(1) Формуланы *тік төртбұрыштар формуласы* деп атайды.

Тәжірибе жүзінде $\xi_i$-ді мынаған теңеп $\xi_i = \frac{x_i+x_{i+1}}{2} = x_i + \frac{1}{2}$ алады.

**2.** Анықталған интегралдың мәнін табу, геометрия тілімен айтқанда, жоғарғы жағынан $f\,(x)$ функцияның графигімен, төменгі жағынан $[a, b]$ кесіндісімен, бүйір жақтарынан $x = a$ және $x = b$ түзулермен қоршалған фигураның ауданын табу деген мәселе екенін біз жоғарыда жеткілікті түрде айттық.

Мұндай фигураның ауданын табудың бір жолы мынау:

$[a, b]$ аралығын бірдей етіп бірнеше бөлшек сегменттерге бөлеміз. Бөлу нүктелері $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1},\ \ x_n = b$ болсын.



75-чертеж

Осы бөлу нүктелері арқылы қисықтың өзімен түйіскенше ординаталар жүргіземіз де, сонан соң олардың ұштарын бір-бірімен қосамыз. Сонда қисыққа іштей сызылған сынық сызық келіп шығады (75-чертеж).

Бастапқы айтылған фигура ауданының орнына, сынық сызықпен қоршалған фигураның ауданын алады. Ал бұл кейінгі фигураның ауданын алады. Ал бұл кейінгі фигураның ауданы *n* трапециялардың аудандарының қосындысына тең. Трапециялардың аудандарының қосындысы

$$\frac{1}{2}(y_0 + y_1)h + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)h + \ .\ .\ . +$$

$$+\frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h = \left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ .\ .\ . + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)h,$$

болады, мұнда $h = \frac{b-a}{n}$.

Сонымен, іздеп отырған анықталған интегралдың жуық мәні мына төмендегідей болады:

$$\int_a^b f\,(x)d\,x \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ .\ .\ . + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}f\,(x_0) + f\,(x_1) + f\,(x_2) + \ .\ .\ . + f\,(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right]. \quad (2)$$

Бұл формуланы *трапециялар формуласы* деп атайды.

Осы формула арқылы кез келген анықталған интегралдың жуық мәнін интеграл ішінде тұрған функцияның дербес мәндері бойынша табуға болады.

Мұнда бір айта кететін мәселе мынау: неғұрлым *n* саны көп болған сайын, соғұрлым интегралдың мәні дәлірек болады.

**3.** Енді алғашқыда айтылған фигураның ауданын табу үшін, әрбір ординаталар ұштарының арасындағы қисықтың доғасын, осі *y* осіне параллель парабола доғасымен ауыстырамыз.

Осьтердің бағытын өзгертпей, координаталардың бас нүктесін *a* нүктесіне көшірейік.

Осі *y* осіне параллель айтып отырған параболаның теңдеуі мына түрде болсын:

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2. \qquad (3)$$

Осы парабола *B,* $M_1$ және $M_2$ нүктелер арқылы өтетін болсын, бұл параболамен $BM_2$ доғасын ауыстырамыз. Парабола *B,* $M_1$ және $M_2$ нүктелер арқылы өту үшін, коэффициенттер $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1$ және $\mathrm{A}_2$ қандай болу керек, соны табуымыз керек. Жаңағы айтылған нүктелердің координаталары (3) парабола теңдеуін қанағаттандыруы керек, сондықтан:

$$\begin{aligned} y_0 &= A_0, \\ y_1 &= A_0 + A_1h + A_2h^2, \\ y_2 &= A_0 + 2A_1h + 4A_2h^2. \end{aligned} \qquad (4)$$

(3) параболамен, *x* осімен және OB, $N_2\, M_2$ ординаталармен қоршалынған фигураның ауданы

$$\int_0^{2h} y\, d\, x = \int_0^{2h} (A_0 + A_1x + A_2x^2)\, d\, x = 2A_0h + 2A_1h^2 +$$

$$+ \frac{8A_2h^3}{3} = \frac{h}{3}(6A_0 + 6A_1h + 8A_2h)^2$$

болады.

Егер (4) теңдеулерді еске алсақ, онда

$$\int_0^{2h} y\, d\, x = (y_0 + 4y_1 + y^2)\frac{h}{3}. \qquad (5)$$

$[a, b]$ аралығын бөлшек сегменттерге бөлу саны $n = 2m$ жұп болсын.

Жаңағы көрсетілген жолмен келесі $N_2\, M_2\, M_4\, N_4$ фигураның ауданын табамыз:

$$N_2\, M_2\, M_4\, N_{4\text{ауд}} = (y_2 + 4y_3 + y_4)\frac{h}{3} \qquad (6)$$

Міне, осылай етіп әрі қарай соза береміз. Сонда іздеп отырған фигураның ауданының жуық мәні мынау:

$$\int_a^b f\ (x)\ d\ x \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ . \ . \ . + 4y_{2m-1} +$$

$$+y_{2m}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{2n} [f\ (x_0) + 4f(x_1) + 2f\ (x_2) + \ . \ . \ . +$$

$$+4\ f\ (x_{2n-1}) + f\ (x_{2n})] \qquad (7)$$

Бұл формуланы *Симпсон формуласы* деп атайды.

Симпсон формуласы, бұдан бұрынғы формулаларға қарағанда, дәлірек нәтиже береді.

**4.** Енді Лагранждың интеполяциялық полиномын пайдаланып, анықталған интегралдардың жуық мәнін табуға болады, соған біраз тоқтап кетейік.

Айталық, бізге мына анықталған интеграл

$$\int_a^b f\ (x)\ dx$$

берілсін. Осы интегралдағы айнымалыны былай ауыстырсақ:

$$x = a + (b - a)t,$$

онда

$$\int_a^b f\ (x)\ d\ x = (b-a)\int_0^1 f\ [a + (b-a)t]dt.$$

Бастапқы берілген анықталған интегралды осылай түрлендіру, – координаталардың бас нүктесін $a$ нүктесіне көшірумен парапар.

$[a, b]$ аралығын бірдей етіп $n$ бөлшек сегменттерге бөлейік. Сонда бөлу нүктелерінің абсциссалары мынадай болады:

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,$$

$$x_2 = a + 2h, . \ . \ . \ ,\ x_{n-1} = a + (n-1)h,\ x_n = b$$

ал бұларға сәйкесті t-нің мәндері:

$$t_0 = 0, \qquad t_1 = \frac{1}{n},\ t_2 = \frac{2}{n}, \quad . \ . \ . \quad ,\ t_{n-1} = \frac{n-1}{n},\ t_n = 1.$$

$f\ (x)$ функция графигінің жоғарыдағы нүктелерге сәйкес келетін ординаталары:

$$y_0 = f\ (x_0), y_1 = f\ (x_1), . \ . \ . \ , y_{n-1} = f(x_{n-1}), y_n = f(x_n).$$

Енді $y = f(x)$ қисықтың орнына мына төмендегі теңдеумен

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ . \ . \ . + A_nx^n$$

кескінделетін және берілген қисықтың жоғарыда көрсетілген $n+1$ нүктесі арқылы өтетін қисықты аламыз.

Лагранж формуласы бойынша:

$$y = y_0 \frac{\left(t-\frac{1}{n}\right)\left(t-\frac{2}{n}\right)\ldots(t-1)}{\left(0-\frac{1}{n}\right)\left(0-\frac{2}{n}\right)\ldots(0-1)} +$$

$$+y_1 \frac{(t-0)\left(t-\frac{}{n}\right)\ldots(t-1)}{\left(\frac{1}{n}-0\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(\frac{1}{n}-1\right)} + \ldots +$$

$$+y_n \frac{(t-0)\left(t-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(t-\frac{n-1}{n}\right)}{(1-0)\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}. \qquad (5)$$

$y = f(x)$ қисықпен қоршалынған ауданның орнына, (5) қисықпен қоршалған ауданды алсақ, сонда

$$\int_a^b f\,(x)\,d\,x \approx (b-a)\int_0^1 y\,d\,t$$

Немесе

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left[\, y_0 \frac{\int_0^1 \left(t-\frac{1}{n}\right)\left(t-\frac{2}{n}\right)\ldots(t-1)dt}{\left(0-\frac{1}{n}\right)\left(0-\frac{2}{n}\right)\ldots(0-1)} + \right.$$

$$+ y_1 \frac{\int_0^1 (t-0)\left(t-\frac{2}{n}\right)\ldots(t-1)\;dt}{\left(\frac{1}{n}-0\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(\frac{1}{n}-1\right)} + \ldots +$$

$$\left. + y_n \frac{\int_0^1 (t-0)\left(t-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(t-\frac{n-1}{n}\right)dt}{(1-0)\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}\right] =$$

$$= (b-a)[c_{n^0}y_0 + c_{n^1}y_1 + \ldots + c_{n^n}y_n], \qquad (6)$$

мұнда

$$C_{n^i} \frac{\int_0^1 (t-0)\left(t-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(t-\frac{i+1}{n}\right)\ldots(t-1)dt}{\left(\frac{i}{n}-0\right)\left(\frac{i}{n}-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(\frac{i}{n}-\frac{i+1}{n}\right)\ldots\left(\frac{i}{n}-1\right)}.$$

(6) формуланы *Котес формуласы* деп атайды.

$n$-нің түрлі мәндері үшін C – коэффициенттерін тауып көрейік.

Айталық, $n = 1$ болсын. Онда, қисықты түзумен ауыстырамыз және

$$C_{1^0} = \frac{\int_0^1 (t-1)\,dt}{0-1} = \frac{1}{2}; \qquad C_{1^1} = \frac{\int_0^1 t\,dt}{1-0} = \frac{1}{2};$$

(6) формула бойынша

$$\int_a^b f\,(x)\,d\,x \;\approx (b-a)\frac{y_0 + y_1}{2}.$$

Енді $n = 2$ болсын, онда берілген қисықты екінші дәрежелі параболамен ауыстырамыз, және

$$C_{2^0} = \frac{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}(t-1)\,dt\right)}{\left(0-\frac{1}{2}\right)(0-1)} = \frac{1}{6},$$

$$C_{2^1} = \frac{\int_0^1 (t-0)\,(t-1)\,dt}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)} = \frac{2}{3},$$

$$C_{2^2} = \frac{\int_0^1 (t-0)\left(t-\frac{1}{2}\right)dt}{(1-0)\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{6}.$$

(6) Формула бойынша

$$\int_a^b f(x)d\,x \approx \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

мұнымыз – Симпсон формуласы.

Жоғарыда келтірілген, анықталған интегралдарды жуықтап интегралдау формулаларын қолданғанда біз сөзсіз қате жібереміз. Осы жіберілген қатенің мөлшерін табу – өте күрделі мәселелердің бірі. Бұл қателердің қорытып шығарылуына тоқтамай, тек олардың дайын өрнектерін ғана берейік[1].

Егер мына

$$\int_a^b f(x)d\,x$$

анықталған интегралға трапециялар формуласын қолдансақ, онда қате төмендегі өрнекпен беріледі:

$$\delta = -\frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}\cdot f''(\xi), \tag{7}$$

мұнда $a < \xi < b$.

Симпсон формуласы үшін, қате мына формуламен өрнектеледі:

$$\delta = -\frac{1}{45}\frac{(b-a)^5}{2}\cdot\frac{f^{IV}(\xi)}{n^4}; \tag{8}$$

мұнда $a < \xi < b, [a, b]$ аралығын бөлу саны $2n$-ге тең.

(7) және (8) формулаларды $f''(\xi)$ және $f^{IV}(\xi)$ туындылардың болуы, бұл формулалармен тәжірибе жүзінде пайдалануды қиындатып жібереді. Егер функция $f(x)$ аналитикалық тәсілмен берілмей, графиктік тәсілмен чертеж арқылы берілсе, – онда бұл формулалармен тіпті пайдалануға болмайды.

Енді бір есте болатын мәселе мынау: егер функция $f(x)$ аналитикалық тәсілмен берілсе және мына анықталған интегралдың

$$\int_a^b f(x)dx$$

жуық мәнін табу керек болса, онда ең алдымен $f(x)$ функцияның, $[a, b]$ аралығындағы өзгеру қасиетімен танысу керек. Осы аралықта функция өзінің таңбасын өзгерте ме, егер өзгертсе, $x$-тің қандай мәндерінде нольге айналады, бұл функцияның максимум және минимумдары бар ма, егер бар болса, $x$-тің қандай мәндерінде бар, міне, осының бәрін білу анықталған интегралдың жуық мәнін табуға жеңілдік жасайды.

---

[1] Қателердің қалай қорытылып шығатынын оқушылар мына кітаптан табады: Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II, Гостехиздат, М.-Л., 1948 стр. 185.

### *Жаттығулар*

Тік төртбұрыштар мен трапециялар формулаларын қолданып төменгі интегралдың жуық мәнін табу керек:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Симпсон формуласы бойынша мына интегралдың жуық мәнін, дәлдігін 0,001-ге дейін жеткізіп табу керек:

2. $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, d\, x$.

4. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$.

# X ТАРАУ
# МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАР

## § 1. Шектері шексіз интегралдар

1. Біздің осы уақытқа дейін қарастырған интегралдарымыздың интегралдау аралығы шектеулі сандар болды.

Енді интегралдау аралығы шексіз болсын. Міне, осы жағдайды қарайық.

Айталық, функция $f(x)$, $(a,\infty)$ аралығында анықталған және осы аралықтың кез келген бөлігі $(a,l)$ аралығында интегралданатын болсын. Сонымен, біз келесі интегралды

$$I=\int_a^l f(x)\, d\, x \ \ (l>a)$$

қараймыз.

Егер $l$-дің шексіз өсуімен бірге, осы қарастырып отырған интеграл бір тиянақты шекке ұмтылса, онда $f(x)$ функциясын $a$-дан $\infty$-ке дейін интегралданатын функция деп атайды. Сөйтіп, анықтауымыз бойынша

$$\int_{a}^{\infty} f(x)d\,x = \lim_{l\to\infty}\int_{a}^{l} f(x)d\,x. \qquad (1)$$

Егер (1) теңдіктің оң жағында тұрған шек бар болатын болса, онда мына интегралды

$$\int_{a}^{\infty} f(x)d\,x.$$

жинақты интеграл деп атайды.

Егер $l$ шексіздікке ұмтылғанда интеграл $I$ ешбір тиянақты шекке ұмтылмаса немесе абсолют шамасы бойынша шексіз өссе, онда мына интегралдың

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

мағынасы болмайды және бұл жағдайда интегралды *жинақсыз интеграл* деп атайды.

Мына төмендегі интегралдар да

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)d\,x \quad \text{және} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\,x$$

жоғарыдағыша анықталады. Бұл екі интегралдың кейінгісін былай анықтауға да болады:

$$\lim_{\substack{l_1\to\infty \\ l_2+\infty}}\int_{l_1}^{l_2} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Алғашқы $F(x)$ функциясы бар, $f(x)$ функциясы үшін интеграл

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

кәдімгі анықталған интеграл қалай есептелініп шығарылса, ол да солай шығарылады, яғни

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{\infty} = F(\infty) - F(a), \qquad (2)$$

мұнда

$$F(\infty) = \lim_{l\to\infty} F(l).$$

Шынында, анықтама бойынша

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{l\to\infty}\int_a^l f(x)dx = \lim_{l\to\infty}[F(l) - F(a)] =$$

$$= \lim_{l\to\infty} F(l) - F(a) = F(x)\Big|_a^\infty.$$

1-мысал. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = arc\ tg\ x\Big|_a^\infty = \frac{\pi}{2}.$

2-мысал. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1.$

3-мысал. $\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx.$

$$\lim\int_1^l \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx \geq \lim\int_1^l \frac{dx}{x} = \lim_{l\to\infty} lnl = \infty$$

Сөйтіп, интеграл

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx$$

жинақсыз.

Шексіз аралықта анықталған немесе шекті аралықтың кейбір нүктелерінде берілген функция шексіздікке айналатын интегралдар меншіксіз интегралдар деп аталады.

Меншіксіз интегралдарға келтірілетін физиканың кейбір мәселелерін қарайық.

4-мысал. Координаталардың бас нүктесінде массасы $m$-ге тең бір материалды нүкте болсын, осы нүкте $X$ осінде жатқан, массасы 1-ге тең екінші бір материалды $M$ нүктені өзіне тартсын. Егер осы екі нүктенің бір-бірінен қашықтығы х болса, онда Ньютон заңы бойынша тарту күші F

$$F = \frac{m}{x^2}$$

болады.

Егер *M* нүктесі *X* осінің бойымен $x = r$-ден шексіздікке дейін қозғалса, онда $F$ күшінің өндіретін жұмысы қандай болады?

Біріншіден $F$ күшінің өндіретін жұмысы теріс таңбалы болады, өйткені күш қозғалысқа қарсы бағытталған.

Екіншіден күштің өндіретін жұмысын қандай формуламен табуды біз білеміз (I тарау, § 1, 4 п. қараңыз). Міне, сол формуланы осы есепке қолданып, мынаны табамыз:

$$T = -\int_{r}^{\infty} \frac{m}{x^2} dx = \frac{m}{x} \Big|_{r}^{\infty} = -\frac{m}{r}.$$

Егер M нүктесі, керісінше шексіздіктен $x = r$-ге дейін жылжитын болса, онда ньютондық тарту күші $F$ оң таңбалы $T = \frac{m}{r}$ жұмыс жүргізген болар еді. Осы шаманы физикада немесе механикада қарастырып отырған күштің *M* нүктесіндегі потенциалы деп атайды. Бұл шама нүктеде жиналған (қорланған) потенциал энергияның өлшеуі болып табылады.

5-мысал. Газ $v_1$ көлемін $v_2$ көлемге дейін ұлғайғанда, оның өндіретін жұмысын төмендегі формула

$$T = \int_{v_1}^{v_2} p\, d\, v$$

арқылы табуға болады.

Көлемі $v_1$ қысымы $p_1$ идеал газ массасы берілсін. Газ шексіздікке дейін ұлғаятын болсын. Процесті адиабаттық процесс деп есептейміз, былайша айтқанда, қоршап тұрған ортамен жылылық ауысуы жоқ. Бұл жағдайда көлем мен қысымның арасындағы тәуелділік төмендегі Пуассон формуласымен беріледі:

$$pv^k = c,$$

мұнда

$$k = \frac{c_p}{c_v} > 1.$$

Осындай ұлғаюдағы газдың өндіретін жұмысы

$$T = \int_{v_1}^{\infty} cv^{k-1} dv = \frac{c}{1-k} \cdot \frac{1}{v^{k-1}} \Big|_{v_1}^{\infty} = \frac{c}{k-1} \frac{1}{{v_1}^{k-1}}$$

болады.

Ал $c = p_1 {v_1}^k$, олай болса,

$$T = \frac{p_1 v_1}{k-1}.$$

6-мысал. Түзу сызықты электр тогының магниттік полюске әсер ететін күші, келесі формуламен

$$F = \int_{s_1}^{s_2} \frac{aIds}{(a^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}$$

анықталатыны физикадан белгілі.

Екі жағына бірдей шексіз өткізгішті қарайық. Онда

$s_1 = -\infty, \qquad s_2 = +\infty,$ ал

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{aIds}{(a^2+s^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{I}{a} \cdot \frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2\,I}{a}.$$

Өткізгіш шексіз болу тәжірибеде кездесетін жағдай емес, бірақ өткізгіш өте ұзын болса, жаңағы шыққан формуланы қолданған дұрыс.

Егер мына интегралдар

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \text{ және } \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

жинақты болса, онда мына интеграл да

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

жинақты болады және

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx. \qquad (3)$$

Меншіксіз интегралдардың келесі қасиеттерін айтып кетейік:

$$1) \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx; \qquad (4)$$

2) егер $f \geq 0,$ онда $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \geq 0;$

$$3) \int_{a}^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_{a}^{\infty} f(x)dx \pm \int_{a}^{\infty} g(x)dx.$$

4) Егер $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ бар болатын болса, онда

$$\lim_{l\to\infty}\int\limits_l^{\infty} f(x)dx = 0$$

2. Алғашқы функцияны білмей-ақ меншіксіз интегралдардың жинақтылығы туралы біраз белгілерді келтіруге болады.

Одан бұрын біз бір көмекші теоремаға тоқтап кетейік.

**Лемма.** *Айнымалы* $x$ *мына* $+\infty$ =*-ке ұмтылғанда функция* $F(x)$ *бір тиянақты шекке ұмтылу үшін* $p$ *мен* $q$ *сандары бір-біріне тәуелсіз шексіздікке ұмтылғанда мына* $F(p)-F(q)$ *айырманың нольге ұмтылуы қажетті және жеткілікті.*

Бұл лемманы екінші түрде былай тұжырымдауға болады:

Функция $F(x)$ бір тиянақты шекке ұмтылу үшін алдын ала берілген оң мейлінше аз $\varepsilon$ санына сәйкес *N* саны табылып, осы *N* санынан артық p және q сандары (*p, q*≥ *N)* үшін келесі теңсіздіктің:

$$|F(p)-F(q)| < \varepsilon \tag{5}$$

орындалуы қажетті және жеткілікті.

Алдымен леммадағы айтылған шарттың қажеттілігін дәлелдейік. Ол үшін аргумент $x$ мына $+\infty$ =-ке ұмтылғанда, функция $F(x)$ тиянақты $L$ санына ұмтылады деп ұйғарайық, яғни

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = L,$$

немесе бәрібір, алдын ала берілген оң $\varepsilon$ санына сәйкес *N* саны табылып, осы *N*-нен артық барлық $x$-тер үшін келесі теңсіздік орындалады

$$|F(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Айталық, $p$ және $q$ мына *N* санынан артық кез келген сандар болсын, онда кейінгі теңсіздік бойынша:

$$|F(p)-L| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6}$$
$$|F(q)-L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Келесі теңбе-теңдікті құрайық:

$$F(p)-F(q) = F(p)-L+L-F(q).$$

Бұл арадан

$$|F(p)-F(q)| \leq |F(p)-L| + |L-F(q)|.$$

(6) теңсіздіктерді еске алсақ,

$$|F(p) - F(q)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Сонымен, (5) теңсіздік келіп шықты, былайша айтқанда, леммадағы шарттың қажеттілігі дәлелденді.

Енді бұл шарттың жеткіліктілігін дәлелдейік. Ол үшін келесі

$$F(a), \quad F(a+1), \quad F(a+2), \ \ . \ . \ . \quad , \quad F(a+n), \ \ . \ . \ . \tag{7}$$

тізбекті қарастырайық (мұнда $n$ – оң бүтін сан) және мұнымен бірге (5) теңсіздік орындалады деп есептейік. Сол себептен егер $a$+$n$ мына $N$ санынан артық болса, яғни $a$+$n$≥$N$, онда кез келген оң бүтін $k$ саны үшін төмендегі теңсіздік

$$|F(a+n+k) - F(a+n)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8}$$

орындалады. Ендеше (7) тізбек үшін Коши критерийі орындалатын болды.

Демек,

$$\lim_{n\to\infty} F(a+n) = L. \tag{9}$$

Мынадай $x \geq a + n > x - 1$ теңсіздікті қанағаттандыратын кез келген $x$-ті және оң бүтін $n$ санын қарастырайық та, олардың осы мәндері үшін келесі

$$F(x) - L = F(x) - F(a+n) + F(a+n) - L \tag{10}$$

теңбе-теңдікті құрайық.

Егер айнымалы $x$ шексіз өссе, онда $a + n$ де шексіз өседі және (8) теңсіздік, (9) теңдік бойынша (10) теңдіктің оң жағындағы екі айырма нольге ұмтылады. Олай болса,

$$\lim_{x\to\infty}[F(x) - L] = 0$$

немесе

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = L.$$

Дәл осы сияқты етіп келесі салдарды дәлелдеуге болады:

Егер айнымалы $x$ өзінен кіші $a$ санына ұмтылғанда функция $F(x)$ бір тиянақты шекке ұмтылу үшін, p мен q сандары өздерінен кіші a санына бір-біріне тәуелсіз ұмтылғанда мына $F(p) - F(q)$ айырманың нольге ұмтылуы қажетті және жеткілікті.

Енді мәселе мына функция

$$I(l) = \int_a^l f(x)dx \quad (l > a)$$

аргумент $l$ шексіздікке ұмтылғанда тиянақты шекке ұмтыла ма, міне, соны білуде. Жоғарыда атылған лемма бойыша бұл функцияның тиянақты шегі болу үшін төмендегі

$$I(p) - I(q) = \int_a^p f(x)dx - \int_a^q f(x)dx = \int_q^p f(x)dx$$

айырманың, р мен q бір-біріне тәуелсіз шексіздікке ұмтылғанда нольге ұмтылуы қажетті және жеткілікті. Осы тұжырымдалған теореманы

$$\int_q^\infty f(x)dx$$

меншіксіз интегралдың жинақтылығының белгісі немесе критерийі дейді.

**Теорема.** *Егер мына*

$$\int_a^\infty |f(x)|dx$$

*меншіксіз интеграл жинақты болса, онда мына*

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

*меншіксіз интеграл да жинақты болады. Керісінше қорытынды кейде дұрыс болмайды.*

Бұл теореманы дәлелдеу қиын емес. Шынында, егер $p$ саны $q$-ден артық болса, онда анықталған интегралдың қасиеті бойынша

$$\left|\int_q^p f(x)dx\right| \le \int_q^p |f(x)|dx.$$

Меншіксіз интеграл

$$\int_a^\infty |f(x)|dx$$

жинақты болғандықтан, кейінгі теңсіздіктің сол жағы жинақтылық белгісі бойынша нольге ұмтылды. Олай болса, бұл теңсіздіктің сол жағы да нольге ұмтылады. Демек, меншіксіз интеграл

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

жинақты. Интеграл

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

жинақты болғанымен, абсолют жинақты болмауы мүмкін деп біз жоғарыда айттық. Міне, осы жағдайды көрсету үшін төмендегі мысалды қарастырайық.

Мысал.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Егер *x* шектеусіз өссе, онда *sinx* біресе оң, біресе теріс мәндерді қабылдайды.

Алдымен осы интегралдың жинақтылығын дәлелдейік.

Егер мына интегралды

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{l} \frac{\sin x}{x} dx$$

бөлімшелеп интегралдасақ, онда төмендегі нәтижеге келеміз:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{l} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos l}{l} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{l} \frac{\cos x}{x^2} dx,$$

бұл арадан шекке көшсек,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx. \tag{11}$$

(11) теңдіктің оң жағында тұрған интеграл абсолют жинақты өйткені

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{l} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx < \int_{\frac{\pi}{2}}^{l} \frac{d\,x}{x^2} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{l} < \frac{2}{\pi}.$$

$l$-дің өсуімен бірге бұл теңсіздіктің сол жағы да өседі; бірақ қаншама өскенімен $\frac{\pi}{2}$ санынан асып кетпейді; олай болса, мына интегралдың

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{l} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$$

тиянақты шегі бар:

$$\lim \int_{\frac{\pi}{2}}^{l} \frac{|\cos x|}{x^2} dx,$$

яғни меншіксіз интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

абсолют жинақты. Сондықтан да қарастырып отырған интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{sin\, x}{x}$$

жинақты.

Енді осы интегралдың абсолют жинақты емес екенін дәлелдеу керек. Ол үшін мына

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|sin\, x|}{x^2} dx$$

меншіксіз интегралдың жинақсыз екенін дәлелдеу керек.

$$(2n+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

Мынадай интегралды

$$\int_{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

қарайық:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x|}{x}dx > \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x|}{x}dx + \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x|}{x}dx + \ldots +$$

$$+ \int\limits_{\frac{(2n+1)\pi}{2}}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x|}{x}dx.$$

Бұл арадан

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x|}{x}dx > \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}} + \ldots +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(2n+1)\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{4n+3}\right) >$$

$$> \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{4n+4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right).$$

Егер $n$ шексіздікке ұмтылса, кейінгі теңсіздіктің оң жағы шексіз өседі (оны біз келешекте көреміз), олай болса, теңсіздіктің сол жағы да шексіз өседі. Сонымен,

$$\lim_{l\to\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{l} \frac{|\sin x|}{x}dx = \infty.$$

Интеграл

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx$$

жинақсыз.

## § 2. Меншіксіз интегралдардың жинақтылық белгілері

1. Егер біз функцияны шексіз $(a,\infty)$ интервалда қарайтын болсақ, онда ол функцияны бұл интервалдың кез келген $[a,l]$ шекті бөлігінде интегралданады деп ұйғарамыз. Мәселе интегралдың шексіз $(a,\infty)$ аралықта болу-болмауында.

**1-теорема.** *$f(x)$ және $\varphi(x)$ мына $x \geq a$ теңсіздікті қанағаттандыратын x-тің барлық мәндері үшін анықталған және $f(x) \leq \varphi(x)$ теңсіздікті қанағаттандыратын оң таңбалы функциялар болсын; сонда мына интегралдың*

$$\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$$

*жинақтылығынан мына*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

*интегралдың жинақтылығы туады немесе бәрібір мына интегралдың*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

*жинақсыздығы келіп шығады.*

Бұл теореманы дәлелдеу оп-оңай:

$$I(l) = \int_a f(x)dx \leq \int_a \varphi(x)dx \leq \int_a^{\infty} \varphi(x)dx.$$

$l$-дің шексіз өсуімен байланысты функция $I(l)$ өседі, бірақ қаншама өскенімен тұрақты

$$\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$$

санынан асып кетпейді. Олай болса, $l$ шексіздікке ұмтылғанда, функция $I(l)$ бір тиянақты шекке ұмтылады, бұл жағдай мына интегралдың

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

жинақтылығын көрсетеді.

Дәлелденген теоремадан мына салдар шығады:

Егер $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = c$ $(0 < 1 \leq +\infty)$, онда мына интеграл

$$\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$$

жинақты болса, мына интеграл да

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

жинақты болады, ал бірінші интеграл жинақсыз болса, онда екінші интеграл да жинақсыз болады.

Шынында, егер $\varphi(x)$ – интегралданатын және $c < +\infty$ болса, онда қандай болмасын $\varepsilon > 0$ $x$-тің аса үлкен мәндері үшін салдардың шыртынан $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ немесе $f(x) < (c+\varepsilon)\varphi(x)$ шығады.

Бұл арадан жаңағы мұның алдында болған теореманың шарттарын қанағаттандыратын функциялар $f(x)$ және $(c+\varepsilon)\varphi(x)$ келіп шығатын болды.

Енді мына функцияны $\frac{1}{x^{\alpha}}$ қарайық. Дәреже көрсеткіш $\alpha$-ны оң деп есептейміз. Мәселен, мынада $\alpha$-ның қандай мәндерінде меншіксіз интеграл

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{dx}{x^{a}} \quad (a > 0)$$

жинақты болады?

$\alpha \neq 1$ деп ұйғарамыз да, төмендегі интегралды есептеп шығарамыз:

$$\int_{a}^{l} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_{a}^{l} = \frac{1}{1-\alpha}(l^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}).$$

Бұл жерден былай деп қорытынды жасауға болады: егер $\alpha > 1$ болса, онда зерттеліп отырған интеграл жинақты және оның мәні тең $\frac{1}{1-\alpha} a^{1-\alpha}$, ал егер $\alpha \leq 1$ болса, онда интеграл

$$\int_{a}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

жинақсыз болады.

Енді мына меншіксіз

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

интегралдың жинақтылық белгісіне көшейік.

**2-теорема.** *Айнымалы x-тің аса үлкен мәндері үшін функция* $f(x)$ *мына түрде болсын:*

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^{\alpha}} \quad (\alpha > 0).$$

Онда, егер $\alpha > 1$ және $g(x) \leq c < +\infty$ болса, интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

жинақты болады; егер $\alpha \leq 1$ және $g(x) \geq c > 0$ болса, интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

жинақсыз болады.

Бұл теореманы дәлелдеу үшін бірінші теоремаға сүйенеміз.

**3-теорема.** *Егер x шексіздікке ұмтылғанда, функция $f(x)$ мына $\frac{1}{x}$ функциямен салыстырғанда реті $\alpha$-дей шексіз аз болса, онда*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

*интегралдың жинақтылығы немесе жинақсыздығы $\alpha$ бірден артық па немесе бірден кем бе, я оған тең бе, соған байланысты.*

Бұл теореманы дәлелдеу үшін салдарға сүйенеміз: $\varphi(x)$ функцияның ролін мына функция $\frac{1}{x^{\alpha}}$ атқарады.

Мысал үшін төмендегі екі интегралды

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}dx, \qquad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}} \text{ қарайық.}$$

Егер $x$ шексіздікке ұмтылса, онда интегралдар астында тұрған функциялар нольге ұмтылады, былайша айтқанда, олар шексіз аздар. Бірінші интеграл астындағы функцияның аздық реті $\frac{1}{2}$, екінші интегралдағы функцияның аздық реті 3. Сондықтан бірінші интеграл жинақсыз да, екінші интеграл жинақты.

Енді мынадай интегралды

$$\int_a^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

қарайық, мұнда $P(x)$ – дәреже көрсеткіші $m$-ге тең көпмүше, ал $Q(x) -$ дәреже көрсеткіші $n$-ге тең көпмүше және $n > m$ . Көпмүше

$Q(x)$-тің $(\alpha\ \infty)$ аралығындағы түбірі жоқ деп есептейміз және х-тің аса үлкен мәндері үшін интеграл астындағы функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ таңбасын өзгертпейді деп ұйғарамыз. Сондықтан бұл интегралға жоғарыда айтылған белгіні қолдануға болады. Интеграл астында тұрған функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , айнымалы $x$-тің аса үлкен мәндері үшін, реті $n–m$ шексіз аз боп табылады. Олай болса, ингерал

$$\int_{a}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

егер $n \geq m+2$ болса, жинақты болады, егер $n = m+1$ болса, жинақсыз болады.

2. Егер $(\alpha,\ \infty)$ аралығында $f(x)$ функцияның таңбасы өзгеріп отыратын болса, онда жоғарыда келтірілген белгілерді бірден қолдануға болмайды. Бірақ, дегенмен осы белгілердің көмегімен, мынадай оң таңбалы $[f(x)]$ функциядан, $(\alpha,\ \infty)$ аралығында алынған интегралдың жинақтылығын тағайындауға болады.

Егер $|f(x)|$ – интегралданатын функция болса, онда $f(x)$-те интегралданатын болады. Бұл жағдайда $f(x)$-ті абсолют интегралданатын функция деп атайды.

**4-теорема.** *Егер* $f(x)$, $(\alpha,\ \infty)$ *аралығында абсолют интегралданатын функция болса, ал* $\mathrm{g}(x)$ – *бұл аралықта шектелген функция болса, онда олардың көбейтіндісі* $f(x)\,\mathrm{g}(x)$ – $(\alpha,\ \infty)$ *аралықта абсолют интегралданатын функция болып табылады.*

Бұл теореманы дәлелдеу үшін төмендегі теңсіздікке

$$|f(x)\,\mathrm{g}(x)| \leq M|f(x)|$$

сүйенеміз.

Теоремадан мынадай салдарлар шығады:

*1. Егер айнымалы х-тің аса үлкен мәндері үшін функция* $f(x)$ *келесі теңсіздікті*

$$x^{\alpha}|f(x)| \leq L$$

*қанағаттандырса* ($мұнда\ \alpha > 1, L - бір\ белгілі\ тұрақты\ сан$ ), *онда интеграл*

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

*абсолют жинақты болады.*

*2. Егер* $lim\ x^{\alpha}|f(x)|$ *бір тиянақты санға тең болса (мұнда да* $\alpha > 1$*), онда да интеграл*

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

абсолют жинақты болады.

Егер бұл салдардың шарттары орындалса, онда бірінші салдардың шарттары да орындалғаны.

$f(x)$ пен $\mathrm{g}(x)$ – $(a,\ \infty)$ аралықта анықталған функциялар болсын. Мұнда $f(x)$ жаңағы шексіз аралықтың кез келген $[a, l]$ бөлігінде интегралданатын функция болсын.

**5-теорема.** *Егер мына интеграл*

$$J(l) = \int_{a}^{l} f(x)dx \tag{12}$$

*$l$-дің шектелген функциясын сипаттайтын болса, яғни*

$$|I(l)| = \left|\int_{a}^{l} f(x)dx\right| \leq K, \tag{13}$$

*мұнда К – тұрақты сан, ал* $\mathrm{g}(x)$ *біркелкі және х шексіздікке ұмтылғанда, нольге ұмтылса, онда интеграл*

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{g}(x)dx$$

*жинақты болады.*

Анықталған интегралдың орта мәні жөніндегі екінші теоремаға (Бонне теоремасына) сүйеніп төмендегі теңдікті табамыз:

$$\int_{l}^{l_1} f(x)\,\mathrm{g}(x)dx = \mathrm{g}(l)\int_{l}^{\xi} f(x)dx + \mathrm{g}(l_1)\int_{\xi}^{l_1} f(x)dx, \tag{14}$$

мұнда $l_1 > l > a,\ l \leq \xi \leq l_1$.

Теореманың шарты бойынша

$$\left|\int_{l}^{\xi} f(x)dx\right| = |I(\xi) - I(l)| \leq 2K$$

$$\left|\int_{\xi}^{l_1} f(x)dx\right| \leq 2K.$$

Теореманың шарты бойынша, $x$ шексіздікке ұмтылғанда $\mathrm{g}(x) \to 0$. Сол себептен алдын ала берілген оң құнарсыз аз $\varepsilon$ саны бойынша аса үлкен *N* саны табылып, х-тің мына $x > N$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық мәндері үшін төмендегі теңсіздік

$$|\mathrm{g}(x)| < \frac{\varepsilon}{4\mathrm{K}}$$

орындалады. Осы теңсіздікті және (13) теңсіздікті еске алып, мынаны табамыз:

$$\left|\int_{\xi}^{l_1} f(x)\mathrm{g}(x)dx\right| \leq |\mathrm{g}(l)|\left|\int_{l}^{\xi} f(x)dx\right| +$$

$$+|\mathrm{g}(l_1)|\left|\int_{\xi}^{l_1} f(x)dx\right| < \frac{\xi}{4K}\cdot 2K + \frac{\varepsilon}{4K}\cdot 2K = \varepsilon.$$

Бұл теңсіздіктің орындалуы – меншіксіз

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{g}(x)dx$$

интегралдың жинақты болуының қажетті және жеткілікті шарты.

Бұл теоремадан мынадай салдар туады:

*Егер меншіксіз интеграл*

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

*жинақты болса (абсолют жинақты болмай-ақ), ал біркелкі функция* $\mathrm{g}(x)$ *шектелген болса, яғни*

$$|\mathrm{g}(x)| \leq L \ \ (a \leq x < +\infty)$$

*онда интеграл*

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{g}(x)dx$$

*жинақты болады.*

3. Енді осы келтірілген теоремаларға бірнеше мысалдар келтірейік.

1-мысал.

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^2+k^2}dx. \quad \text{Мұнда } f(x)=\frac{1}{x^2+k^2}-$$

абсолют интегралданатын функция, ал $\mathrm{g}(x)=\sin ax-$ шектелген функция. Олай болса, қарастырып отырған интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^2+k^2}\,dx \text{ жинақты.}$$

2-мысал. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. Мұнда $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Салыстыру үшін $\varphi(x)$-ті мынаған теңеп аламыз:

$$\varphi(x)=\frac{1}{x^{1+\alpha}}(1>\alpha>0).$$

Сонда

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}x^{1+\alpha}=0.$$

Олай болса, бірінші теореманың салдары бойынша интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \text{ жинақты.}$$

3-мысал. $\int_1^\infty \frac{arc\ \mathrm{tg}\,x}{x}dx.$ Мұнда $f(x)=\frac{arc\ \mathrm{tg}\,x}{x}$,

ал $\varphi(x)$ үшін мына функцияны $\frac{1}{x}$ алайық: $\varphi(x)=\frac{1}{x}$.

Сонда $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{arc\ tg\ x}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{\pi}{2}$.

Интеграл

$$\int_1^\infty \varphi(x)dx=\int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

жинақсыз. Олай болса, мына интеграл да

$$\int_1^\infty \frac{arc\ tg\ x}{x}dx$$

жинақсыз болады.

4-мысал. $\int_{a}^{\infty}\frac{f(x)}{x^{\lambda}}dx(\lambda > 0)$. Мұнда $f(x)$ – интегралданатын функция. Бұл интегралда $g(x)$ функциясы үшін мына функцияны $\frac{1}{x^{\lambda}}$ аламыз, яғни $g(x) = \frac{1}{x^{\lambda}} \cdot x$ шексіздікке шексіздікке ұмтылғанда, функция $g(x)$ біркелкі, нольге ұмтылады; олай болса, меншіксіз интеграл

$$\int_{a}^{\infty}\frac{f(x)dx}{x^{\lambda}}$$

жинақты болады. Міне, осының негізінде біз мына интегралдарды

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\lambda}}dx, \quad \int_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{x^{\lambda}}dx$$

жинақты болады деп айта аламыз.

5-мысал.

$$\int_{1}^{\infty}\frac{lnx}{x\sqrt{x^2-1}}dx.$$

Егер $x \to 1$, онда $\frac{lnx}{x\sqrt{x^2+1}} \to 0$.

Енді осы функциямен $\frac{1}{x^{\lambda}}$ функцияның қатынасының шегін алайық, мұнда $1 < \lambda < 2$

$$\lim\frac{x^{\lambda}\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} = 0.$$

Сондықтан интеграл

$$\int_{1}^{\infty}\frac{lnx}{x\sqrt{x^2-1}}dx$$

жинақты.

## § 3. Шектелмеген функциялардан алынған интегралдар

1. Енді $[a,b]$ аралығының екі ұшының бірінде немесе осы аралықтың бойында жатқан немесе бірнеше нүктелерде функция $f(x)$ шексіздікке айналатын жағдайларды қарайық.

Айталық, функция $f(x)$ $[a,b]$ аралығының барлық нүктелерінде үздіксіз болып, бірақ $b$ нүктесінің таяу маңында шексіздікке ұмтылатын болсын. Мұндай функцияның $(a, b)$ аралығында алынған интегралын қалай анықтау керек, енді соған келейік.

$\varepsilon$ —алдын ала берілген оң мейлінше аз сан болсын. $a$-ны $b$-ден кіші деп есептеп, мына $(a, b-\varepsilon)$ аралықты қарастырайық. Бұл аралықта функция $f(x)$ үздіксіз. Сондықтан ол бұл аралықта интегралданатын функция болып табылады.

Егер $F(x)$ – берілген $f(x)$ функцияның алғашқы функциясы болса, онда

$$\int_a^{b-\varepsilon} f\,(x)dx = F(b-\varepsilon) - F(a).$$

$f(x)$ функцияның $[a, b]$ аралығында алынған интегралы деп біз төмендегі шекті

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

айтамыз, әрине, теңдіктің сол жағындағы шек бар болса.

Енді мәселе $\varepsilon$ нольге ұмтылғанда мына

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

өрнек тиянақты шекке ұмтыла ма, міне соны білуде.

Егер осы өрнек бір тиянақты шекке ұмтылса, онда $b$ нүктесінде шектелген $f(x)$ функциядан алынған

$$\int_a^b f(x)dx$$

интегралды жинақты деп атайды, ал интегралдың өзін екінші текті меншіксіз интеграл дейді.

Сонымен, жалпы алғанда келесі функция

$$I(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (15)$$

оның аргументі $\varepsilon$ нольге ұмтылғанда тиянақты шекке ұмтыла ма, жоқ па, міне, соны тағайындайтын белгіні іздеуіміз керек.

Жоғарыда келтірілген лемманың салдарына сүйеніп, $I(\varepsilon)$ функцияның шегі болуының белгісін былай тұжырымдаймыз:

(15) теңдікпен анықталған $I(\varepsilon)$ функцияның тиянақты шегі болу үшін төмендегі

$$I(\varepsilon_1) - I(\varepsilon_2) = \int_{a}^{b-\varepsilon_1} f(x)dx - \int_{a}^{b-\varepsilon_2} f(x)dx = \int_{b-\varepsilon_2}^{b-\varepsilon_1} f(x)dx$$

айырманың $\varepsilon_1$ мен $\varepsilon_2$ бір-біріне тәуелсіз нольге ұмтылғанда, нольге ұмтылуы қажетті және жеткілікті.

2. Енді $[a, b]$ аралығының барлық ішкі нүктелерінде және $x = b$ нүктесінде үздіксіз, ал $x = a$ нүктесінде шексіздікке айналатын $f(x)$ функцияны қарастырайық. Бұл жағдайда функция $f(x)$ мына $(a + \varepsilon,\ b)$ аралығында интегралданатын функция болып табылады (мұнда $\varepsilon$ −кез келген оң мейлінше аз сан).

Егер $f(x)$ функцияның алғашқы функциясы $F(x)$ белгілі болса, онда

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a + \varepsilon).$$

Жоғарыда айтылғандай $f(x)$ функцияның $[a, b]$ аралығында алынған интегралы деп келесі шекті

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

айтады, әрине, бұл теңдіктің сол жағындағы шек бар болатын болса.

Егер кейінгі теңдіктің сол жағындағы шек бар болса, онда $x = a$ нүктесінде шексіздікке айналатын $f(x)$ функциядан алынған мына

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

интегралды жинақты деп атайды.

Қарастырылып отырған екінші текті меншіксіз интегралдың жинақтылық белгісі жоғарыдағыдай мына

$$I_1(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

функцияның шегі болуының белгісіне келіп тіреледі. Атап айтқанда, функция

$$J_1(\varepsilon) = \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

өзінің аргументі $\varepsilon$ нольге ұмтылғанда, бір тиянақты шекке ұмтылу үшін, келесі айырманың

$$J_1(\varepsilon) - I_1(\varepsilon_2) = \int_{a+\varepsilon_1}^{b} f(x)dx - \int_{b}^{a+\varepsilon_2} f(x)dx = \int_{a+\varepsilon_2}^{a+\varepsilon_1} f(x)dx.$$

$\varepsilon_1$ мен $\varepsilon_2$ бір-біріне тәуелсіз нольге ұмтылғанда, нольге ұмтылуы қажетті және жеткілікті.

3. Енді функция $f(x)$, $[a, b]$ аралығының мына $a, c_1, c_2 \dots$, $c_m$, $b$ нүктелерінде шексіздікке айналатын болсын.

Аралықтың бұл нүктелер жоқ басқа бөліктерінде $f(x)$-ті интегралданатын функция деп есептейміз. $d_1, d_2, \dots, d_{m+1}$ қосымша бөлу нүктелерін енгізіп $[a, b]$ аралығын бірнеше бөлшек сегменттерге бөлеміз. Бұл сегменттердің әрқайсысының ұштарының біреуінде функция $f(x)$ шексіздікке айналатын болсын. Сонда екінші текті меншіксіз интеграл былай анықталады:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{d_1} f(x)dx + \int_{d_1}^{c_1} f(x)dx + \int_{d_2}^{c_3} f(x)dx + \dots +$$

$$\int_{d_{m+1}}^{b} f(x)dx.$$

Егер осы теңдіктің оң жағындағы интегралдар бар болатын болса, онда меншіксіз интеграл

$$\int_a^b f(x)dx \text{-та}$$

бар болады.

Жоғарыда айтылған белгіні пайдаланып, келесі теореманы дәлелдеуге болады: егер екінші текті меншіксіз интеграл

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

жинақты болса, онда мына

$$\int_a^b f(x)dx$$

интеграл да жинақты болады, ал, керісінше қорытынды кейде дұрыс болмайды.

Айталық, функция $f(x)$ мына $x = b$ нүктесінде шексіздікке айналатын болсын, ал $\eta -$ алдын ала берілген оң мейлінше аз сан болсын. Осы $\eta$ саны бойынша төмендегі теңсіздік:

$$0 < \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_2 < \delta$$

орындалатындай етіп $\delta$ санын сайлап, алайық. Теореманың шарты бойынша меншіксіз интеграл

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

жинақты, олай болса

$$\left| \int_{b-\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} |f(x)|dx \right| < \eta.$$

Ал екінші жағынан

$$\left| \int_{b-\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{b-\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} |f(x)|dx \right| < \eta.$$

Бұл теңсіздіктің орындалуы мына

$$\int_a^b f(x)dx$$

меншіксіз интегралдың жинақтылығын дәлелдейді.

Егер мына

$$\int_a^l |f(x)|dx$$

меншіксіз интегралдың жинақтылығынан мына

$$\int_a^l f(x)dx$$

интегралдың жинақтылығы келіп шықса, онда кейінгі интегралды абсолют жинақты интеграл дейді.

Екінші текті меншіксіз интегралдарды есептеп шығару жөнінде келесі теореманы дәлелдейік.

**Теорема.** $[a, b\,]$ *аралығының мына нүктелер* $a, c_1, c_2,\ c_m,\ b$ *жоқ әрбір бөлігінде функция* $f(x)$ *шектелген және интегралданатын болса,* $[a, b\,]$ *аралығында үздіксіз* $F(x)$ *функциясы болып және бұл функцияның туындысы* $F'(x)$ *аралықтың жаңағы көрсетілген нүктелерінен басқа нүктелерінің барлығында да* $f(x)$ *функциясының өзіне тең болса, онда Ньютон-Лейбниц формуласы орын алады.*

Бұл теореманы дәлелдеу үшін, алдымен $[a, b\,]$ аралығының бойында жатқан жалғыз $c$ нүктесін қарайық. Бұл $c$ нүктесінің жақын маңында функция $f(x)$ шектелмеген.

Анықтама бойынша

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(c-\varepsilon) - F(a).$$

Ал

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F(c-\varepsilon) = F(c),$$

өйткені $F(x)$ үздіксіз функция. Сонымен,

$$\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a).$$

Дәл осы сияқты

$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx = F(b) - F(c).$$

Екінші жағынан

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Функцияны шексіздікке айналдыратын нүктелердің саны бірнешеу болса да, теорема осылай дәлелденеді.

Екінші текті меншіксіз иентегралды есептеп шығаруда жаңағы, осының алдында тұжырымдалған теореманың барлық шарттары орындалмаса, онда Ньютон-Лейбниц формуласын қолдануға болмай қалады. Міне, осыны байқау үшін келесі мысалды қарайық:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}.$$

Егер осы интегралды есептеп шығару үшін Ньютон-Лейбиц формуласын бірден қолдансақ, онда

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2.$$

Ал бұл шыққан нәтиже дұрыс емес, өйткені, біріншіден, интегралдау шектерінің төменгісі жоғарғысынан кіші, екіншіден, $\frac{1}{x^2}-$ оң функция. Оң функцияның анықталған интегралы мұндайда теріс санға тең болуы мүмкін емес; бұл жағдай анықталған интегралдың қасиетіне қайшы келеді. Мұндай қисынсыздықтың болу себебі, жоғарыда тұжырымдалған теореманың шарттары толығымен орындалмауында, атап айтқанда, алғашқы $F(x)$ функцияның $(-1,1)$ аралығының $x=0$ нүктесінде үзілісті болуында. Демек, қарастырылып отырған интегралдың бар болуы мүмкін емес.

## § 4. Шектелмеген функциялардан алынған интегралдың жинақтылық белгілері

1. Енді $[a,b\,]$ аралығының екі ұшының бірінде немесе осы аралықтың бойында жатқан бір нүктеде функция $f(x)$ шексіздікке айналатын жағдайды қарайық. $f(x)$ функциясы $[a,b\,]$ аралығының барлық нүктелерінде үздіксіз болып, бірақ $b$ нүктесінің таяу маңында шексіздікке ұмтылатын болсын. Мұндай функцияның $[a,b\,]$ аралығында алынған интегралын қалай анықтауды біз білеміз. Осы сияқты функцияның интегралы болуы жөніндегі келесі теореманы дәлелдейік.

**6-теорема.** *Егер функция $f(x)$ $x=b$ нүктенің таяу маңында шектелмеген болса, былайша айтқанда, айнымалы $x$ $b$-ге ұмтылғанда, функция шексіздікке ұмтылса және $[a,b\,]$ аралығының $b$-ден басқа барлық нүктелерінде үздіксіз болып отырып, төмендегі теңсіздікті*

$$(b-x)^{\alpha}|f(x)|<L \tag{16}$$

қанағаттандырса (мұнда $0<\alpha<1,\ L-$ тұрақты сан), онда интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

абсолют жинақты болады.

(16) теңсіздік $x$-тің мына теңсіздікті $x \geq \xi$ қанағаттандыратын барлық мәндері үшін орындалсын. Мұнда $\xi - a$ мен $b$-нің арасында жатқан тиянақты сан. Анықталған интегралдың қасиеті бойынша

$$\int_a^{b-\varepsilon} |f(x)|dx = \int_a^{\xi} |f(x)|dx + \int_{\xi}^{b-\varepsilon} |f(x)|dx. \qquad (17)$$

(17) теңдіктің оң жағында тұрған бірінші интегралдың мәні тұрақты санға тең, сондықтан ондағы екінші интегралды зерттеуіміз керек.

Қойған шарт бойынша мына теңсіздік $x \geq \xi$ орындалғанда мына теңсіздік те
$|f(x)| < \frac{L}{(b-x)^{\alpha}}$, мұнда $0 < \alpha < 1$, орындалады. Олай болса,

$$\int_{\xi}^{b-\varepsilon} |f(x)|dx < L\int_{\xi}^{b-\varepsilon} (b-x)^{-\alpha}dx < L\frac{(b-\xi)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Егер $\varepsilon$ кемитін болса, жоғарғы шек $b-\varepsilon$ өседі, мұнымен қарастырып отырған

$$\int_{\xi}^{b-\varepsilon} |f(x)|dx$$

интеграл да өседі, өйткені $|f(x)| \geq 0$, бірақ қанша өскенімен бұл интегралдың шамасы $L\frac{(b-\xi)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ санынан асып кетпейді. Демек, бұл интеграл $\varepsilon$ нольге ұмтылғанда бір тиянақты шекке ұмтылады. Сөйтіп, интегралдың мәні бар болатын болды.

**Салдар.**

Егер $\lim\limits_{x\to\infty}[(b-x)^{\alpha}|f(x)|]$ $(0 < \alpha < 1)$
*бір тиянақты санға тең болса, онда*

$$\int_a^b f(x)dx$$

*абсолют жинақты болады.*

Мұның алдында тұжырымдалған теореманың шарттары орындалып тұр.

Мынадай бір ескертуді айта кетейік: егер $x$-тің $b$-ге аса жақын барлық мәндері үшін функция $f(x)$ өзінің таңбасын сақтап, төмендегі теңсіздікті

$$(b-x)|f(x)| > L \tag{18}$$

қанағаттандырса (мұнда $L > 0 -$ тұрақты сан), онда интеграл

$$\int^{b} f(x)dx$$

жинақсыз болады.

$x$-тің мына теңсіздікті $x \geq \xi$ қанағаттандыратын барлық мәндері үшін функция $f(x)$ оң таңбалы сақтасын, мұнда $a < \xi < b$. Онда $x$-тің мұндай барлық мәндері үшін төмендегі теңсіздік

$$(b-x)f(x) > L \tag{19}$$

орындалады.

Анықталған интегралдың қасиеті бойынша

$$\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_{a}^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^{b-\varepsilon} f(x)dx \tag{20}$$

(20) теңдіктің оң жағында тұрған бірінші интеграл тұрақты санға тең, сондықтан ондағы екінші интегралды зерттейміз. (19) теңсіздіктен $x$-тің мына теңсіздікті $x \geq \xi$ қанағаттандыратын барлық мәндері үшін мына формуланы табамыз.

$f(x) > \frac{L}{b-x}$ олай болса,

$$\int_{\xi}^{b-\varepsilon} f(x)dx > L\int_{\xi}^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = Lln\frac{b-\xi}{\varepsilon}.$$

Егер $\varepsilon \to 0$, онда $ln\frac{b-\xi}{\varepsilon} \to \infty$. Демек,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\xi}^{b-\varepsilon} f(x)dx = +\infty.$$

Интеграл

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

жинақсыз. Міне, осыны дәлелдеу керек еді.

Егер $\lim(b-x)f(x)=L$ (мұнда $L\neq 0$), онда интеграл

$$\int_a^b f(x)\alpha x$$

жинақсыз болады.

Егер функция $f(x)\, x=a$ нүктесінің таяу маңында шектелмеген болса, былайша айтқанда, айнымалы *x*, $a$-ға ұмтылғанда функция $f(x)$ шексіздікке ұмтылса, онда 6-теореманы осы жағдайға да қолдануға болады. Тек (16) және (18) теңсіздіктердің орнына мына теңсіздіктерді

$$(x-a)^{\alpha}|f(x)|<L,\quad (0<\alpha<1)$$
$$(x-a)|f(x)|>L\quad (L>0)$$

алуға тура келеді.

Егер функция $f(x)$ $a$ мен $b$ арасында жатқан x=c нүктесінің маңайында шектелмеген болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

Енді осы теоремаларға бір-екі мысал келтірейік.

*1-мысал.*

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

мұнда $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$

Егер p$>1$ және $q>1$, онда функция $f(x)$ *x*-тің әрбір мәнінде үздіксіз. Егер $0<p<1$, $0<q<1$, онда функция $f(x)$ мына нүктелердің x=0, x=1 жуық маңайында шектелмеген. Ал

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^{1-q}f(x)=1,\qquad \text{мұнда } 1-q<1 \text{ және}$$

$\lim x^{1-p}f(x)=1,$ мұнда $1-p<1.$

6-теорема салдарының барлық шарттарын қанағаттандырады, сондықтан интеграл

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \text{ жинақты.}$$

*2-мысал.*

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Интеграл астындағы функция $x = 0$ нүктесінде шексіздікке айналады, ал $x$ бірге ұмтылғанда $(x \to 1)$ нольге ұмтылады.

$0 < \alpha < 1$ болсын, сонда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{x^\alpha}} = 0.$$

Демек, интеграл

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}$$

жинақты.

*3-мысал.*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx.$$

Мұнда интегралдық функция $f(x) = \ln \sin x$ мына $x = 0$ нүктесінде шексіздікке айналады. Жаңағыдай $0 < \alpha < 1$ болсын, сонда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^\alpha sin^\alpha x \; ln \sin x = 0.$$

Олай болса, интеграл

$$\int^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$$

жинақты.

## § 5. Меншіксіз интегралдардың бас мәндері

$[a, b\,]$ аралығының бойында жатқан бір с нүктесінде функция $f(x)$ шексіздікке айналатын болсын және с нүктесінен басқа оның барлық бөліктерінде интегралданатын болсын. Сонда а-дан b-ге дейін алынған меншіксіз интегралды біз былай анықтадық:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left( \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \right), \qquad (21)$$

мұнда $\varepsilon_1$ мен $\varepsilon_2$ бір-біріне тәуелсіз болып нольге ұмтылады. Кейбір жағдайларда, (21) теңдіктің оң жағында тұрған шек болмай қалған күнде, $\varepsilon_1$ мен $\varepsilon_2$-ні бір-біріне теңеп, сонан кейін оларды нольге ұмтылтып ($\varepsilon_1$=$\varepsilon_2 \to 0$) осы шектің өзін іздеу керек. Егер $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ нольге ұмтылғанда ($\varepsilon_1$=$\varepsilon_2 \to 0$) осы шек бар болатын болса, оны мына меншіксіз интегралдың

$$\int_a^b f(x)dx$$

бас мәні деп атайды және оны былай белгілейді:

$$V \cdot p \cdot \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right) \qquad (22)$$

Егер функция $f(x)$ $[a, b\,]$ аралығының бірнеше ішкі нүктелерінде шексіздікке айналса, онда да меншксіз интегралдың бас мәні дәл жаңағыдай болып анықталады.

Мысал келтірейік.

*1-мысал.*

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^p},$$

мұнда $a < c < b,\ p$ – оң бүтін сан. Егер с $> 1$, онда

$$\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{(x-c)^p} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-c)^p} = -\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(b-c)^{p-1}} - \frac{1}{(a-c)^{p-1}} + \right.$$

$$\left. +[(-1)^{p-1} - 1)]\frac{1}{{}_{\varepsilon}p-1}\right]. \qquad (23)$$

Егер p – жұп болса, онда кейінгі теңдіктің оң жағындағы ақырғы қосылғыш болады $-\frac{2}{\varepsilon^{p-1}}$, олай болса, $\varepsilon$ нольге ұмтылғанда бұл оң жақ шексіздікке ұмтылады. Демек, мына интегралдың

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^p}$$

тиянақты мағынасы жоқ.

Егерде p – тақ сан болса, онда (23) теңдіктің оң жағындағы ақырғы қосылғыш нольге тең болады, былайша айтқанда, бұл оң жақ $\varepsilon$-ге тәуелді болмайды және

$$V\cdot p\cdot\int_a^b\frac{dx}{(x-c)^p}=\frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{(b-c)^{p-1}}-\frac{1}{(a-c)^{p-1}}\right].$$

Егер $p=1$, онда

$$\int_a^b\frac{dx}{x-c}=\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^b\frac{dx}{x-c}=ln(x-c)\Big|_{x=a}^{x=c-\varepsilon}+ln(x-c)\Big|_{x=c+\varepsilon}^{b}=ln\frac{b-c}{c-a}.$$

Сонымен,

$$V\cdot p\cdot\int_a^b\frac{dx}{x-c}=ln\frac{b-c}{c-a}.$$

Оң таңбалы функцияның жинақсыз интегралының бас мәні болмайды.

Егер $[a,b\ ]$ аралығының кез келген екі нүктесі $x_1$ және $x_2$ үшін $\omega(x)$ функциясы

$$|\omega(x_2)-\omega(x_1)|\le K|x_2-x_1|^{\alpha} \qquad (24)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын болса, мұнда К – тұрақты оң сан, ал $0<\alpha\le 1$, онда $\omega(x)$-ті $(a,b)$ аралығында $\alpha$ дәреже көрсеткішпен Липшиц шартын қанағаттандырады деп атайды.

Осының алдындағы нәтижеге және осы шартқа сүйене отырып төмендегі теореманы дәлелдеуге болады.

**1-теорема.** *Егер интегралданатын функция* $f(x)$ *с нүктесінде үздіксіз болса (24) шартты қанағаттандырса, яғни*

$$|f(x)-f(c)|<K|x-c|^{\alpha}, \qquad (25)$$

онда

$$V\cdot p\cdot\int_a^b\frac{f(x)dx}{x-c}\ \text{бар болады.}$$

Шынында, бұл интегралды былай етіп жазуға болады:

$$V\cdot p\cdot\int_a^b\frac{f(x)dx}{x-c}=V\cdot p\int_a^b\frac{f(c)dx}{x-c}+V\cdot p\cdot\int_a^b\frac{f(x)-f(c)}{x-c}dx.$$

Бұл теңдіктің оң жағындағы бірінші интеграл бұрын қаралған интеграл, оның мағынасы бар. Ал екінші интегралды алып қарайтын болсақ, бұл интеграл бас мән мағынасында ғана емес, жай мағынаның өзінде де болатын интеграл, өйткені

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right|<K\cdot\frac{1}{x-c\ |^{1-\alpha}}.$$

Ал $1-\alpha<1$ болғандықтан, мына интегралдың

$$\int_a^b \frac{d\,x}{|x-c|^{1-\alpha}}$$

толық мағынасы бар. Олай болса, мына интегралдың

$$\int_a^b \frac{f(x)-f(c)}{x-c}dx$$

шекті мәні бар, Сөйтіп, мына мән

$$V\cdot p\cdot\int_a^b \frac{f(x)dx}{x-c}$$

бар болатын болды.

## § 6. Практикада кездесетін кейбір меншіксіз интегралдарды есептеп шығару

1. $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\, d\, x.$

Бұл интегралдың жинақтылығын біз § 4 көрсеттік, енді осы интегралды есептеп шығарайық:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(2\sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}\right)dx=\frac{\pi}{2}ln2+\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\sin\frac{x}{2}dx+$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}} lncos\,\frac{x}{2}dx.$$

Бұл теңдіктің оң жағында тұрған бірінші интегралдағы айнымалыны былай ауыстырамыз: $\frac{x}{2}=z,$ екінші интегралдағы айнымалыны: $\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=z$. Сонда

$$J=\frac{\pi}{2}ln2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} lnsin\,z\,d\,z+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ln\sin z\,d\,z=\frac{\pi}{2}ln2+2J.$$

бұл арадан

$$J = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} ln \sin x \, d \, x = -\frac{\pi}{2} ln2.$$

2. $J = \int\limits_{0}^{\infty} t^{-x^2} dx,$

мұндағы айнымалы $x$-ті былай ауыстырайық:
$x = \lambda t,$ сонда

$$J = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda^2 t^2} \lambda dt.$$

Кейінгі теңдіктің екі жағын $e^{-\lambda^2} d\lambda$-ге көбейтіп, $\lambda$ бойынша 0-ден $+\infty$-ке дейін интегралдап және сонан кейін интегралдау ретін өзгертсек, сонда

$$\int\limits_{0}^{\infty} J e^{-\lambda^2} d\lambda = \int\limits_{0}^{\infty} \left( \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda^2 (1+t^2)} \lambda d\lambda \right) dt. \tag{26}$$

Бұл теңдіктің сол жағын былай жазуға болады:

$$J \cdot \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = J \cdot J = J^2,$$

ал оң жағындағы ішкі интегралды жеке алып, $\lambda$ бойынша интегралдасақ, онда

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda^2 (1+t^2)} \lambda d\lambda = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-(1+t^2)^{\lambda^2}}}{1+t^2} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2}.$$

Міне, бұдан кейін (26) теңдікті былай жазуға болады:

$$J^2 = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}, \text{ сөйтіп}$$

$$J = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3. $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\left(ax + \frac{b}{x}\right)^2} dx.$

Бұл интегралды есептеп шығару үшін ең алдымен төмендегі теңдіктің

$$\int_0^\infty a\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^\infty f\left(\sqrt{x^2+4\,a\,b}\right)dx$$

дұрыстығын дәлелдейік. Мұнда $a>0,\ b>0$ және интегралды жинақты деп ұйғарамыз.

Мына интегралды

$$J=\int_0^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx, \qquad a>0, \qquad b>0$$

түрлендірейік, ол үшін мынадай $ax+\frac{b}{x}=t$ ауыстыру жасаймыз. Бұл арадан,

$$x=\frac{t+\sqrt{t^2+4\,a\,b}}{2\,a},$$

$$\frac{d\,x}{d\,t}=\frac{1}{2a}\left[1\pm\frac{t}{\sqrt{t^2-4\,a\,b}}\right].$$

Бұл жерден қолданып отырған ауыстыруымыздың біркелкі еместігін байқаймыз. Сондықтан *t* функциясының өзгеру процесін зерттейміз. Егер *x=0* және $x=\infty,$ онда $t=\infty(0,\infty)$ аралықта бұл функцияның бір ғана минимумы бар, ол минимум мына нүктеде $x=\sqrt{\frac{b}{a}},$ $t$-нің $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ нүктедегі мәні $2\sqrt{ab}$

Енді мына интегралды:

$$J=\int_0^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx$$

екіге ажыратып жазамыз:

$$J=\int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx+\int_{\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\infty} f\left(a\,x+\frac{b}{x}\right)dx.$$

Егер $0<x<\sqrt{\frac{b}{a}},$ онда $\frac{dx}{dt}<0,$ яғни

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2a}\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4\,a\,b}}\right);$$

егер $\sqrt{\frac{b}{a}} < x < \infty$, онда $\frac{dx}{dt} > 0$, сондықтан

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2a}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4\,a\,b}}\right).$$

Бұдан кейін

$$J = \frac{1}{2a}\int\limits_{\infty}^{2\sqrt{ab}} f(t)\left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4\,a\,b}}\right)d\,t + \frac{1}{2a}\int\limits_{2\sqrt{ab}}^{\infty} f(t)\,(1 +$$

$$+\frac{t}{\sqrt{t^2 - 4\,a\,b}}\Bigg)dt = \frac{1}{2\,a}\int\limits_{2\sqrt{ab}}^{\infty} f(t)\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4\,a\,b}} - 1 +\right.$$

$$\left.+\frac{t}{\sqrt{t^2 - 4\,ab}}\right)dt = -\frac{1}{a}\int\limits_{\infty}^{2\sqrt{a\,b}} f(t)\frac{t\,d\,t}{\sqrt{t^2 -\ 4\,a\,b}}.$$

Енді осы кейінгі интегралда мынадай ауыстыру жасаймыз: $\sqrt{t^2 - 4\,ab} = z$, бұл ауыстыру біртектес. Осы ауыстырудан мынаны табамыз:

$$t = \sqrt{z^2 + 4\,a\,b};\frac{t\,d\,t}{\sqrt{t^2 - 4\,a\,b}} = dz,$$

бұл арадан

$$J = \frac{1}{a}\int\limits_0^{\infty} f\left(\sqrt{z^2 + 4\,a\,b}\right)dz.$$

Енді әуел бастағы интегралды қарайық:

$$u = \int\limits_0^{\infty} e^{-\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2}dx, \qquad a > 0,\ \ b > 0,\ \text{мұнда}$$

$$f\left(ax + \frac{b}{x}\right)^2 = e^{-\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2}.$$

Жоғарыда көрсетілген түрлендіруді қолданып төмендегіні табамыз:

$$u = \frac{1}{a}\int\limits_0^{\infty} e^{-(x^2+4\,a\,b)}dx = \frac{e}{a}^{-4ab}\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx = e^{-4ab}\frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

Сонымен,

$$u = \int_0^\infty e^{-\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2} dx = e^{-4ab}\frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

Осы шыққан нәтиженің негізінде мына интегралдың $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2} dx$ мәнін табуға болады.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2} dx = \frac{e^{-4ab}\sqrt{\pi}}{a}.$$

Жоғарыдағы табылған *интегралға* тағы да мынадай интегралды

$$v = \int_0^\infty e^{-\left(ax^2+\frac{b}{x^2}\right)} dx, a > 0, b > 0$$

келтіруге болады. Ол үшін

$$a\,x^2 + \frac{b}{x^2} = \left(x\sqrt{a} + \frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2 - 2\sqrt{ab.}$$

Бұл арадан

$$v = e^{2\sqrt{ab}} \int_0^\infty e^{-\left(x\sqrt{a}+\frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2} dx = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-2\sqrt{aq}}.$$

4. Кездейсоқ қателердің Гаусс тапқан тарау заңы бойынша *x* және *x*+*dx* мөлшерлердің арасында жатқан қателердің саны былай өрнектеледі:

$$ds = N\frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx,$$

мұнда *N* жасалған байқаулардың (бақылаулардың) саны, *h* – тұрақты сан.

Бақылаудағы жіберілетін қателер квадраттарының қосындысының шамасын табу керек.

Қате $x^2$-ты қателер санына көбейтіп, $x^2 ds = Nx^2 \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx$ табамыз, сонан кейін бұл нәтижені x бойынша – ∞-тен +∞-ке дейін интегралдасақ, сонда

$$s = \frac{N}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx = \frac{2N}{h\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{h^2}} dx.$$

Енді осы интегралдың мәнін табу үшін былай ұйғарамыз: $\frac{x}{h} = t,$ бұл арадан $dx = hdt.$ Онда

$$S = \frac{2Nh^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = \frac{Nh^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty td\left(-e^{-t^2}\right) = \frac{Nh^2}{\sqrt{\pi}} \left[-t\, e^{-t^2} \Big|_0^\infty + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\infty e^{-t^2} dt\right] = \frac{Nh^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2} Nh^2.$$

Бұл арадан,

$$h = \sqrt{\frac{2s}{N}} = 1{,}414\mu,$$

мұнда $\mu$ – берілген бірнеше бақылаулардың орта квадраттық қатесі.

5. Диэлектриктердің молекулалық құрылыс теориясында кездесетін мына екі интегралды

$$u = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos\beta\, x\, d\, x, \;\; v = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \sin\beta\, x\, d\, x$$

есептеп шығару керек.

Екінші интегралды $i = \sqrt{-1}$-ге көбейтіп, бірінші интегралмен қосамыз, сонда

$$u + iv = e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(x - i\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} dx$$

немесе

$$u + iv = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cdot e^{i\beta x} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 + i\beta x} dx.$$

Енді бұл интегралдағы айнымалыны былай ауыстырамыз:

$$x - i\frac{\beta}{2\alpha} = z,$$

сонда

$$u + iv = e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2} dz = e^{-\frac{\beta^2}{4\,\alpha}} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}.$$

Комплекс сандардың теңдік шарты бойынша:

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} cos\beta x\, d\, x = e^{-\frac{\beta^2}{4\,\alpha}} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha},$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos\beta\, x\, d\, x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\,\alpha}}.$$

Енді мына интегралды қараймыз:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, sin\,\beta\, x\, d\, x = -\frac{1}{\beta}\frac{d}{d\beta}\int_{0}^{\infty} e - \alpha x^2 \cos\beta\;\; x\, d\, x =$$

$$= -\frac{1}{\beta}\frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\,\alpha}}\right) = \frac{1}{4\,\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\,\alpha}}.$$

$$6.\, u = \int_{0}^{\infty} \cos x^2\, d\, x, \quad v = \int_{0}^{\infty} \sin x^2\, d\, x.$$

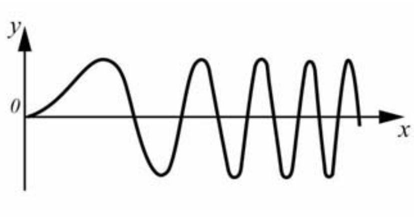
Мынадай ауыстыру $x = \sqrt{t}$ жасап, бұл интегралдарды мына түрге келтіруге болады:

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, d\, t, \qquad \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, d\, t.$$

Алдымен берілген интегралдардың жинақтылығын дәлелдейік, ол үшін мына интегралды қарайық:

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 d\, x.$$

Интеграл астындағы функция $f(x) = sinx^2$ аргумент $x$ плюс шексіздікке ұмтылғанда, нольге ұмтылмайды. Бұл функцияның графигін жобалап көрсетуге болады (76-чертеж).



76-чертеж

$(0, \infty)$ аралығында жатқан төмендегі интервалдарды қарайық:

$$\left(0, \sqrt{\pi}\right), \qquad \left(\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}\right), \qquad \left(\sqrt{2\pi}, \sqrt{3\pi}\right), \dots,$$
$$\left(\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}\right)$$

Бұл интервалдың әрқайсысында функция $f(x) = sinx^2$ бір ғана таңбаны сақтайды, мәселен, бірінші интервалда $(+)$, екінші интервалда (–) сонан әрі қарай таңбаларды сақтайды.

Былай ұйғарайық:

$$v_n = (-1)^n \int\limits_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2 d\, x.$$

Енді бұл интегралдағы айнымалы $x$-ті былай ауыстырайық: $x = \sqrt{t + n\pi}$, сонда

$$v = \frac{(-1)^n}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin(t + n\pi)}{\sqrt{t + n\pi}} d\, t = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t\, d\, t}{\sqrt{t + n\pi}}.$$

Бұл арадан $v_n$ сандардың оң екенін және номері $n$ өскен сайын кемитінін байқаймыз. Бұдан басқа және мына теңсіздік орындалады:

$$v_n < \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{d\, t}{\sqrt{n\pi}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Демек, $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = 0$.

Олай болса, қарастырып отырған интеграл жинақты, бірақ абсолют жинақты емес.

Осы параграфтағы 3) мысал бойынша бізге мына интегралдың

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, d\, x$$

мәні белгілі, яғни

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, d\, x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Былай ұйғарып: $\alpha = a + ib = pe^{i\omega}$ табамыз:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-(a+ib)^{x^2}} d\, x = \int\limits_0^{\infty} e^{-ax^2} (\cos b\, x^2 - i \sin b\, x^2) d\, x =$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a + i\, b}} = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}} e^{-i\omega}.$$

Егер $b = 0$ деп ұйғарсақ, онда + таңбамен алу керек.

Енді $a = 0, b = 1,\ p = 1, \omega = \frac{\pi}{2}$ деп ұйғарғақ, онда

$$\int\limits_0^{\infty} (\cos x^2 + i \sin x^2) d\, x = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

бұл арадан

$$\int_0^\infty (\cos x^2)d\,x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}};\ \int_0^\infty (sin\,x^2)d\,x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Соңғы қарастырған екі интегралды *Френель интегралдары* немесе диффракция интегралдары деп атайды. Бұлай атайтын себебі – осы екі интегралдың оптикада атқаратын ролі орасан зор.

**7.** Самолет қанаты теориясы мәселелерінде кездесетін келесі меншіксіз интегралды

$$J_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\,\theta\,d\,\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0}$$

қарайық.

Самолет қанатының көтеру күшін есептеу мәселесі осы интегралға келіп тіреледі.

Интеграл таңбасы ішінде тұрған функция $\theta = \theta_0$ болғанда шексіздікке айналып кетеді Бұл мән интегралдау облысында жатқан мән. Сондықтан жоғарыда баяндалған теория бойынша бұл интеграл меншіксіз интеграл.

Ең алдымен біз мына интегралдың

$$J_0 = \int_0^\pi \frac{d\,\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0}$$

мәнін табайық. Бұл интеграл меншіксіз, олай болса,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\theta_{0-\varepsilon}} \frac{d\,\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\sin\theta_0}ln\frac{\sin\frac{\theta_{0+\theta}}{2}}{\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}}\right]_0^{\theta_0-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sin\theta_0}\left[ln\sin\left(\theta_0-\frac{\varepsilon}{2}\right) = ln\sin\frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Енді мына шекті іздейік

$$lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\theta_0+\varepsilon}^{\pi} \frac{d\theta}{cos\,\theta - cos\,\theta_0} = lim\left[\frac{1}{sin\,\theta_0}ln\ \frac{sin\frac{\theta_0+\theta}{2}}{sin\frac{\theta_0-\theta}{2}}\right]_{\theta_0+\varepsilon}^{\pi} =$$
$$_{\varepsilon\to 0}$$

$$= \underset{\varepsilon\to 0}{lim}\frac{1}{\sin\theta_0}\left[ln\sin\frac{\varepsilon}{2} - ln\sin\left(\theta_0+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$$

Ал

$$J_0 = \int_0^{\pi} \frac{d\,\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{\theta_0-\varepsilon} \frac{d\,\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} + \int_{\theta_0+\varepsilon}^{\pi} \frac{d\,\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\sin\theta_0} ln \frac{\sin\left(\theta_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(\theta_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}\right] = 0.$$

Енді мына келесі интегралдың

$$J_1 = \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta\, d\,\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0}$$

мәнін табайық:

$$J_1 = \int_0^{\pi}\left(1 + \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta - \cos\theta_0}\right) d\,\theta = \int_0^{\pi} d\,\theta + \cos\theta_0 \int_0^{\pi} \frac{d\,\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} =$$

$$= \pi - J_0 cos\theta_0 = \pi.$$

Енді келесі рекурренттік қатысты қарайық:

$$J_{n+1} + J_{n-1} = \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} d\,\theta = \int_0^{\pi} \frac{2\cos n\,\theta \cos\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} d\,\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\left(2\cos n\,\theta + \frac{2\cos\theta_0\, \cos n\,\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0}\right) d\,\theta = 2\int_0^{\pi} \cos n\,\theta\, d\,\theta +$$

$$+2\cos\theta_0 \int_0^{\pi} \frac{\cos n\,\theta\, d\,\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} = 2J_n \cos\theta_0.$$

Сонымен,

$$J_{n+1} + J_{n-1} = 2J_n \cos\theta_0.$$

Бұл арадан

$$J_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\,\theta\, d\,\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} = \pi \frac{\sin n\,\theta_0}{\sin\theta_0}.$$

### ***Жаттығулар***

Келесі интегралдардың жинақтылығын зерттеу керек:

1. $\int_0^{\infty} \frac{x^2\, d\, x}{x^4 + x + 1}.$ Жауабы: Жинақты.

2. $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{x}^2\, \mathrm{d\, x}}{\mathrm{x}^3 + 2\,\mathrm{x} + 2}.$ Жауабы: Жинақты.

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x\, d\, x}{x\,(a^2+x^2)}$. Жауабы: Жинақты.

4. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin a\, x\ \, d\, x}{b^2+x^2}, b \neq 0$. Жауабы: Жинақты.

5. $\int\limits_0^\infty \frac{x\, sin\, d\, x}{(k^2+x^2)^2}$. Жауабы: Жинақты.

6. $\int\limits_0^\infty \frac{d\, x}{\sqrt[3]{x^3+1}}$. Жауабы: Жинақты.

7. $\int\limits_0^1 \frac{d\, x}{\sqrt[4]{1-x^4}}$. Жауабы: Жинақты.

8. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\, x}{\sqrt{ctg\, x}}$. Жауабы: Жинақты.

9. $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{ln\, x} dx$ Жауабы: Жинақты.

10. $\int\limits_0^\infty \frac{ln\, x}{1+x^2} dx$. Жауабы: Жинақты.

Келесі меншіксіз интегралдарды есептеп шығару керек:

11. $\int\limits_0^\infty \frac{ln\, x\, d\, x}{x\sqrt{x^2-1}}$. Жауабы: $\frac{\pi}{2} ln2$.

12. $\int\limits_0^\infty \frac{x\, d\, x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$. Жауабы: $\frac{\pi}{2} ln2$.

13. $\int\limits_0^\infty e^{-ax} \cos b\, x\, d\, x$. Жауабы: $\frac{a}{a^2+b^2}$.

14. $\int\limits_0^\infty e^{-ax} \sin b\, x\, d\, x$. Жауабы: $\frac{a}{a^2+b^2}$.

15. $\int\limits_0^\infty \frac{d\, x}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-1}}; 0 < a < 1$. Жауабы: $\frac{arc \sin a}{a\sqrt{1-a^2}}$.

16. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+1}}$. Жауабы: $\frac{\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)}{a\sqrt{a^2-1}}$.

егер $a > 1$.

1, егер $a = 1$.

$\frac{arc\cos a}{a\sqrt{1-a^2}}$, егер $a < 1$.

17. $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2\,x-1}}$. Жауабы: $\frac{\pi}{2}-arc\sin\frac{3}{4}$.

18. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,d\,x$. Жауабы: $-\frac{\pi}{2}ln$.

19. $\int_{0}^{1}\frac{x^2\ln x\,d\,x}{\sqrt{1-x^2}}$. Жауабы: $\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}-ln2\right)$.

20. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(a^2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$. Жауабы: $\frac{\pi}{a\sqrt{a^2-1}}$. $(a>1)$.

21. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{1-x^2}}$. Жауабы: $\frac{\pi}{a\sqrt{1+a^2}}(a>0)$.

22. $\int_{-1}^{1}\frac{\sin\ a\,d\,x}{x^2-2\,x\cos a+1}.(-\pi<a<\pi)$ Жауабы: $\frac{\pi}{2}$, егер $0<\alpha<\pi$.

23. Массасы *m*-ге тең дене h биіктіктен жердің бетіне түседі. Денеге әсер ететін күш тек ауырлық күш. Жердің бетіне түскендегі ең ақтық жылдамдығы қандай? Сол көрсетілген биіктіктен жердің бетіне қанша уақыттың ішінде келіп түсті?

*Нұсқау.* Кинетикалық энергияның теңдеуі бойынша

$$\frac{m\,v^2}{2}=\int_{x}^{h}m\,g\frac{r^2\,d\,x}{(x+r)^2}=\frac{m\,g\,r^2}{r+h}\cdot\frac{h-x}{r+x}.$$

Былай ұйғарып $x=0$ ақтық жылдамдықты табамыз:

$$v_0=\sqrt{\frac{2\,g\,h}{1+\frac{h}{r}}}.$$

Уақыттың әрбір мезгіліндегі жылдамдық болады:

$$v=\frac{r\sqrt{2\,g}}{\sqrt{r+h}}\sqrt{\frac{h-x}{r+x}}.$$

Енді уақытты табу үшін мына формуланы

$$T=\int_{0}^{h}\frac{dx}{v}$$

қолдану керек.

Жауабы: $T = \sqrt{\frac{1+\frac{h}{r}}{2\,\mathrm{g}}}\left[\sqrt{h} + \sqrt{r}\left(1 + \frac{h}{r}\right)\right]\left(\frac{\pi}{2} - arc\ t\mathrm{g}\sqrt{\frac{r}{h}}\right)$.

24. Егер 0 градусқа дейін қызған бір дененің температурасы сәуле шығарудың (таратудың) арқасында шексіз аз *dt* уақыттың ішінде $d\ \theta$ шамаға кемісе, онда туынды $\frac{d\ \theta}{dt}$ дененің суу жылдамдығын өрнектейді.

Неміс физигі Лоренц 1881 ж. суу жылдамдығы үшін келесі эмппиялық формуланы $\frac{d\ \theta}{dt} = -k\theta\left(1 + h\sqrt{\theta}\right)$ тапты (мұнда $k$ мен $h$ – денеге тән тұрақты шамалар). Қанша уақыттың ішінде дене $\theta_0$ градустан, $\theta_1$ градусқа дейін суийды?

Жауабы: $\frac{4}{k} ln \frac{\theta_1{}^{-\frac{1}{4}+h}}{\theta_0{}^{-\frac{1}{4}+h}}$.

25. Антеннаның сәуле шығару нәтижесіндегі пайда болатын электромагниттік өріс энергиясының кернеулігі мына формуламен

$$H = \frac{2\sqrt{2}\ \omega}{c}\frac{J_0}{r}\cos\left(\omega\ t — \frac{2\,\pi\,r}{\lambda}\right)\sin\theta\int_0^l \cos\frac{\pi\ z}{2\ l}\cos\left(\frac{\pi\ z}{2\ l}cos\theta\right)d\ z$$

өрнектеледі. Осы интегралдың мәнін табу керек.

Жауабы: $H = \frac{4\sqrt{2}\ l\omega}{\pi\ c}\cdot\ \frac{J_0}{r}\cos\left(\omega\ t — \frac{2\,\pi\,r}{\lambda}\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$.

26. Материалды нүкте, $y^2 = 4\,x$ параболаның бойымен қозғалады. Бастапқы $t = 0$ мезгілде $x_0 - 4, y_0 = 4, v_0 = 5,$ және жылдамдық параболаның төбесіне қарай бағытталған. Қанша уақыттың ішінде нүкте параболаның төбесіне барып жетеді?

Жауабы: $\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$.

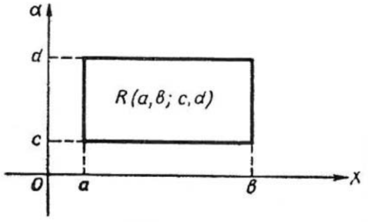
27. Түзу сызықты өткізгіштің бойымен тұрақты ток *J* жүреді. Егер өткізгіштің бір ұшынан перпендикулярдың табанына дейінгі аралық а-ға, екінші ұшынан перпендикулярдың табанына дейінгі аралық *b*-ге тең болса, өткізгіштен қашықтығы $OP = h$ нүктедегі күш өрісі қандай?

Жауабы: $H = \frac{J}{h}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}}\right)$.

# XI ТАРАУ
# ПАРАМЕТРГЕ ТӘУЕЛДІ ИНТЕГРАЛДАР ЭЙЛЕР ИНТЕГРАЛДАРЫ

## § 1. Шектік функция

Екі айнымалы $x$-пен $\alpha$-нің функциясы $f(x,\alpha)$ қарайық. Мұнда $x[a,b]$ аралығында үздіксіз өзгерсін де, ал $a[c,d]$ аралығында үздіксіз өзгеретін болсын. Сонда екі айнымалының функциясы $f(x,\alpha)$ мына тік төртбұрышты фигурада анықталған болып табылады. Бұл анықталу облысты былай белгілейміз: $R[a,b;\ c,d]$ (77-чертеж) $[c,d]$ аралығындағы $\alpha$-ның әрбір тұрақты мәні үшін бұл функция $[a,b]$ аралығында меншікті мағынасында интегралданатын мына интеграл



77-чертеж

$$J(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)dx \qquad (1)$$

параметр $a$-ның функциясы болып табылады. Егер алдын ала берілген оң мейлінше аз $\varepsilon$ санына сәйкес және х-ке тәуелсіз $\delta>0$ саны табылып, мына теңсіздіктің

$$|\alpha-\alpha_0|<\delta$$

орындалуынан, $[a,b]$ аралығындағы барлық х-тер үшін төмендегі теңсіздік

$$|f(x,\alpha)-\varphi(x)|<\varepsilon$$

орындалса, онда $f(x,\alpha)$ функцияны $[a,b]$ аралығындағы бойынша $\varphi(x)$ функциясына бірқалыпты ұмтылады деп айтамыз және мұны былай жазамыз:

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)=\varphi(x)$$

$\varphi(x)$ функциясын *шектік функция* деп атайды.

Егер функция $f(x,\alpha)$ шектік $\varphi(x)$ функциясына ұмтылғанда, (1) интеграл осы шектік функциядан алынған интегралға ұмтыла ма, яки жоқ па? Бұл сұраққа төмендегі теорема жауап береді.

**1-теорема.** *Егер* $[c,d]$ *аралығындағы а-ның әрбір тұрақты мәні үшін, функция* $f(x,\alpha)$ *x бойынша* $[a,b]$ *аралығында* *интегралданатын болса және* $\alpha$ $\alpha_0$*-ге ұмтылғанда* $(\alpha \to \alpha_0)$ *шектік функцияға x бойынша бірқалыпты ұмтылса, онда*

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} J(\alpha) = \lim_{\alpha\to\alpha^0} \int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b \varphi(x)dx. \quad (2)$$

Теореманың шарттары бойынша $[c,d]$ аралығындағы $a$-ның кез келген мәні үшін функция $f(x,\alpha)[a,b]$ аралығында $x$ бойынша интегралданатын функция және шектік функцияға бірқалыпты ұмтылады. Сондықтан шектік функцияның өзі $[a,b]$ аралығында интегралданатын функция болып табылады.

$\varepsilon > 0 -$ алдын ала берілген сан, ал $\delta >$ осы $\varepsilon$ саны бойынша табылған сан болсын, сонда функция $f(x,\alpha)$ шектік $\varphi(x)$ функциясына бірқалыпты ұмтылатын болғандықтан, мына теңсіздіктің

$$|\alpha - \alpha_\theta| < \delta \quad (3)$$

орындалуынан, $[a,b]$ аралығындағы барлық $x$-тер үшін төмендегі теңсіздік

$$|f(x,\alpha) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (4)$$

орындалады.

(3) Теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $a$-лар үшін мына айырманы қарайық:

$$\int_a^b f(x,\alpha)dx - \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Анықталған интегралдардың қасиеттері бойынша

$$\left|\int_a^b f(x,\alpha)dx - \int_a^b \varphi(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x,\alpha) - \varphi(x)|dx.$$

4) Теңсіздікті еске алып табамыз:

$$\left|\int_a^b f(x,\alpha)dx - \int_a^b \varphi(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Бұл теңсіздіктің орындалуы (2) теңдіктің дұрыстығын дәлелдейді.

(2) Теңдікті *интеграл таңбасы астында параметр бойынша шекке көшу формуласы деп атайды.*

Енді $\alpha < \alpha_0$ деп ұйғарайық, сонда мынадай салдар орын алады:

***Салдар.*** *Егер а-ның тұрақты мәндері үшін функция $f(x,\alpha)$, х бойынша $[a,b]$ аралығында үздіксіз болса және $\alpha$-ның өсуімен байланысты біркелкі өсе отырып үздіксіз шектік функцияға ұмтылса, онда (2) теңдік орындалады.*

**2-теорема.** *Егер $f(x,\alpha)$ екі айнымалының функциясы ретінде төртбұрыш $R[a,b;\alpha,\beta]$ облысында үздіксіз болса, онда (1) интеграл $[c,d]$ аралығында параметр $\alpha$-ның үздіксіз функциясы болады.*

Функция $(x,\alpha)$, $R$ облысында бірқалыпты үздіксіз болғандықтан, берілген $\varepsilon > 0$ саны бойынша $\delta > 0$ саны табылып мына теңсіздіктердің

$$|x'' - x'| < \delta, \quad |a'' - a'| < \delta$$

орындалуынан келесі теңсіздік

$$|f(x'',a'') - f(x',a')| < \varepsilon$$

орындалады.

Егер былай ұйғарсақ: $x' = x'' = x$, $a' = a_0$, $a'' = a$; онда қандай болмасын *x* мына теңсіздіктің $|a - a_0| < \delta$ орындалуынан төмендегі теңсіздік орындалады:

$$|f(x,a) - f(x,a_0)| < \varepsilon.$$

Ал бұл шарттар мына теңдікпен

$$\lim_{a\to a_0} f(x,a) = f(x,a_0)$$

эквивалент болады.

Сөйтіп, *a* мына кез келген $a_0$-ге ұмтылғанда, функция $f(x,a)$ мына $f(x,a_0)$ функциясына *x* жөнінде бірқалыпты ұмтылатын болды. Олай болса, *I*-теорема бойынша

$$\lim_{a\to a_0} \int_a^b f(x,a)dx = \int_a^b f(x,a_0)dx$$

немесе бәрібір

$$\lim_{a\to a_0} J(a) = J(a_0).$$

Осымен, біз теореманы дәлелденді деп есептейміз.

## §2. Интегралды параметр бойынша дифференциалдау және интегралдау[1]

1. Интеграл таңбасы астындағы $f(x,\alpha)$ функцияның $[c,d]$ аралығында шекті $f'_{\alpha}(x,\alpha)$ туындысы бар және $a$ мен $b$-ні тұрақты $\alpha$-ға тәуелді емес деп ұйғарайық.

Параметр $\alpha$-ға еркімізше $\Delta\alpha$ өсімшені берейік. Сонда

$$J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)=\int_a^b[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]dx. \tag{5}$$

$f(x,\alpha)$ функцияның параметр $\alpha$ бойынша шекті туындысы болғандықтан, келесі теңдік орындалу керек:

$$f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)=\Delta\alpha[f'\alpha(x,\alpha)+\eta], \tag{6}$$

мұнда $\eta$, $\Delta\alpha$ мен бірге нольге ұмтылатын шама, яғни ол шексіз аз шама.

Сонымен, (6) теңдікті еске ала отырып, (5) теңдіктен төмендегіні табамыз:

$$\frac{J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b f'_{\alpha}(x,\alpha)dx+\int_a^b \eta dx \tag{7}$$

$\eta$-ның абсолют шамаларының ең жоғарғы шегін $\varepsilon$ белгілесек, онда

$$\left|\int_a^b \eta dx\right|<\varepsilon(b-a).$$

$\varepsilon$ – кез келген оң құнарсыз аз сан болғандықтан,

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b \eta dx=0$$

$\Delta\alpha$-ны нольге ұмтылтып, (7) теңдіктің екі жағынан шек алып, төменгі теңдіктерді табамыз:

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b f'\alpha(x,\alpha)dx$$

немесе

$$\frac{dJ}{d^{\alpha}}=\int_b^b f'_{\alpha}(x,\alpha)dx. \tag{8}$$

---

[1] 2 және 3-параграфтарды XVIII тараудан кейін өтуге болады.

(8) теңдікті *интеграл таңбасы астында параметр бойынша дифференциалдау формуласы деп атайды.*

Енді $a$ мен $b$-ні параметрге тәуелді, яғни $\alpha$-ның функциясы болсын деп ұйғарайық. Бұрынғыдай еркімізше $\alpha$-ға $\Delta\alpha$ өсімшені береміз, сонда

$$J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)=\int_a^b[f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]dx+$$

$$+\int_b^{b+\Delta b}(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int_a^{a+\pi a}(x,\alpha+\Delta\alpha)dx.$$

Осы теңдіктің оң жағындағы кейінгі екі интегралға анықталған интегралдың орта мәні жөніндегі теореманы қолданып, онан кейін теңдіктің екі жағын $\Delta\alpha$-ға бөліп, төмендегіні табамыз:

$$\frac{J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}dx+$$

$$\frac{\Delta b}{\Delta\alpha}f(b+\theta\Delta b,\alpha+\Delta\alpha)-\frac{\Delta c}{\Delta\alpha}f(a+\theta_1\Delta a,\alpha+\Delta\alpha).$$

Енді $\Delta\alpha$-ны нольге ұмтылтып осы теңдіктің екі жағынан шек алатын болсақ, онда

$$\frac{dJ}{d\alpha}=\int_b^b f'\alpha(x,\alpha)d\,x+f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha}-f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}. \qquad (9)$$

Интеграл таңбасы астында параметр бойынша дифференциалдаудың жалпы формуласы – осы (9) теңдік.

(8) және (9) формулалардың көмегімен көптеген анықталған интегралдардың мәнін табуға болады. Кейбір анықталған интегралдарды есептеп шығару үшін (8) немесе (9) формулаларды қалай қолдану керек, соны көрсету үшін бір мысал келтірейік.

*1-мысал.*

$$J(\alpha)=\int_0^a\frac{ln(1+ax)}{1+x^2}dx.$$

Бұл интегралдың жоғарғы шегі параметр $\alpha$-ға тәуелді. Сондықтан (9) формуланы қолданамыз:

$$\frac{dJ}{d\alpha}=\int_0^{\alpha}\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}dx+\frac{ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}.$$

Интеграл астында тұрған бөлшекті жеке алып, жай бөлшектер қосындысына жіктеп жазайық:

$$\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}=\frac{1}{1+\alpha^2}\left(-\frac{\alpha}{1+\alpha x}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{\alpha}{1+x^2}\right).$$

Бұдан соң

$$\int_0^{\alpha}\frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}dx=-\frac{ln(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}+\frac{\alpha arctg\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Сонымен,

$$\frac{dJ}{d\alpha}=-\frac{ln(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}+\frac{\alpha arctg\alpha}{1+a\alpha^2}+\frac{ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}=$$
$$=\frac{ln(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)}+\frac{\alpha arctg\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Бұл арадан

$$J(\alpha)=\frac{1}{2}\int\frac{ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}d\alpha+\int\frac{\alpha arctg\alpha}{1+\alpha^2}d\alpha+C,$$

мұнда С – кез келген тұрақты сан.

Кейінгі теңдіктің оң жағында тұрған екінші интегралды жеке алып, бөлімшелеп интегралдайық:

$$\int\frac{\alpha arctg\alpha}{1+\alpha^2}d\alpha=\frac{1}{2}\int arctg\alpha d\, ln(1+\alpha^2)=$$
$$=\frac{1}{2}arctg\alpha\cdot ln(1+\alpha^2)-\frac{1}{2}\int\frac{ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}d\alpha.$$

Осы интегралдың мәнін қайтадан орнына апарып қойып, төменгі теңдікті табамыз:

$$J(\alpha)=\frac{1}{2}arctg\alpha\cdot ln(1+\alpha^2)+C.$$

Енді тұрақты С-ні табайық, ол үшін бастапқы берілген интегралдағы $\alpha$-ның орнына нольді қоямыз, сонда

$$J(0)=0.$$

Сонда С тұрған кейінгі теңдіктегі $\alpha$-ның орнына нольді қойып табамыз: С=0.

Сөйтіп, іздеп отырған интеграл

$$J(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{ln(1+dx)}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}arctg\alpha\cdot ln(1+\alpha^2).$$

2. $f(x,\alpha)$ функциясын, $[a,b]$ аралығында $x$ бойынша интегралдап табамыз:

$$J(\alpha)=\int\limits_a^b f(x,\alpha)dx,$$

бұл туралы біз жоғарыда айттық. Енді осы функцияны $[\text{c},d]$ аралығында $\alpha$ бойынша интегралдасақ онда:

$$V=\int\limits_c^d J(\alpha)d\alpha=\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b f(x,\alpha)d\,x\right]d\alpha. \qquad (10)$$

Егер $f(x,\alpha)$ функцияны ең алдымен $[\text{c},d]$ аралығында $\alpha$ бойынша интегралдайтын болсақ, онда бұл интегралдаудың нәтижесі $x$-тің $[a,b]$ аралығында функциясы болып табылады:

$$F(x)=\int\limits_c^d f(x,\alpha.(\alpha d)$$

Енді осы функцияны $[a,b]$ аралығында $x$ бойынша интегралдап мынаны табамыз:

$$U=\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,\alpha)d\alpha\right]dx. \qquad (11)$$

**Теорема.** Егер функция $f(x,\alpha)$ тік төртбұрыш $R[a,b,c,d]$ облысында $x,\alpha$ бойынша үздіксіз болса, онда

$$U=V,$$

яғни

$$\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b f(x,\alpha)dx\right]d\alpha=\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,\alpha)d\alpha\right]dx. \qquad (12)$$

Бұл теореманы дәлелдеу үшін $b$-нің орнына айнымалы $t$-ні алайық (айныманы $t$, $a$ мен $b$-нің арасында үздіксіз өзгереді); сонда (12) теңдік мына түрге көшеді:

$$\int\limits_a^t dx\int\limits_c^d f(x,\alpha)d\alpha=\int\limits_c^d d\alpha\int\limits_a^t f(x,\alpha)dx. \qquad (13)$$

Кейінгі теңдіктің екі жағы да айнымалы $t$-нің функциялары, $t=a$ болғанда, бұл функциялар нольге айналып кетеді. Енді осы функциялардың $t$ бойынша алынған туындылары бір-біріне тең екендігіне көз жеткізсек, теорема дәлеленеді. Ал

$$F(x) = \int_c^d f(x,\alpha)d\alpha, \quad \Phi(t,\alpha) = \int_a^t f(x,\alpha)dx,$$

олай болса, (13) теңдік мына түрде жазылады:

$$\int_a^t F(x)dx = \int_c^d \Phi(t,\alpha)d\alpha. \tag{14}$$

(14) теңдіктің екі жағын $t$ бойынша дифференциалдап, мына формуланы табамыз:

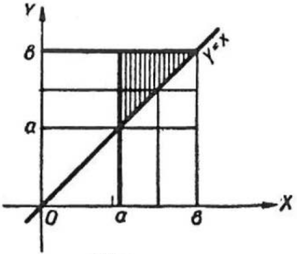
$$F(x) = \int_c^d \frac{\partial\Phi}{\partial t} d\alpha.$$

Екінші жағынан $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = f(x,\alpha)$. Сонымен,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dV}{dt}.$$

Бұл арадан мынау шығады: $U - V =$ с, мұнда $c$ $t$-ге тәуелді емес. Егер $t = a$, онда $U = 0$ және $V = 0$, олай болса, с$= 0$. Демек, $V = U$. Міне, осыны дәлелдеу керек еді.

(12) теңдікті анықталған интегралды параметр бойынша интегралдау формуласы деп атайды.



78-чертеж

3. Параметр $\alpha$-ның орнына $y$-ті алайық та, мына үш түзумен

$$y = x, \qquad x = a, \qquad y = b$$

қоршалған облысты қарайық. Бұл обыс тең бүйірлі үшбұрышты кескіндейді (78-чертеж).

Бұрынғы тік төртбұрыш облыстың орнына осы үшбұрышты қарап, мына формуланы табамыз:

$$\int_a^b dy \int_a^y f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_x^b f(x,y)dy. \tag{15}$$

Бұл формуланы *Дирихле формуласы* деп атайды.

2-мысал. $[0,1; 0,1]$ квадраттың барлық нүктелерінде анықталған мына функцияға

$$f(x,\alpha) = \frac{x^2 - \alpha^2}{(x^2 + \alpha^2)^2},$$

(13) формуланы қолданайық. Сонда

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-\alpha^2}{(x^2+\alpha^2)^2} d\alpha = \int_0^1 d\alpha \int_0^1 \frac{x^2-\alpha^2}{(x^2+\alpha^2)^2} dx. \qquad (16)$$

(16) теңдіктің сол жағындағы ішкі интегралды жеке алып интегралдайық:

$$\int_0^1 \frac{x^2-\alpha^2}{(x^2+\alpha^2)^2} d\alpha = \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{x^2+1}.$$

Сыртқы интегралдың нәтижесі мынадай болады:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Енді (16) теңдіктің оң жағын да дәл осындай етіп шығарсақ, онда оның мәні $-\frac{\pi}{4}$ болады. Осылай екі түрлі болып шығудың себебі – функция $f(x,\alpha)$ мына $x=0, \alpha=0$ нүктеде үзілісті болуы.

## § 3. Бірқалыпты жинақты интегралдар[1]

Айнымалы $x$-тің бір белгілі $a$ санынан үлкен $(x>a)$ барлық мәндері үшін функция $f(x,\alpha)$ үздіксіз болсын. Мына анықталған интегралды

$$\int_a^l f(x,\alpha)dx$$

қарайық.

Егер $l$ шексіздікке ұмтылғанда $(\alpha \text{ қандай болса да})$ осы интеграл бір тиянақты шекке ұмтылса, ол шек:

$$J(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx, \qquad (17)$$

$\alpha$-ның функциясы болып табылады. Әрине, бұл функциның $\alpha$ бойынша үздіксіз болуы міндетті емес.

Егер алдын ала берілген әрбір оң құнарсыз аз $\varepsilon$ санына аса үлкен $N$ саны сәйкес келіп, мына теңсіздіктің $l \geq N$ орындалуынан мына теңсіздік

---

[1] Бұл мәселе интегралдар теориясынан кейін жүретін, қатарлар теориясы делініп аталатын бөлімнің кейбір мәселелерімен тығыз байланысты.

$$\left|\int_{l}^{+\infty} f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon \qquad (18)$$

орындалса, онда (17) интегралды бірқалыпты жинақты интеграл деп атайды.

Бұл анықтамада $N[c,d]$ аралығындағы $\alpha$-ның барлық мәндеріне бірдей сан. Егер берілген анықтаманың негізінде біз мына функцияны

$$Un(\alpha) = \int_{a}^{a+n} f(x,\alpha)dx,$$

(мұнда $n$ – оң бүтін сан) қарайтын болсақ, бұл функция $n$ шексіздікке ұмтылғанда өзінің $I\,(\alpha)$ шегіне ұмтылады; олай болса, $I\,(\alpha)$ – үздіксіз функция.

Сонымен, егер $x$-тің мына теңсіздікті $x \geq a$ қанағаттандыратын барлық мәндері үшін, $\alpha$-ның $[c,d]$ аралығындағы барлық мәндері үшін функция $f(x,\alpha)$ үздіксіз болса және (17) интеграл бірқалыпты жинақты болса, онда осы интегралмен анықталатын $I\,(\alpha)$ функция $[c,d]$ аралығында үздіксіз болатын болды.

**1-теорема.** *Егер осы айтылған шарттар орындалса, онда параметр бойынша интегралдау формуласы былай орындалады:*

$$\int_{a}^{+\infty} dx \int_{c}^{d} f(x,\alpha)\,d\alpha = \int_{c}^{d} d\alpha \int_{a}^{+\infty} f(x,\alpha)dx \qquad (19)$$

Айталық, $l, a$ санынан артық сан болсын, онда (12) формула бойынша

$$\int_{a}^{l} dx \int_{c}^{d} f(x,\alpha)d\alpha = \int_{c}^{d} d\alpha \int_{a}^{l} f(x,\alpha)dx. \qquad (20)$$

Егер $l$ шексіздікке ұмтылса, онда (20) теңдіктің сол жағы мына санға ұмтылады:

$$\int_{a}^{\infty} dx \int_{c}^{d} f(x,\alpha)d\alpha,$$

ал оның оң жағы мына шекке ұмтылады:

$$\int_{c}^{d} d\alpha \int_{c}^{+\infty} f(x,\alpha)dx.$$

**2-теорема.** *Егер функция* $f(x,\alpha)$ *және оның параметр бойынша алынған туындысы* $f'_{\alpha}(x,a)$ *үздіксіз болса, (17) интеграл жинақты, ал мына интеграл*

$$F(\alpha)=\int\limits_{a}^{+\infty}\frac{df}{d\alpha}dx \qquad (21)$$

$[c,d]$ *аралығында бірқалыпты жинақты болса, онда параметр бойнша дифференциалдау формуласы орындалады:*

$$\frac{dJ}{d\alpha}=\int\limits_{a}^{+\infty}\frac{df(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx.$$

Теореманың шарты бойынша (21) интеграл бірқалыпты жинақты, сондықтан мына функция

$$Vn(\alpha)=\int\limits_{a}^{a+n}\frac{df(x,\alpha)}{\partial\alpha}$$

өзінің $F(\alpha)$ шегіне бірқалыпты ұмтылады. Теореманың тағы бір шарты бойынша $\frac{df}{\partial\alpha}$ үздіксіз, олай болса, *n* қандай болса да, мына теңдік орындалады:

$$Vn(\alpha)=\frac{d}{\partial\alpha}Un(\alpha).$$

Сондықтан функция $F(\alpha)$ – мына $I\,(\alpha)$ функциясының туындысы.

Енді $x=a$ нүктесінде функция $f(x,\alpha)$ шексіздікке айналатын болсын. Егер кез келген оң $\varepsilon$ саны бойынша $\alpha$-ға тәуелсіз оң $\delta$ саны табылып, осы $\delta$ санынан кіші $h$ санының барлық мәндері үшін төмендегі теңсіздік

$$\left|\int\limits_{a}^{a+h}f(x,\alpha)dx\right|<\varepsilon$$

орындалса, онда мына интегралды

$$J(\alpha)=\int\limits_{a}^{b}f(x,\alpha)dx \qquad (a<b) \qquad (22)$$

$[c,d]$ аралығында бірқалыпты жинақты деп атайды. Егер мұның нәтижесінде шыққан интеграл бірқалыпты жинақты болса, (22) интегралға (8) формуланы қолдануға болады.

Осы қаралған жағдайларға бір-екі мысал келтірейік.

1-*мысал.* $J(\alpha,\beta)=\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}.\frac{sin\beta x}{x}dx.$

Бұл интегралдағы $\alpha$-ны тұрақты деп қарап, $\beta$-ны параметр үшін алайық. Функция $\frac{\sin\beta x}{x}$ мына $x=a$ нүктесінде үздіксіз және бұл нүктедегі оның мәні $\beta$-ға тең. Егер $x$-тің оң мәндері мына $x>1$ теңсіздікті қанағаттандырса, онда $\left|\frac{\sin\beta x}{x}\right|<1$, олай болса,

$$\left|e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin\beta x}{x}\right|<e^{-\alpha x}.$$

Мына интеграл

$$\int\limits_{1}^{\infty} e^{-\alpha x}dx=-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_{1}^{\infty}=\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha}$$

жинақты, сондықтан зерттелініп отырған интеграл $I\,(\alpha,\beta\,)$ $\beta$ бойынша бірқалыпты жинақты. Енді осы интегралды $\beta$ бойынша дифференциалдасақ, онда

$$\frac{dJ}{d\beta}=\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}cos\beta xdx.$$

Мұнда $|e^{-\alpha x}\cos\beta x|<e^{+\alpha x}$. Демек, кейінгі интеграл бірқалыпты жинақты болады. Олай болса, бастапқы берілген интегралды параметр $\beta$ бойынша интеграл таңбасы астында дифференциалдауға болады:

$$\frac{dJ}{d\beta}=\frac{\alpha}{x^2+\beta^2}.$$

Интералдап, мына теңдікті табамыз:

$$J(\alpha,\beta)=arctg\frac{\beta}{a}+C,$$

С – кез келген тұрақты, оны табу үшін бастапқы интегралдағы $\beta$-ның орнына нольді қоямыз, сонда $J(\alpha,0)=0$. Енді кейінгі теңдіктегі $\beta$-ның орнына нольді қойсақ, онда С$=0$. Сонымен,

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha x}.\frac{sin\beta x}{x}dx=arctg\frac{\beta}{\alpha}.$$

Егер $\beta=1,\alpha=0$ болса, онда

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

2-*мысал.* $J(\alpha)=\int\limits_0^a \frac{f(x)dx}{\sqrt{\alpha-x}}.$

Бұл интегралдағы функция $f(x)$ және оның туындысы $f'(x)$ мына $[0,a]$ аралығында үздіксіз. Параметр $\alpha$ осы аралықта үздіксіз өзгереді. Бүкіл интегралдық функция $\frac{f(x)dx}{\sqrt{\alpha-x}}$, $x=\alpha$ нүктесінде шексіздікке айналады. Қарастырып отырған интегралға бірден параметр бойынша интеграл таңбасы астында дифференциалдау формуласын қолдануға болмайды. Әуелі бұл интегралға мынадай $x=\alpha t$ ауыстыру жүргізейік, сонда

$$J(\alpha)=\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{\alpha}f(\alpha t)dt}{\sqrt{1-t}}. \tag{23}$$

Бұл арадан

$$\frac{dJ}{d\alpha}=\int\limits_0^1 \frac{\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}f(\alpha t)+t\sqrt{\alpha}f'(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}dt. \tag{24}$$

(24) интеграл бірқалыпты жинақты, өйткені ол мынау интегралмен

$$\int\limits_0^1 \frac{Mdt}{\sqrt{1-t}},$$

салыстырмалы, мұнда М – тұрақты. Қайтадан бастапқы айнымалы $x$-ке көшіп табамыз:

$$\frac{dJ}{d\alpha}=\int\limits_0^\alpha \frac{f(x)+2xf'(x)}{2\alpha\sqrt{\alpha-x}}dx.$$

Сөйтіп, бастапқы берілген интегралды параметр бойынша интеграл таңбасы астында дифференциалдау заңды.

3-*мысал.* $\int\limits_0^\infty \frac{arctg\alpha x}{x(1+\beta^2x^2)}dx.$

Мұнда $\beta$-ны тұрақты деп қарап, $\alpha$-ны параметр үшін аламыз, сонда

$$J(\alpha)=\int\limits_0^\infty \frac{arctg\alpha x}{x(1+\beta^2x^2)}dx.$$

Енді параметр бойынша дифференциалдау формуласын қолданып, мына теңдікті табамыз:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+\beta^2x^2)(1+\alpha^2x^2)}.$$

Интеграл таңбасы астындағы функцияны жай бөлшектердің қосындысына жіктеп жазамыз:

$$\frac{1}{(1+\beta^2x^2)(1+\alpha^2x^2)} = \frac{Ax+B}{1+\beta^2x^2} + \frac{Cx+D}{1+\alpha^2x^2}$$

немесе

$$1 + (Ax+B)(1+\alpha^2x^2) + (Cx+D)(1+\beta^2x^2).$$

Белгісіз коэффициенттер *A, B, C, D*-лерді табу үшін, алдымыздағы теңбе-теңдіктегі *x*-тің орнына әуелі $\frac{1}{i\beta}$ онан кейін $\frac{1}{i\alpha}$ қоямыз. Сонда

$$A = 0; \qquad B = \frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}; \quad C = 0; \quad D = \frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}.$$

Ал

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+\beta^2x^2} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+\alpha^2x^2} =$$

$$= \frac{\beta}{\beta^2-\alpha^2} arctg\,\beta x\Big|_0^\infty + \frac{d}{\alpha^2-\beta^2} arctg\,\alpha x\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta^2} - \frac{\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right).$$

Енді $\alpha$ бойынша интегралдаймыз, сонда

$$J(\alpha) = \frac{\pi}{4}\left[ln(\alpha^2-\beta^2) - ln\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right] + C$$

немесе

$$J(\alpha) = \frac{\pi}{2} ln(\alpha+\beta) + C.$$

Енді мұндағы тұрақты $C$-ны анықтау үшін бастапқы берілген интегралдағы $\alpha$-ның орнына нольді қоямыз, сонда $J(o) = 0$. Кейінгі теңдіктегі $\alpha$-ның орнына нольді қойып мыналарды табамыз:

$\frac{\pi}{2} lu\beta + C = 0$ немесе $C = -\frac{\pi}{2} lu\beta.$

Сонымен,

$$J(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{arc\,\mathrm{tg}\,\alpha x}{x(1+\beta^2x^2)}dx = \frac{\pi}{2} ln\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

## § 4. Эйлер интегралдары

1. Мына түрдегі интегралды қарайық:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}dx, \qquad (25)$$

мұнда $p,q>0$.

Бұл интегралды *бірінші текті Эйлер интегралы* деп атайды. Осы Эйлер интегралы екі айнымалы $p$ және $q$ параметрлерінің функциясын сипаттайды, сондықтан бұл интегралды *Бета-функция* деп те атайды.

Біз $p$ мен $q$-дің барлық оң мәндері үшін (25) интегралдың жинақтылығын[1] көрсеттік (III тарау, § 4, I-мысал).

Енді осы интегралдың қасиеттерін талдайық. Интегралдағы айнымалы $x$-ті былай ауыстырсақ: $x=1-t$, онда

$$B(p,q)=B(q,p),$$

былайша айтқанда, бета-функция $p$ және $q$ бойынша симметриялы.

(25) интегралдағы айнымалы $x$-ті енді былай ауыстырайық: $x=\frac{t}{1+t}$, сонда

$$B(p,q)=\int_0^\infty \frac{t^{p-1}dt}{(1+t)^{p+q}}.$$

Бұл теңдіктің оң жағындағы интегралды екі жарып жазайық та

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}dt}{(1+t)^{p+q}}=\int_0^1+\int_1^\infty,$$

екінші интегралдағы $t$-ні былай ауыстырайық $t=\frac{1}{z}$. Сонда, ол екінші интеграл мынадай болады:

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}dt}{(1+t)^{p+q}}=\int_0^1 \frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}dz.$$

Сонымен, түптеп келгенде

---

[1] Егер $p,q$ параметрлердің біреуі нольден кем болса, онда бұл интеграл жинақсыз болады.

$$B(p,q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{q-1}}{(1+t)^{p+q}} dx.$$

(25) интегралды бөлімшелеп интегралдап, төмендегіні табамыз:

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{q-1} d\frac{x^p}{p} =$$

$$= \frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p} \Big|_0^1 + \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^p \cdot (1-x)^{q-2} dx =$$

$$= \frac{q-1}{p} \int_0^1 (1-x)^{q-2} dx [x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)] =$$

$$= \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2} dx - \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx =$$

$$= \frac{q-1}{p} B(p,q-1) - \frac{q-1}{p} B(p,q).$$

Бұл арадан

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p,q-1) \qquad (q-1) \qquad (26)$$

Дәл осы сияқты

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p-1,q) \qquad (p>1). \qquad (27)$$

Айталық, $q$ натурал $n$ санына тең болсын, онда

$$B(p,n) = \frac{n-1}{p+n-1} \cdot \frac{n-2}{p+n-2} \ . \ . \ . \ \frac{1}{p+1} B(p,1),$$

ал

$$B(p,1) = \int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{1}{p}.$$

Сондықтан

$$B(n,p) = B(p,n) = \frac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2)\ .\ .\ .(p+n-1)}. \qquad (28)$$

Егер $p$ натурал $m$ санына тең болса, онда бұл арадан

$$B(m,n) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

2. Енді келесі меншіксіз интегралды

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx \qquad (29)$$

қарастырайық.

Бұл интегралды *екінші текті Эйлер интегралы* деп атайды.

Барлық $p > 0$ үшін (29) интеграл жинақты. Оны мынадан байқауға болады: айталық, $\alpha$ бірден артық $(\alpha > 1)$ сан болсын, онда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{p-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = lim \frac{x^{p+\alpha-1}}{e^{x}} = 0$$

Егер $p \leq 0$ болса, онда (29) интеграл жинақсыз болады.

Сонымен, барлық $p > 0$ үшін (29) интеграл айнымалы параметр $p$-нің бір тиянақты функциясын анықтайды. Міне, осы функцияны *«Гамма-функция»* деп атайды.

Бұл екі – бета, гамма – функциялардың математикалық анализдің түрлі салаларындағы атқаратын рольдері орасан зор.

Енді бета-функция мен гамма-функцияның арасындағы байланысты және гамма-функцияның кейбір қасиеттерін қарайық.

(29) интегралдағы айнымалы $x$-ті былай ауыстырайық:

$$x = ln\frac{1}{z} \text{ сонда } \Gamma(p) = \int_0^1 \left(ln\frac{1}{z}\right)^{p-1} dz, \text{ал } ln\frac{1}{z} = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)$$

олай болса,

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty} n^{p-1} \int_0^1 \left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)^{p-1} dz.$$

Енді кейінгі интегралдағы $z$-ті былай ауыстырайық: $z = t^n$, онда

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty} n^{p} \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{p-1}dt.$$

(28) теңдікті еске, алып, мына формуланы табамыз:

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to\infty} n^{p} \cdot \frac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}. \qquad (30)$$

Бұл формуланы *Эйлер-Гаусс формуласы* деп атайды.

Енді (29) интегралдағы айнымалы $x$-ті былай ауыстырайық: $x = tz,$ сонда

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int_0^\infty z^{p-1} e^{-tz} dz.$$

Бұл арада p-нің орнына p+q-ді, ал t-нің орнына 1+t-ні қояйық, сонда

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^\infty z^{p+q-1} e^{-(1+t)z} dz.$$

Осы теңдіктің екі жағын $t^{p-1}$ -ге көбейтіп, сонан кейін 0-ден ∞-ке дейін $t$ бойынша интегралдап табамыз:

$$\Gamma(p+q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}dt}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^\infty t^{p-1}dt \int_0^\infty z^{p+q-1} \cdot e^{-(1+t)z} dz$$

Бета-функцияның екінші түрдегі анықтауын еске алып, кейінгі теңдікті былай жазуға болады:

$$\Gamma(p+q) \cdot B(p,q) = \int_0^\infty z^{p+q-1} e^{-z} dz \int_0^\infty t^{p-1} e^{-tz} dt =$$

$$= \int_0^\infty z^{p+q-1} \cdot e^{-z} \cdot \frac{\Gamma(p)}{z^p} dz = \Gamma(p) \int_0^\infty z^{q-1} \cdot e^{-z} dz = \Gamma(p) \cdot \Gamma(q)$$

Бұл арадан

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \qquad (31)$$

(29) теңдіктен шығады:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = 1$$

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x} dx,$$

бөлімшелеп интегралдап табамыз:

$$\Gamma(p+1) = -e^{-x} x^p \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$$

немесе

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \qquad (32)$$

Осы формуланың негізінде

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1),$$
$$\Gamma(p-1) = (p-2)\Gamma(p-2),$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$\Gamma(p-n)=(p-n-1)\Gamma(p-n-1).$$

Сонымен,

$$\Gamma(p+1)=p(p-1)(p-2)\ .\ .\ .\ 2\cdot 1\cdot \Gamma(1).$$

Егер р натурал санға тең болса, яғни $p = n$ онда

$$\Gamma(n+1)=n!$$

(32) формуладан шығады:

$$\Gamma(p+n)=(p+n-1)(p+n-2)\ .\ .\ .(p+1)p\Gamma(p). \qquad (33)$$

Мысал келтірейік.

Мысал. Мына интегралда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{p-1}\varphi\ cos^{q-1}\varphi\ d\ \varphi$$

$(p_1 q > 0)$ былай ауыстыру жасаймыз:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{p-1}\varphi cos^{q-1}\varphi\ d\ \varphi = \int_0^1 x^{p-1}(1-x^2)^{\frac{q}{2}-1}dx.$$

Енді оң жақта тұрған интегралға тағы да ауыстыру жүргіземіз: $x^2 = z$, сонда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{p-1}\varphi cos^{q-1}\varphi\ d\ \varphi = \frac{1}{2}\int_0^1 z^{\frac{p-1}{2}}(1-z)^{\frac{q-1}{2}}\ dz = \frac{1}{2}B\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right).$$

(31) формула бойынша

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{p-1}\varphi cos^{q-1}\varphi\ d\ \varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}.$$

### *Жаттығулар*

Келесі интегралдарды есептеп шығарындар:

1. $\int_0^1 \frac{arc\ tg\ \alpha\ x}{x\sqrt{1-x^2}}dx,$ *Жауабы*: $\frac{\pi}{2}ln\left(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}\right).$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{arc\ tg\ (\alpha\ tg\ x)}{tg\ x}dx.$ *Жауабы*: $\frac{\pi}{2}ln(1+\alpha).$

3. $\int_0^1 \frac{ln(1+\alpha\, x^2)}{x\sqrt{1-x^2}}dx;\ |\alpha|<1.$ *Жауабы*: $-(\arcsin\alpha)^2$.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}dx.$ *Жауабы*: $\frac{\pi^2}{8}\ \frac{(arc\cos\alpha)^2}{2}$

5. $\int_0^{\infty} \frac{ln(1+a^2x^2)}{b^2+x^2}dx.$ *Жауабы*: $\frac{\pi}{8}ln\,(ab+1)$.

6. $\int_0^{\infty} \frac{arc\ tg\ \alpha\ x}{x\ (1+x^2)}dx.$ *Жауабы*: $\frac{\pi}{2}ln(1+\alpha)$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\cdot\frac{dx}{\sin x}.$

Шешуі. Бұл интегралдың мәнін табу үшін біз алдымен мына интегралды

$$\int_0^1 \frac{d\,\alpha}{a^2-b^2\alpha^2sin^2x}$$

қараймыз:

$$\int_0^1 \frac{d\,\alpha}{a^2-b^2\alpha^2sin^2x}=\frac{1}{2\,a\,b\sin x}ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}$$

функция $f(x,\alpha)=\frac{1}{a^2-b^2\alpha^2sin^2x}$ мына $\left[0,\frac{\pi}{2};0{,}1\right]$ тік төртбұрышта үздіксіз, олай болса, бұл функцияға параметр бойынша интегралдау формуласын қолдануға әбден болады.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^1 \frac{d\,\alpha}{a^2-b^2\alpha^2sin^2x}=\int_0^1 d\,\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2-b^2\alpha^2sin^2x}.$$

Бұл арадан

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\cdot\frac{dx}{\sin x}=2\,a\,b\int_0^1 d\,\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2-b^2\alpha^2sin^2x}.$$

Ал

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2-b^2\alpha^2sin^2x}=\frac{\pi}{2\,a\sqrt{a^2-b^2a^2}}.$$

Ендеше

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\cdot\frac{dx}{\sin x}=\pi b\int_0^1\frac{d\,\alpha}{\sqrt{a^2-b^2\alpha^2}}=\pi arcsin\frac{b}{a}.$$

8. $$\int_0^\infty\frac{ln(1+a^2x^2)ln(1+b^2x^2)}{x^2}dx.$$

Жауабы: $2\pi[(a+b)ln(a+b)-alna-blnb]$.

9. $$\int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin\alpha x\cdot\sin\beta x}{x^2}dx.$$

$k>0, \alpha \text{ мен } \beta -$ кез келген тұрақты шамалар.

Жауабы:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}arc\,tg\frac{\alpha+\beta}{k}-\frac{\alpha-\beta}{2}arc\,tg\frac{\alpha-\beta}{k}+\frac{k}{4}ln\frac{k^2+(a-\beta)^2}{k^2+(\alpha+\beta)^2}.$$

10. Мына интегралдың $\int_0^1\left(ln\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx, (p>0)$ гамма-функцияға тең екенін дәлелдеу керек.

11. Теориялық физиканың кейбір мәселелерінде кездесетін төмендегі екі интегралды есептеп шығарыңдар:

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx;\quad \int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}dx,$$

$>0, n-$ бүтін сан.

*Нұсқау:* бұл интегралдарды есептеп шығару үшін келесі екі интегралды

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}};\quad \int_0^\infty e^{-ax^2}\,x\,d\,x=\frac{1}{2a}$$

пайдалану керек.

12. Мына интегралдың

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\,d\,x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x\,d\,x$$

гамма-функция арқылы өрнектеу керек.

13. Мына интегралды

$$J(y)=\int_0^\infty\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

1-ден ∞-ке дейін интеграл таңбасы астында параметр бойынша интегралдауға бола ма?

# XII ТАРАУ
# ИНТЕГРАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУДІҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЖӘНЕ ФИЗИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕРГЕ ҚОЛДАНЫЛУЫ

## § 1. Ауданның анықтамасы

Көпбұрышты облыс немесе тек қана көпбұрыш деп бір немесе бірнеше тұйық сынық сызықтармен қоршалған жазық фигураны айтамыз. Мұндай фигура үшін аудан ұғымы мектепте оқылған геометрия курсынан әрқайсымызға белгілі. Сондықтан осы ұғымды негізге аламыз.

Жазықтықта жатқан бір үздіксіз тұйық сызықты[1] қарайық. Бұл тұйық сызықты (С) деп белгілейік.

Осы айтылған бейнелі тұйық қисық бүкіл жазықтықты екі – ішкі және сыртқы – облысқа бөлетінін француздың атақты математигі К. Жордан көрсетті.

Қисық сызық (С)-ні облыстың жиегі немесе *контуры* деп атайды.

Тұйық (С) қисық сызықпен қоршалған облысты, яғни фигураны D арқылы белгілейік.

$D$ облысының ішінде жатқан түрлі-түрлі көпбұрыштарды қарайық, бұл көпбұрыштардың жиынын { арқылы, ал олардың аудандарының шамаларын p деп белгілейік. Мұнымен бірге D облысын өздерінің ішінде тұтып тұратын түрлі-түрлі көпбұрыштар жиынын {B} арқылы, ал олардың аудандарының шамаларын $P$ деп белгілейік. Сонда, көпбұрыштар қандай болса да, әрқашан $p < P$, бұл теңсіздіктен біз мынадай қорытындыға келеміз: егер $p$ сандарынан тұратын жиынды {p}, ал P сандарынан тұратын жиынды {P} деп белгілесек, онда жиын {p} жоғары жағынан {P} жиынның кез келген элементімен шектелген. Сондықтан {p} жиынының дәл жоғарғы шекаралығы болады, оны $u$ деп белгілейік. Сонда $u \leq P$.

Жиын {P} төменгі жағынан {p} жиынының кез келген элементімен шектелген, сондықтан {P} жиынының дәл төменгі шекаралығы болады. Оны $v$ деп белгілейік. Мұнда $v \geq p$. Ал $u$

---

[1] Үздіксіз қисық деп координаталары (x және y), параметр t-нің үздіксіз $\varphi(t)$ және $\varphi(t)$ функциялары арқылы өрнектелетін жазықтық нүктелерінің жиынын айтамыз. Мұнда және былай: $t$-нің түрлі екі мәніне қисықтың түрлі екі нүктесі сәйкес келуі керек.

мен $v$-нің арасындағы қатыс былай болуы керек: $u \leq v$. $u$ санын $D$ облысының ішкі, $v$ санын оның сыртқы ауданы деп атауға болады.

Егер осы екі дәл шекаралық $v = \sup\{p\}$ мен $v = inf\{P\}$ бір-бірімен тең болса, онда $D$ облысын *квадратталынатын фигура* деп атайды, ал $u = v = Q$ санын осы фигураның ауданы үшін алады.

*Облыс D квадратталынатын фигура болу үшін кез келген оң ε санына сәйкес, облыс D-ні өздерінің ішінде тұтып тұратын көпбұрыш B және облыстың ішінде жататын көпбұрыш A табылып, осы көпбұрыштардың аудандарының айырмасы P–p берілген ε санынан кіші болуы қажетті және жеткілікті.*

Егер облыс $D$ – квадратталынатын фигура болса, онда $p > u - \frac{\varepsilon}{2}$, ал $P < u + \frac{\varepsilon}{2}$. Бұл арадан $P - p < \varepsilon$. Сонымен, біз қажеттілігін дәлелдедік.

Жеткіліктілігін мына теңсіздіктерден

$$p \leq u \leq v \leq P$$

шығаруға болады.

*(C)* – облыс $D$-нің контуры болсын. Егер облыс $D$ квадратталынатын болса, онда контур *(C),* $(B - A)$ көпбұрыштың ішінде жатады, ал бұл көпбұрыштың ауданы мына теңсіздікті $P - p < \varepsilon$ қанағаттандырады, өйткені көпбұрыш $(B - A)$, $A$ мен $B$ көпбұрыштарының контурларының арасында жатады.

Контур *(C),* ауданы кез келген оң құнарсыз аз $\varepsilon$ санынан кіші көпбұрыш $(L)$ -нің ішінде жатады деп ұйғарайық. Егер $(L)$-дің ауданы R деп белгілесек, онда $R < \varepsilon$. Ал екінші жағынан

$$P - p = R < \varepsilon.$$

Егер берілген $(K)$ қисығын қоршап тұрған көп бұрыштың ауданы мейлінше (құнарсыз) аз болса, онда $(K)$ сызығының ауданы ноль болады дейміз. Осы анықтамадан кейін, облыстың квадратталыну шартын екінші түрде былай тұжырымдауға болады.

Облыс $D$ квадратталынатын фигура болу үшін оның контуры *(C)*-нің ауданы ноль болуы қажетті және жеткілікті шарт.

Ашық $y = f(x), a \leq x \leq b$ немесе $x = \varphi(y), c \leq y \leq d$ теңдеумен берілген әрбір үздіксіз қисықтың ауданы ноль болады.

$\varepsilon > 0$ алдын ала берілген оң құнарсыз аз сан болсын. Онда осы $\varepsilon$ бойынша $\delta > 0$ санын тауып алып, $[a, b]$ аралығын, әрбір бөлшек сегменттің ұзындығы $\delta$ санынан кіші болатындай етіп $n$

бөлшек сегменттерге бөлеміз. Функция $f(x)=y$, $[a,b]$ аралығында үздіксіз болғандықтан, оның әрбір бөлшек сегменттегі тербелісі $\omega_i = M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ болады, мұнда

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), \ M_i = \sup_{[x_i, \ x_{i+1}]} f(x).$$

Олай болса, бүкіл қисық $y=f(x)$ мына $[x_i, x_{i+1}; m_i, \ M_i]$ $(i = 0,1,2,. \ . \ . \ , n-1)$ тік төртбұрыштардан тұратын фигурамен айнала қоршалынады және

$$P - p = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_l < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Сонымен, $y=f(x)$ теңдеумен кескінделген үздіксіз қисықтың ауданы нольге болатын болды.

Енді параметрлік теңдеулермен берілген қисықты қарайық:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$
$$\alpha \leq t \leq \beta \tag{1}$$

Егер $\varphi(t)$ және $\psi(t)$ функцияларының бүкіл $[\alpha, \beta]$ аралығында үздіксіз $\varphi'(t)$ және $\psi'(t)$ туындылары болса, бұл параметрлік теңдеулермен берілген сызықты *біртегіс қисық* деп атайды. Осы тұжырымдалған сөйлемді геометрия тілімен былай айтуға болады: әрбір нүктесінде бағытын үздіксіз өзгертіп отыратын жанамасы бар қисықты *біртегіс қисық* деп атайды.

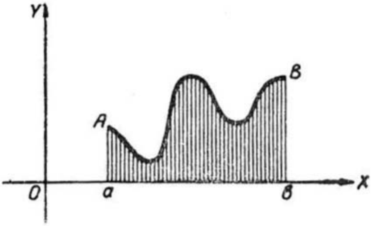
Егер біртегіс қисық тұйық болса, онда

$\varphi'(\alpha) = \ \varphi'(\beta), \quad \psi'(\alpha) = \psi'(\beta)$ болады.

Біртегіс қисықтың ауданы да ноль болады.

## § 2. Жазық фигуралардың ауданын интеграл арқылы өрнектеу

1. Жоғарғы жағынан $y=f(x)$ теңдеумен берілген үздіксіз қисықпен, төменгі жағынан $X$ осімен, ал бүйір жақтарынан $x=a$ және $x=b$ түзулермен қоршалған жазық фигуаның ауданын қалай табуды біз білеміз (VIII тарау, §1). Мұндай фигураның ауданы тең болады (79-чертеж):



79-чертеж

$$U = \int_a^b f\,(x)\,dx = \int_a^b y\,d\,x. \qquad (2)$$

Егер фигура жоғарғы жағынан $y = f_1(x),\ (a \leq x \leq b)$ қисықпен, төменгі жағынан $y = f_2(x),\ (a \leq x \leq b)$ қисықпен бүйір жақтарынан $x = a$ түзулермен қоршалған болса, мұндай фигураның ауданы былай өрнектеледі:

$$U = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx. \qquad (3)$$

Фигураны жоғарғы жағынан қоршап тұрған қисық параметрлік теңдеулермен берілсін:

$$\begin{matrix} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{matrix} \ (\alpha \leq t \leq \beta) \qquad (1)$$

Мұнда біз $\varphi(t), \psi(t)$ және $\varphi'(t)$ функцияларын $[\alpha, \beta]$ аралығында үздіксіз, ал және $\psi(t)$, $\varphi'(t)$ функцияларын $(\alpha, \beta)$ интервалында оң деп ұйғарамыз. Одан басқа $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$ болуы қажет.

Айнымалы параметр $t$ $\alpha$-ден $\beta$-ға дейін үздіксіз өзгергенде абсцисса $x = \varphi(t)$ $a$-дан $b$-ге дейін өсуі керек.

Мұндай фигураның ауданы (2) формуламен анықталады деп біз жоғарыда айттық. Айнымалы параметр $t$-нің $a$-дан $\beta$-ға дейін өсуімен бірге $x = \varphi(t)$ функция да $a$-дан $b$-ға дейін үдейтін болғандықтан, (2) интегралдағы айнымалы $x$-ті ауыстыруға әбден болады. Сөйтіп, фигураның ауданы

$$U = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (4)$$

болады.

Егер $(\alpha, \beta)$ интервалында функция $\psi(t)$ оң болып, ал туынды $\varphi'(t)$ теріс болса және $\varphi(\alpha) = b,\ \varphi(\beta) = a$, онда параметр $t$ $a$-дан $\beta$-ға дейін өскенде, функция $x = \varphi(t)$ $b$-ден $a$-ға дейін кемиді, Бұл жағдайда фигураның ауданы:

$$U = \int_\beta \psi(t)\,\varphi'(t)dt. \qquad (5)$$

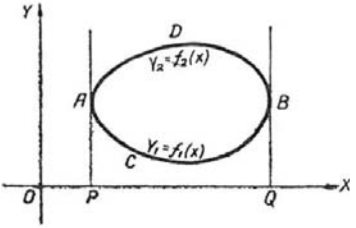
болады.

Сонымен,

$$U = \pm \int_{a}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (6)$$

Егер параметр $t$ мен абсцисса $x$ бір бағытта өзгеретін болса, онда интеграл таңбасы алдында плюс алынады, ал егер олардың өзгеру бағыты бір-бірімен қарама-қарсы болса, онда интеграл алдына минус таңбасы алынады.

2. Енді тұйық сызықпен қоршалған фигураның ауданын қарайық. Егер фигураның контуры *(K)* координаталар осьтеріне параллель түзулермен екі-ақ нүктеде (одан артық емес) қиылысатын болса, онда мұндай фигураның ауданын табу үшін қисыққа y осіне параллель етіп *AP* және *BQ* жанамаларды жүргіземіз. Сонда фигураны қоршап тұрған контур *(K)* екіге бөлінеді: біреуі *ACB*, оның кез келген ординатасын $y_1$ деп, екіншісі *ADB*, оның кез келген ординатасын $y_2$ арқылы белгілейік (80-чертеж). Былай ұйғарайық:



80-чертеж

$$OP = a, \qquad OQ = b, \qquad b > a.$$

Қарастырып отырған фигураның ауданы мына формуламен

$$U = \int_{a}^{b} (y_2 - y_1)dx.$$

өрнектелетінін 80-чертеждің өзінен-ақ көрініп тұр. Мұнда $y_1$ мен $y_2$ қисықтың мына түрде

$$F(x, y) = 0 \qquad (6')$$

берілген теңдеуінен табуға болады. Ол үшін бұл теңдеуді y бойынша шешу керек. Келесі екі теңдеу системасын

$$F(x, y) = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\text{ә} F\ (x, y)}{\text{ә}\, y} = 0$$

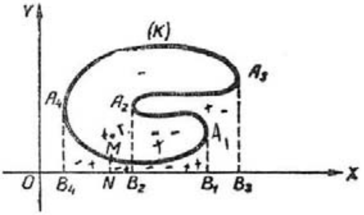
*x* бойынша біріктіріп шешіп $a$ мен $b$-ні табамыз.

Көбінесе $(6')$ теңдеуді y бойынша тікелей шешу мүмкін болмай қалады. Сондықтан фигураны қоршап тұрған контурдың теңдеуін $(6')$ түрде қарау әрқашан ыңғайлы бола бермейді.

Фигураны қоршап тұрған контур (К), координаталар осьтеріне параллель түзулермен екіден артық нүктелерде қиылысатын жағдайды қарайық (81-чертеж).

Контурдың теңдеуі параметрлік түрде (1) теңдеулермен берілсін.

$\varphi(t), \psi(t)$ функциялар жөнінде келесі ұйғаруларды жасаймыз:



81-чертеж

1) $\varphi(t)$ және $\psi(t)$, $[t_0, T]$ аралығында үздіксіз және осы аралықта үздіксіз туындылары бар функциялар;

2) Параметр $t, t_0$-ден $T$-ге дейін өзгергенде нүкте $[\varphi(t), \psi(t)]$ контурды бір ғана рет оң бағытта әліптейді, яғни контурмен қоршалынған облыс D қозғалыс бағытына қарағанда сол жақта қалып қойып отырады;

3) туындылар $\varphi'(t)$ және $\psi'(t)$ бірнеше рет қана нольге айналады.

Кейінгі ұйғаруды мына мағынада түсінуге болады: параметр $t$-нің тек мына екі $t_0$ және $T$ мәндерінен басқа әр түрлі мәндеріне контур *(К)*-ның әр түрлі нүктелері сәйкес келеді және

$$\varphi(t_0) = \varphi(T).$$
$$\psi(t_0) = \psi(t).$$

Контурдың М нүктесі параметрдің $t_0$ және $T$ мәндеріне сәйкес келсін. Контурды бірнеше $MA_1, A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_4$, $A_4M$ доғаларға бөлейік. Осы доғалардың бойында функция $\varphi(t)$ біркелкі өзгеретін болсын. $A_1, A_2, A_3, A_4$ нүктелерге сәйкес келетін параметр $t$-нің мәндері $t_1, t_2, t_3, t_4$ мына тәртіппен

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < T$$

орналассын.

Жоғарыда келтірілген (6) формулаға сүйене отырып мыналарды табамыз:

$$\text{аудан } NMA_1B_1 = \int_{t_0}^{t_1} \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

$$\text{аудан } B_2A_2A_1B_1 = -\int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

$$\text{аудан } B_2A_2A_3B_3 = \int_{t_2}^{t_3} \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

$$\text{аудан } B_4A_4A_3B_3 = -\int_{t_3}^{t_4} \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

$$\text{аудан } B_4MAN = \int_{t_4}^{T} \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Егер осы теңдіктерді қоссақ, сонда іздеп отырған аудан шығады:

$$U = -\int_{t_0}^{T} \psi(t)\varphi'(t)dt. \tag{8}$$

Егер фигура толығымен немесе жартылай $X$ осінің төменгі жағында жататын болса, онда координаталардың бас нүктесін көшіріп, облысты $X$ осінің жоғарғы жағында жататындай жағдайға келтіреміз.

$x$ пен $y$-тің ролін ауыстырып, фигураның ауданын былай өрнектеуге де болады:

$$U = +\int_{t_0}^{T} \varphi(t)\psi'(t)dt. \tag{9}$$

(8) және (9) формулаларды бір-бірімен қосып, төмендегі формулаларды табамыз:

$$U = \frac{1}{2}\int_{t}^{T} [\varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t)]dt. \tag{10}$$

немесе

$$U = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} (xdy - ydx). \tag{10'}$$

Мысал келтірейік.

1-мысал. Астроиданың ауданын табу керек.

Астроида деп төмендегі параметрлік теңдеулермен

$$x = a\,cos^3 t$$
$$y = a\,sin^3 t$$

берілген қисықты айтады (82-чертеж). (5) формуланы қолданып табамыз:

$$U = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\, sin^3 t \cdot 3a\, cos^2 t \cdot \sin t\, dt =$$

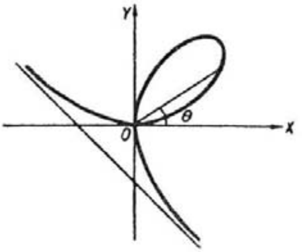
$$= -12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 t\, cos^2 t\, dt =$$

$$= -12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 t\, dt + 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^6 t\, dt =$$

$$= -\left(-\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) 12a^2 = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

2-мысал. Декарт жапырағы тұйық бөлігінің ауданын табу керек. Декарт жапырағы деп мына

$$x^3 + y^3 = 3\,axy \qquad (11)$$



83-чертеж

теңдеумен берілген қисықпен қоршалған фигураны айтады (83-чертеж). Бұл ауданды табу үшін (11) теңдеуді параметрлік түрге көшіру керек. Параметр t үшін $\theta$ бұрышының тангенсін аламыз, яғни $t = tg\theta$ мұнда $\theta$ бұрышы 0-ден $\frac{\pi}{2}$-ге дейін өзгереді, олай болса, параметр $t$ 0-ден ∞-ке дейін өзгереді. Мұнда $tg\theta = \frac{y}{x} = t$, бұл арадан

$$y = tx.$$

y-тің осы мәнін (11) теңдеуге апарып қойып табамыз:

$$x^3 + t^3x^3 = 3ax^2t,$$

бұл арадан

$$x = \frac{3at}{1+t^3}; \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Енді (10) немесе ($10^1$) формуланы қолданамыз:

$$dx = 3a\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}dt; \quad dy = 3a\cdot\frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}dt.$$

$$U = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\infty}\frac{t(2t-t^4)-t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}dt =$$

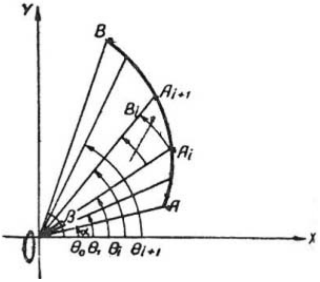
$$=\frac{9a^2}{2}\int_0^\infty \frac{t^2dt}{\left(1+t^3\right)^2}=-\frac{3a^2}{2}\left(\frac{1}{1+t^3}\right)\Big|_0^\infty=\frac{3}{2}a^2.$$

3. Сектор деп бір үздіксіз $AB$ қисықтың доғасымен, екі $OA$ және $OB$ радиус-векторлармен қоршалған фигураны айтады (84-чертеж). Қисық $AB$ поляр координаталарда мына

$$p=f(\theta)$$

теңдеумен берілсін.

$\alpha$ және $\beta$, $OA$ мен $OB$ радиус-векторлардың поляр осьпен жасайтын бұрыштары болсын.



84-чертеж

$f(\theta)$ $[\alpha,\beta]$ аралығында берілген оң және үздіксіз функция.

$\alpha$ мен $\beta$-ның арасындағы мына мәндерді алып:

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\cdot\ \cdot\ \cdot<\theta_i<\theta_{i+1}<\cdot\ \cdot\ \cdot\ \ \theta_{n-1}<\theta_n=\beta,$$

осы бұрыштарға сәйкес радиус-векторларды жүргізсек, онда сектор *OAB n* бөлшек секторларға бөлінеді. Осы секторлардың ішінен біреуін, мәселен $OA_iA_{i+1}$ секторын алайық. Центрлік $\Delta\theta=\theta_{i+1}-\theta_i$ бұрышын өзгертпей қисықтың $A$ $A_iA_{i+1}$ доғасын, радиусы мына санға $OA_i=f(\theta_i)$ тең шеңбердің доғасымен ауыстырайық. Сонда $OA_iA_{i+1}$ сектордың орнына біз дөңгелек секторы $OA_iB_i$-ді аламыз. Дөңгелек сектордың ауданы тең болады:

$$\frac{1}{2}f^2(\theta_i)\Delta\theta_i.$$

Осындай дөңгелек секторлардың саны *n–1* және олардың аудандарының қосындысы болады:

$$\sigma=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}f^2(\theta_i)\Delta\theta_i. \qquad (12)$$

(12) қосынды OAB сектордың ауданының жуық мәнін береді, оның дәл мәнін табу үшін барлық $\Delta\theta_i$-лерді нольге ұмтылтып, қосындыдан шек аламыз. Бұл қосынды интегралдық қосынды және оның шегі бар, өйткені $f(\theta)$ – үздіксіз функция.

Сонымен, сектордың ауданы мынадай болады:

$$U=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^\beta p^2d\theta. \qquad (13)$$

Мысал. Мынадай теңдеумен

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \quad (AC - B^2 > 0, \;\; C < 0)$$

берілген эллипстің ауданын табу керек.

Поляр координаталарды енгізіп, яғни мына қатыстарды:

$$x = p\cos\theta$$

$$y = p\sin\theta$$

пайдаланып, эллипстің берілген теңдеуін мына түрге келтіреміз:

$$p^2 = \frac{1}{A\ cos\,^2\theta + 2B\ \cos\theta\ \sin\theta + C\ sin^2\theta}.$$

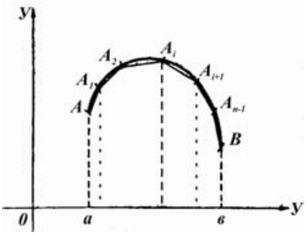
Енді (13) формуланы қолданып табамыз:

$$U = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,\theta}{A\ cos^2\theta + 2B\sin\theta\ \cos\theta + C\ sin^2\theta} =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,tg\,\theta}{Ctg^2\theta + 2Btg\theta + A} = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

## § 3. Доғаның ұзындығы

1. Қисықтың доғасының ұзындығы деп нені айтады, алдымен соған түсінік берейік.



85-чертеж

*AB* – жазықтықта жатқан бір қисық сызық болсын. Оның ұзындығының анықтамасын беру мақсатымен *AB* доғасын *n* бөлікке бөлеміз, $A = A_0$, $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, $A_n = B$ бөлу нүктелері болсын. Осы бөлу нүктелері арқылы $A_0$, $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, $A_n$ кесінділерін жүргізіп, қисыққа іштей сызылған сынық сызық шығарамыз (85-чертеж). Жаңағы жүргізілген кесінділерді сынық сызықтың звенолары деп атайды.

*Егер осы звенолардың саны шексіздікке ұмтылып, әрбір звеноның ұзындығы нольге ұмтылғанда сынық сызықтың ұзындығы бір тиянақты шекке ұмтылса, ол шекті АВ доғасының ұзындығы деп атайды.*

Осы айтылған шек әрбір қисық үшін бола бермейді, олай болса әрбір қисықтың ұзындығы бола бермейді.

Егер қисықтың ұзындығы болса, онда қисықты *түзетілетін қисық* деп тайды.

Қисық *AB, XOY* жазықтығында $y = f(x)$ теңдеумен берілсін. Мұнда $f(x)$ $[a, b]$ аралығында анықталған үздіксіз және үздіксіз $f'(x)$ бар функция.

Бөлу нүктелерінің абсциссалары мына сандар $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1},\ x_n$ болсын. Бұл сандардың орналасу тәртібі былай:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Сынық сызықтың бір $i$ номерлі звеносының ұзындығы болады:

$$\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2} = \sqrt{[f(x_{i+1}) - f(x_i)]^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}.$$

Бұл сынық сызықтың өзінің ұзындығы барлық звенолардың ұзындықтарының қосындысына тең:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[f(x_{i+1}) - f(x_i)]^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}$$

Квадрат жақшаның ішінде тұрған айырмаға шекті өсімше жөніндегі Лагранж теоремасын қолданайық:

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = (x_{i+1} - x_i)f'^{(\xi_i)},$$
$$x_i < \xi_i < x_{i+1.}$$

Енді

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot (x_{i+1} - x_i). \tag{13}$$

(13) қосынды – интегралдық қосынды.

Анықтама бойынша қисықтың доғасының ұзындығы S, (13) қосындының шегіне тең, яғни

$$S = \lim_{\max(x_{i+1} - x_i) \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i) \cdot} (x_{i+1} - x_i),$$

немесе

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \tag{14}$$

Егер қисықтың теңдеуі мына түрде берілсе:

$$x = \mathrm{g(y)},\ \ \mathrm{c \le y \le d},$$

мұнда $c$ мен $d$ – $A$ мен $B$-нің ординаталары. $\mathrm{g(y)} - [c, d]$ аралығында берілген, осы аралықта үздіксіз және у бойынша үздіксіз туындысы $g'(y)$ бар функция. Мұндай қисықтың доғасының ұзындығы былай өрнектеледі:

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + g'^2(y)}dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy.$$

1-мысал. Мынадай теңдеумен $x^2 = 2\,p\,y$ берілген парабола доғасының ұзындығын мына шекаралықта: $0 \leq x \leq b$ есептеп шығару керек

Берілген теңдеуден

$$y = \frac{x^2}{2\,p}; \qquad y' = \frac{x}{p}.$$

(14) формула бойынша

$$S = \int_0^b \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} dx = \frac{1}{p}\int_0^b \sqrt{p^2 + x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{p}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p^2}{2} ln\left|x + \sqrt{x^2 + p^2}\right|\right]_0^b =$$

$$\frac{1}{2p} b\sqrt{b^2 + p^2} + \frac{p}{2} ln\left|b + \sqrt{b^2 + p^2}\right| - \frac{p}{2}\ln p.$$

2. АВ қисығының бір нүктесі, мәселен $A(x_0,\ y_0)$ қозғалмайтын болсын да, ал екінші нүктесі $M(x, y)$ доғаның бойымен үздіксіз қозғалатын болсын. Онда *МА* доғаның ұзындығы х пен у-ке тәуелді айнымалы шама болып табылады. Ал *х* пен *у* өзара мына $y = f(x)$ немесе $x = g(y)$ теңдеу арқылы байланысты болғандықтан, *МА* доғаның ұзындығы тек бір ғана *х*-тің немесе *у*-тің ғана функциясы болады.

Сөйтіп, қисықтың теңдеуі қай түрде берілді: мына түрде ме $y = f(x)$, жоқ мына түрде ме $x = g(y)$, міне соған байланысты

$$S(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \qquad (15)$$

немесе

$$S(y) = \int_a^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy. \qquad (16)$$

(15) теңдікті *х* бойынша, ал (16) теңдікті *у* бойынша дифференциалдан табамыз:

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$\frac{dS}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Бәрібір осы екі жағдайдың екеуінен де мына формула келіп шығады:

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \qquad (17)$$

$dS$ шаманы доғаның дифференциалы деп атайды.

(17) формуланы доғаның дифференциалының формуласы дейді.

3. Енді қарастырып отырған қисық параметрлік теңдеулермен берілсін

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t). \qquad (1)$$

Мұнда $\varphi(t)$ және $\psi(t) - [\alpha, \beta]$ аралығында үздіксіз және осы аралықта үздіксіз $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ туындылары бар функциялар деп ұйғарамыз. Туындылар $\varphi'(t)$ және $\psi'(t)$ бір уақыттың ішінде нольге айналып кетпейді. Олай болса, бір кішкентай $(t_0 - \delta,\ t_0 + \delta)$ аймақта не $\varphi(t)$, не $\psi(t)$ біркелкі болады.

(17) формуланы қолданып табамыз:

$$(dS)^2 = \varphi'^2(t)dt^2 + \psi'^2(t)dt^2,$$

немесе

$$dS = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$$

$\alpha$-дан $\beta$-ға дейін интегралдап табамыз:

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \qquad (18)$$

*2-мысал.* Төмендегі параметрлік теңдеулермен

$$\begin{matrix} x = a(t - \sin t,) \\ y = a\,(1 - \cos t) \end{matrix} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

берілген циклоиданың бір арқасының ұзындығын табу керек.

Бұл есепті шығару үшін (18) формуланы қолданамыз:

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t); \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t;$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2a^2(1 - \cos t) = 4\, a^2 sin^2 \frac{t}{2}.$$

$$S = 2a\int_{0}^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_{0}^{2\pi} = 8a.$$

4. Енді қисықтың теңдеуі поляр координаталарда берілсін:

$$p = f(\theta),$$

мұнда $f(\theta)$ $[\theta_0, \theta_1]$ аралығында үздіксз және осы аралықта $\theta$ бойынша үздіксіз $f'(\theta)$ туындысы бар функция.

Қисық нүктелерінің декарттық координаталар мен поляр координаталарының арасындағы мына қатынастарды

$$x = p\cos\theta, \ \ y = p\sin\theta$$

немесе

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\sin\theta,$$

аналитикалық геометриядан білеміз.

Кейінгі екі теңдеуді қисықтың параметрлік теңдеулері деп қараймыз. Мұнда параметр $\theta$.

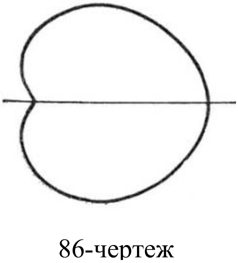
(18) формуланы пайдаланамыз:

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta\frac{dp}{d\theta} - p\sin\theta,$$
$$\frac{dy}{d\theta} = \sin\theta\frac{dp}{d\theta} + p\cos\theta,$$

бұл арадан

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = p^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2$$

$$S = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{P^2 + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2}\,d\theta. \qquad (19)$$



86-чертеж

Бұл системада доғаның дифференциалы

$$dS = \sqrt{(dp)^2 + p^2(d\theta)^2} \qquad (20)$$

болады.

3-мысал. Төмендегі теңдеумен

$$p = a(1 + \cos\theta)$$

берілген кардиоиданың ұзындығын есептеп шығару керек (86-чертеж).

Бұл есепті шығару үшін (19) формуланы қолданамыз.

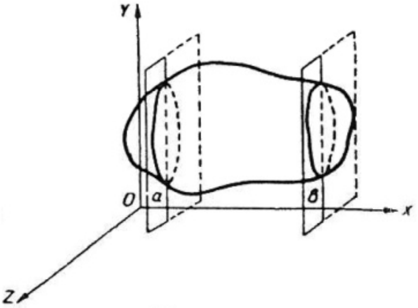
$$S = 2a\int_{0}^{\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + sin^2}d\theta = 2a\int_{0}^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\theta)}d\theta =$$

$$= 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8\,a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8\,a.$$

## § 4. Денелердің көлемін анықталған интеграл арқылы өрнектеу

1. Дененің көлемін табу туралы есеп еселік интегралдардың ғана көмегімен толық шешіледі. Қазір біз кейбір жағдайларды ғана қараймыз.

Үш өлшемді кеңістікте, тұйық бетпен қоршалған кез келген формалы дене берілсін (87-чертеж).



87-чертеж

Дененің бір нүктесі арқылы, *X* осіне перпендикуляр етіп жазықтық жүргізсек, онда денеде көлденең қима пайда болады. Осы көлденең қима-квадратталынатын фигура болсын. Егер оның ауданын $u$ деп белгілейтін болсақ, онда бұл аудан айнымалы $x$-тің функциясы болады: $u = u(x). x = a$ және $x = b$ мәндерге сәйкес келетін екі қиманың арасындағы дененің көлемін есептеп шығарайық. Ол үшін *X* осіндегі $a$-дан $b$-ге дейінгі кесіндіні, абсциссалары мына тәртіппен

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ . \ . \ . <$$
$$< x_{n-1} < x_n = b$$

орналасқан нүктелермен *n* бөлшек сегменттерге бөлейік. Сөйтейік те, әрбір $[x_i,\ x_{i+1}]$ бөлшек сегменттің бойында жатқан кез келген $\xi_i$ нүктесін алайық. Абсциссалары осы $\xi_i$ сандарына тең дененің нүктелері арқылы X осіне перпендикуляр қималар жүргіземіз. Сонда дене бірнеше қабаттарға бөлінеді.

Әрбір $i$-нші қабатты, табаны $\xi_i$ нүктесі арқылы өтетін қимаға тең, биіктігі екі қиманың бір-бірінен арақашықтығына, яғни мына $x_{i+1} - x_i$ айырмаға тең цилиндрмен ауыстырайық. Мұндай цилиндрдің көлемі болады: $u(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$. Ал дәл осындай цилиндрлердің саны *n*. Сондықтан осы айтылған барлық цилиндрлердің көлемі

$$v_n = \sum_{i=0}^{n-1} u(\xi_i)\ (x_{i+1} - x_i) \qquad (21)$$

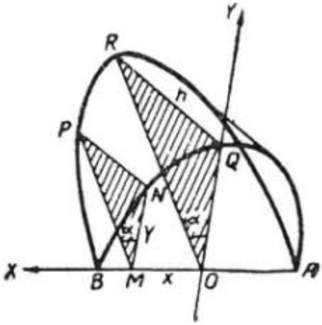
болады.

(21) теңдіктің оң жағында тұрған қосынды – интегралдық қосынды, бұл қосынды дененің көлемінің жуық мәнін береді. Оның дәл мәнін табу үшін барлық $(x_{i+1} - x_i)$ айырмаларды нольге ұмтылтып, (21) қосындыдан шек аламыз. Сөйтіп, іздеп отырған көлем

$$V = \lim_{\max(x_{i+1} - x_i) \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} u(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

болады, немесе

$$V = \int_a^b u\,(x)\,dx \qquad (22)$$



88-чертеж

*1-мысал.* Цилиндрлік кесіндінің көлемін табу керек (88-чертеж).

Дөңгелек цилиндрдің табанымен бір белгілі $\alpha$ бұрышын жасап, диаметрі арқылы өтетін жазықтықпен кесілетін геометриялық денені *цилиндрлік кесінді* деп атайды.

*AB* диаметрін *X* осі үшін аламыз. Цилиндрдің табаны дөңгелек, радиусы $a$-ға тең, теңдеуі $x^2 + y^2 = a^2$ болады.

Енді біз осы дененің көлденең қимасының ауданын табуымыз керек. Бұл дененің көлденең қимасы тік бұрышты үшбұрыш *MNP* болады. *MNP* тік бұрышты үшбұрыштың ауданы болады:

$$u(x) = \frac{1}{2} M\,N \cdot N\,P = \frac{1}{2} M\,N^2 \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Ал $M\,N^2 = y^2$, олай болса,

$$u(x) = \frac{1}{2} y^2 \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Енді дөңгелектің теңдеуінен табамыз:

$$y^2 = a^2 - x^2.$$

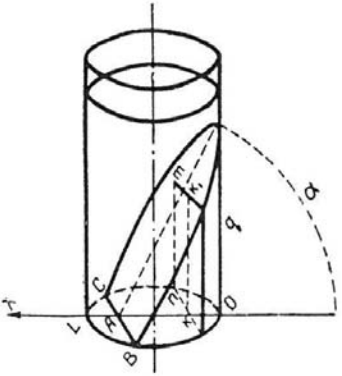
Сонымен,

$$u(x) = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)tg\,\alpha.$$

Цилиндрлік кесіндінің көлемін табу үшін (22) формуланы қолданамыз, сонда

$$V = \frac{1}{2}tg\,\alpha\int_a^b(a^2 - x^2)dx = \frac{2}{3}a^3 tg\alpha = \frac{2}{3}a^2 h,$$

мұнда $h -$ цилиндрлік кесіндінің биіктігі $QR$.



89-чертеж

*2-мысал.* Радиусы $r$, табанының жазықтығы горизонтқа $\alpha$ бұрышымен көлбеген тік дөңгелек цилиндрлік стаканға су құйылған. Стаканның ең төменгі нүктесі О-дан судың $BAC$ бетіне дейінгі екі ара $AO=a$ және $0 \leq a \leq 2r$. Стакандағы судың көлемін табу керек (89-чертеж).

Стаканның диаметрін $X$ осі үшін, ал $O$ нүктесін координаталардың бас нүктесі үшін аламыз.

$X$ осіне перпендикуляр қима тік төртбұрыш $mnpq$ болады. Енді осы қиманың ауданын $Ok=x$-тің функциясы етіп табуымыз керек.

$$u(x) = mn \cdot mq.$$

$nk$ кесіндісі $Lk$ мен $kO$ кесінділерінің арасында орта пропорционал болады, яғни

$$\frac{Lk}{nk} = \frac{nk}{kO}$$

немесе

$$(nk)^2 = Lk \cdot kO = (2\,r - x)x,$$

бұл арадан

$$nk = \sqrt{2\,r\,x - x^2}.$$

Ал $kk_1 = A\,k\,tg\,\alpha = (a - x)tg\,\alpha.$

Ендеше

$$u(x) = 2\,n\,k \cdot k\,k_1 = 2\sqrt{2\,r\,x - x^2}(a - x)tg\,\alpha.$$

Іздеп отырған көлем болады:

$$V = 2\mathrm{tg}\,\alpha\int_0^x (a-x)\sqrt{2rx-x^2}dx = 2tg\alpha\int_0^x (a-x)x\sqrt{\frac{2r-x}{x}}dx.$$

Бұл интегралды шығару үшін мынадай ауыстыру жасаймыз:

$$\sqrt{\frac{2r-x}{x}} = \mathrm{tg}\,z,$$

бұл арадан

$$x = 2\,r\,cos^2x;\ \ dx = -4\,r\sin z\cos z\,d\,z.$$

Ал

$$V = -2\ \mathrm{tg}\,\alpha\int 8r^2(a-2\,r\,cos^2z)sin^2z\,cos^2z\,d\,z =$$

$$= -4\,r^2\mathrm{tg}\,\alpha\ \int[a-r(1+\cos 2z)]sin^2 2\,z\,d\,z =$$

$$= -4\,r^2\mathrm{tg}\,\alpha\int(a-r-r\cos 2\,z)sin^2 2\,z\,d\,z =$$

$$= -2\,r^2\mathrm{tg}\,\alpha\left[\int(a-r)sin^2 2\,z\,d\,2z -\right.$$

$$\left.-2r\int sin^2 2z\cdot\cos 2z\,d\,z\right] =$$

$$= -2\,r^2\mathrm{tg}\,\alpha\left[(a-r)\left(z-\frac{\sin 2\,z\cos 2\,z}{2}\right)-\frac{r\,sin^3 2\,z}{3}\right] =$$

$$= 2\ tg\,\alpha\left[\frac{(a-r)r^2}{2}\sin 2\,z\cos 2\,z+\frac{r^3}{3}sin^3 2\,z-r^2(a-r)z\right].$$

Ауыстырудан табамыз:

$$z = arc\ \mathrm{tg}\sqrt{\frac{2\mathrm{r}-\mathrm{x}}{\mathrm{x}}}$$

$$\cos 2\,z = \frac{x-r}{r};\ \sin 2\,z = \frac{\sqrt{2\,r\,x-x^2}}{r}.$$

Енді осыларды пайдаланып көлемді мына түрге келтіреміз:

$$V = 2\ tg\,\alpha\left[\frac{(a-r)r^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{2\,r\,x-x^2}}{r}\cdot\frac{x-r}{r}+\right.$$

$$\left.+\frac{r^3}{3}\cdot\frac{(2\,r\,x-x^2)\sqrt{2\,r\,x-x^2}}{r^3}-r^2(a-r)arc\,t\,\mathrm{g}\sqrt{\frac{2\,r-x}{r}}\right]_0^x =$$

$$= 2\,tg\,\alpha \left\{ \frac{x^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{2r-x}{x}} \left[ \frac{(a-r)(x-r)}{x} + \frac{2(2\,r-x)}{3} \right] + \right.$$

$$\left. + r^2 (r-a) arc\,tg \sqrt{\frac{2r-x}{x}} \right\}_0^x =$$

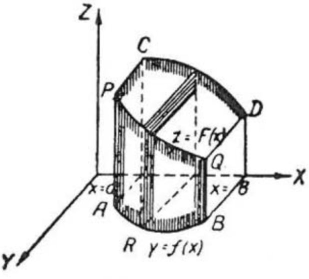
$$+2\,tg\,\alpha \left\{ \frac{x^2}{2} \sqrt{\frac{2r-x}{x}} \left[ \frac{(r-a)r}{x} + \frac{3a+r-2x}{3} \right] + \right.$$

$$\left. + r^2 (r-a) arc\,tg \sqrt{\frac{2r-x}{x}} \right\} + \text{c},$$

мұнда

$$c = r^2 (r-a) arc\,tg\,\alpha \cdot 2\,tg\,\alpha = -2\,tg\,\alpha \cdot r^2 (r-a) \cdot \frac{\pi}{2} =$$

$$= -r^2 tg\,\alpha\,\pi (r-a).$$



90-чертеж

Егер дене мынадай теңдеулермен $y = f(x),\ z = F(x)$ берілген екі цилиндрлік бетпен[1], *XOУ* және *XOZ* координаталар жазықтарымен және екі шеткі $x = a,\ x = b\ (a < b)$ жазықтармен қоршалса (90-чертеж), онда мұндай дененің көлемі былай өрнектеледі:

$$V = \int_a^b y\,z\,d\,x = \int_a^b f(x)F(x)dx. \quad (23)$$

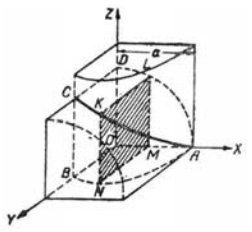
*3-мысал.* Жан-жағынан мына екі $x^2 + y^2 = a^2$ және $x^2 + z^2 = a^2$ цилиндрлік беттермен қоршалған дененің көлемін табу керек.

Бірінші цилиндрдің жасаушысы *OZ* осіне, екіншісі – *OУ* осіне параллель, былайша айтқанда өзара перпендикуляр. *YOZ* жазықтығына параллель қиманың формасы квадрат болады (91-чертеж).

(23) формуланы қолданып 1 октанттағы дененің бөлігінің көлемін табамыз:

---

[1] Бұл цилиндрлік беттердің жасаушылары координаталық осьтердің екеуіне (қайсысы теңдеудің өзінде жоқ, соған) параллель болуы керек.



91-чертеж

$$V = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{2}{3}a^3.$$

Барлық 8 октанттағы көлем $= \frac{16}{3}a^3$.

Егер цилиндрлердің радиустары әр түрлі болса, онда көлем элиппстік интегралға келтіріледі.

*4-мысал.* Мына екі бетке

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ және } \frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{3z}{2c}$$

ортақ көлемді табу керек.

Мұндағы бірінші бет – айналу эллипсоиды, екінші бет – айналу параболоиды. Бұл екі бет бір-бірімен мына қисық сызық

$$1 - \frac{z^2}{2} = \frac{3z}{2c}$$

бойынша қиылысады. Бұл жерден

$$z_1 = \frac{c}{2}, \ z_2 = -2c.$$

Түбір $z_2 = -2c$ есептің шартына сай келмейді, өйткені мына жазықтық $z = -2c$ беттерді қимайды.

Сөйтіп беттерге ортақ көлем екі бөліктен тұрады: біреуі $V_1$ – параболоид пен мына жазықтықтың $z = \frac{c}{2}$ арасындағы көлем, екіншісі $V_2$ осы жазықтықтың үстінде жатқан және айналу эллипсоидымен қоршалған көлем.

Бірінші бөліктегі көлденең қима радиусы $\frac{a\sqrt{3z}}{\sqrt{2c}}$ дөңгелек, олай болса,

$$u(z) = \frac{3\pi\, a^2 z}{2\, c},$$

ал

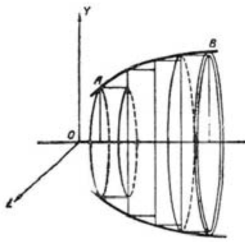
$$V_1 = \frac{3}{2}\frac{\pi\, a^2}{c}\int_0^{\frac{c}{2}} z\, d\, z = \frac{3\,\pi\, a^2 c}{16}.$$

Екінші бөліктегі көлденең қима да дөңгелек, мұның радиусы тең: $\sqrt{a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)}$, сондықтан

$$V_2 = \pi a^2 \int_{\frac{c}{2}}^{c} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) d\, z = \frac{5}{24}\pi a^2 c.$$

Сонымен, іздеп отырған көлем болады:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{19}{48}\pi a^2 c.$$



92-чертеж

2. Енді айналудың нәтижесінде пайда болған дененің көлемін табу үшін (22) формула қалай қолданылады, соны көрсетейік.

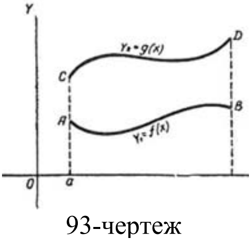
Жоғарғы жағынан $y = f(x)$ теңдеумен берілген үздіксіз қисықпен, төменгі жағынан *X* осімен, бүйір жақтарынан $x = a$ және $x = b$ түзулермен қоршалған фигура *X* осін шыр айналатын болсын (92-чертеж). Осы айналудың нәтижесінен шыққан денені *айналу денесі* дейді. Қисықты дененің *жасаушысы* дейміз. $f(x)$ $[a, b]$ аралығында анықталған үздіксіз функция.

Айналу денесінің көлденең қимасы, радиусы $y = f(x)$-ке тең дөңгелек, олай болса, бұл дөңгелектің ауданы тең: $\pi y^2 = \pi f^2(x)$. Енді бұл дененің көлемін табу қиын емес.

$$V = \pi \int_a^b y^2 d\,x = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \qquad (24)$$

Егер қисық У осін айналса, онда

$$V = \pi \int_c^d x^2 d\,y = \pi \int_c^d \mathrm{g}^2(y)\, d\,y. \qquad (25)$$



93-чертеж

Енді екі – AB және CD – қисықтардың арасындағы облыс ACDB, X осін айналатын болсын. Бұл облыстың айналу нәтижесінде шығатын денені тор деп атаймыз. Бұл дене шығыршық, сақина тәрізді болады (93-чертеж).

ХОУ жазықтығында қисық AB $y_1 = f(x)$ теңдеумен, ал қисық CD $y_2 = \mathrm{g}(x)$ теңдеумен $[a, b]$ аралығында берілсін. $f(x)$ және $\mathrm{g}(x)$ $[a, b]$ аралығында үздіксіз.

Тордың көлемі (24) формуламен анықталатын екі көлемнің:

$$V_2 = \pi \int_a^b \mathrm{g}^2(x) dx = \pi \int_a^b {y_2}^2\, d\,x$$

және

$$V_1 = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_a^b {y_1}^2\, d\, x$$

айырмасына тең, яғни

$$V = \pi \int_a^b ({y_2}^2 - {y_1}^2)dx = \pi \int_a^b [\mathrm{g}^2(x) - f^2(x)]dx. \qquad (26)$$

Тұйық сызықпен қоршалған фигураның X осін айналудың нәтижесінен шыққан дененің көлемі де осы (26) формуламен анықталады, мұнда $y_2$ қисықтың жоғарғы бөлігінің ординатасын, ал $y_1$ − төменгі бөлігінің ординатасын көрсетеді.

Енді осы қаралған жағдайларға бірнеше мысалдар келтірейік.

*5-мысал.* Циссоида деп аталатын мына қисықтың $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ $0 < x < b < 2a$ X осін айналудан пайда болған дененің көлемін табу керек.

(24) формуланы пайдаланып табамыз:

$$V = \pi \int_0^b \frac{x^3}{2a - x}dx = \pi \int_0^b \left(-x^2 - 2ax - 4a^2 + \frac{8\,a^3}{2a - x}\right)dx =$$

$$= \pi\left(-\frac{x^3}{3} - ax^3 - 4a^2x - 8\,a^3 ln(2a - x)\right)\Big|_0^b =$$

$$= \pi\left[-\frac{b^3}{3} - ab^2 - 4\,a^2b - 8\,a^3 ln(2a - b)\right] +$$

$$+8\,\pi a^3 ln2a = \pi\left[ln\left(1 - \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^3}{3} - a\,b(b + 4\,a)\right].$$

*6-мысал.* Қисық поляр системада мынадай теңдеумен берілген.

$$p = f(\theta).$$

$\theta_0$ және $\theta$ поляр бұрыштардан анықталған радиус-векторлар мен қисықтың осьті айналуынан пайда болған дененің көлемі төмендегі формуламен

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\theta_0}^{\theta} f^3(\theta)\sin\theta\; d\;\theta$$

өрнектелетінін дәлелдеу керек.

Шарлық сектордың көлемі бетінің ауданы мен радиусының үштен бірінің көбейтіндісіне тең, олай болса,

$$dV = \frac{2\,\pi\,y\,d\,s \cdot p}{3},$$

ал

$$ds = pd\theta \quad \text{және} \quad y = p\sin\theta,$$

сондықтан

$$dV = \frac{2}{3}\pi\,p^3 \sin\theta\;d\;\theta = \frac{2}{3}\pi f^3(\theta)\sin\theta\;d\;\theta,$$

бұл арадан

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\theta_0}^{\theta} f^3(\theta)\sin\theta\;d\;\theta. \qquad (27)$$

*7-мысал.* Дөңгелектің өзінің жазықтығында жатқан түзуді айналуынан пайда болған тордың-валдың көлемі тордың өзін жасаушы дөңгелектің ауданы мен осы дөңгелектің центрі жасайтын шеңбердің ұзындығының көбейтіндісіне тең екендігін дәлелдеу керек.

Жасаушы дөңгелектің теңдеуі

$$(x-\alpha)^1 + (y-\beta)^2 = r^2$$

болады.

Есептің шартында көрсетілген түзуді X осі үшін аламыз. (26) формуланы қолданып табамыз:

$$V = \pi \int_{\alpha-r}^{\alpha+r} ({y_2}^2 - {y_1}^2)dx$$

дөңгелектің теңдеуінен

$$y_2 = \beta + \sqrt{r^2 - (x-\alpha)^2,}$$
$$y_1 = \beta - \sqrt{r^2 - (x-\alpha)^2,}$$

демек

$$V = 4\pi\beta \int_{\alpha-r}^{\alpha+r} \sqrt{r^2 - (x-\alpha)^2}dx$$

Ал мына өрнек

$$2\int_{\alpha-r}^{\alpha+r} \sqrt{r^2 - (x-\alpha)^2}dx$$

айналушы дөңгелектің ауданын береді. Олай болса, есептеп дәлелденді.

*8-мысал.* Жоғарғы жағынан $x = a(t - sint), y = a\ (1 - cost)$ циклоидамен, төменгі жағынан абсциссалар осінің бойында жатқан түзумен қоршалған фигура, $x = \pi a$ түзуді айналады. Осы айналудың нәтижесінен пайда болған дененің көлемін табу керек.

Бұл есепті шешу үшін $x = \pi a$ түзуді жаңа ордината үшін аламыз да оны $y_1$ арқылы белгілейміз. Сонда жаңа координаталарға көшу формулалары бойынша:

$$x_1 = x - \pi a = a(t - \pi - \sin t)$$
$$y_1 = y = a(1 - \cos t).$$

Былай ұйғарайық: $t - \pi = \varphi,$ *ендеше*

$$x_1 = a[\varphi - \sin(\pi + \varphi)] = a(\varphi + \sin\varphi)$$
$$y_1 = a(1 + \cos\varphi).$$

Параметр $\varphi$ қандай шекаралықта өзгереді, енді соны іздейік. Айнымалы $y_1$ $2a$ -дан 0-ге дейін өзгергенде, параметр $\varphi$, 0-ден $\pi$-ге дейін өзгереді. Сонымен

$$V = \pi \int_0^{2a} {x_1}^2 dy_1 = \pi \int_\pi^0 a^2(\varphi + \sin\varphi)^2(-\sin\varphi)d\ \varphi =$$
$$= \pi a^3 \int_0^\pi (\varphi + \sin\varphi)^2 \cdot \sin\varphi\ d\ \varphi = \pi a^3 \left(\frac{3\pi^2}{2} - \frac{8}{3}\right).$$

## § 5. Қисықтың айналуынан пайда болған беттің ауданын табу

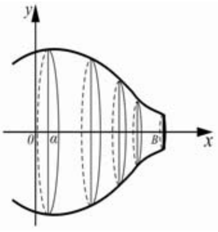
ХОУ жазықтығында жатқан, $y = f(x)$ теңдеумен берілген қисық Х осін айналатын болсын. Мұнда $f(x) - [a, b]$ аралығында анықталған және осы аралықта үздіксіз туындысы бар функция. Бұл қисықтың айналуынан бет пайда болады. Мәселе осы беттің ауданын есептеп шығаруда.

Алдымызға қойылған есепті шығару үшін біз $[a, b]$ аралығын абсциссалары мынадай тәртіппен орналасқан:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ .\ .\ . < x_{n-1} < x_n = b$$

нүктелермен *n* бөлшек сегменттерге бөлеміз. Әрбір бөлу нүктесінен қисыққа жеткенше түзу жүргізсек, онда қисық *n* бөліккелікке бөлінеді. Бөлу нүктелерін бір-бірімен қосып, қисыққа іштей сызылған сынық сызықты шығарамыз.

Қисықпен бірге сынық сызық та X осін айналып екінші-бір бетті жасайды.



94-чертеж

Егер сынық сызық звеноларының санын шексіздікке ұмтылып, олардың әрқайсысының ұзындығын нольге ұмтылтқанда, сынық сызықтың айналуынан пайда болған беттің ауданы бір тиянақты шекке ұмтылады, міне осы шекті біз қисықтың X – өсін айналуынан туған беттің ауданы үшін аламыз[1].

Сынық сызықтың әрбір звеносы конустың бүйір бетін жасайды (94-чертеж), осы звеноның ұзындығы $l_i$деп алсақ, онда айтып отырған конустың бүйір бетінің ауданы

$$2\pi\frac{y+y_{i+1}}{2}l_i=2\pi\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}l_i$$

болады.

Сынық сызықтың түгел өзімен жасалған беттің ауданыны болады.

$$Q_n=2\pi\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}l_i. \qquad (28)$$

$i$-нші звено керіп тұрған доғаның ұзындығын $s_i$ деп белгілейік те (28) қосындыны былай түрлендірейік:

$$Q_n=2\pi\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}s_i-2\pi\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}-(s_i-l_i).$$

(29) теңдіктің оң жағында тұрған екінші қосындыны жеке алып қарайық:

$$2\pi\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}s_i-l_i.$$

$f(x)$ функцияның $[a,b]$ аралығындағы ең үлкен мәнін M арқылы белгілесек, онда

---

[1] Бұл сөйлем беттін ауданының дәл анықтамасы болып табылмайды.

$$\left|2\pi\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(s_i-l_i)\right| \leq$$

$$\leq 2n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}(|f(x_i)|+|f(x_{i+1})|)(s_i-l_i) \leq$$

$$\leq 2n\, M\sum_{i=0}^{n-1}(s_i-l_i) = 2\pi\, M(s_i-L_n),$$

мұнда $s$ – қисықтың доғасының ұзындығы, ал $L_n$ – бүкіл сынық сызықтың ұзындығы. Қисық доғасының анықтамасы бойынша

$$\lim_{n\to\infty} L_n = s,$$

олай болса $2nM(S-L), n$ шексіздікке ұмтылғанда нольге ұмтылады. Сонымен, $n$ шексіздікке ұмтылғанда (29) теңдіктің оң жағында тұрған екінші қосынды нольге ұмтылатын болды. Сондықтан

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = 2\pi\ \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}s_i =$$

$$= 2\pi\ \left[\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}f(x_i)s_i + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}f(x_{i+1})s_1\right],$$

$l(x)$үздіксіз функция болғандықтан

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}f(x_i)\, s_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}f(x_{i+1})\, s_i,$$

онда іздеп отырған аудан Q тең болады:

$$Q = 2\pi\int_a^b f(x)ds = 2\pi\int_a^b yds$$

немесе

$$Q = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\, d\, x, \qquad (30)$$

өйткені $dx = \sqrt{1 + y'^2}dx$.

Егер қисық[c,d] аралығында $x = \psi(y)$ теңдеумен беріліп У өсін айналса, онда айналу бетінің ауданы төмендегі өрнекпен

$$Q = 2\pi \int_{c}^{d} \Psi(y)\sqrt{1 + \Psi'^2(y)}\, dy \qquad (31)$$

табылады.

Енді қисық $x = \varphi(t), y = \psi(t)$параметрлік теңдеулермен берілсін, мұнда $\varphi(t)$және $\psi(t) - [\alpha, \beta]$ аралығында анықталған және осы аралықта үздіксіз туындылары бар функциялар. Осы қисықтың Х осін айналуынан шыққан беттің ауданы болады:

$$Q = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \Psi'^2(t)}\, dt \qquad (32)$$

Егер қисық У өсін айналатын болса, онда айналу беттің ауданы келесі

$$Q = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \Psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \Psi'^2(t)}\, dt \qquad (33)$$

формуламен анықталады.

Егер қисық поляр координаталарында $p = f(\theta)$ теңдеумен берілсе және $p = f(\theta) – [\theta_o, \theta_1]$ аралығында үздіксіз және үздіксіз $p' = f'(\theta)$ туындысы бар функция болса,

онда

$$Q = 2\pi \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho \sin\theta \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho\, \rho}{d\theta}}\, d\theta. \qquad (34)$$

*1-мысал.* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипстің *ОХ* және *ОУ* осьтерін айналуынан пайда болған беттердің (айналу эллипсоидтарының) беттерінің айданын табу керек. Мұнда $a > b$ деп ұйғарамыз.

Егер эллипс өзінің үлкен өсін айналатын болса, онда «созыңқы» айналу эллипсоиды шығады, ал егер ол өзінің кіші осін айналатын болса, онда «қысыңқы» эллипсоид шығады. Олардың беттерінің аудандары бірдей емес және мына келесі формулалармен өрнектеледі.

$$Q_x = 2\pi \int_{-a}^{+\alpha} yds, Q_y = 2\pi \int_{-b}^{b} xds,$$

мұнда

$$ds \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Эллипстің теңдеуінен табамыз:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}; \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Бұл арадан

$ds = \frac{\sqrt{a^2-e^2x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}} dx,$ мұнда $e$ – эксцентриститет.

Сонымен,

$$Q_x = 2\pi \int_{-\alpha}^{a} \frac{b}{a} \sqrt{a^{2-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - e^2x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= \frac{4\pi b}{a} \int_{0}^{+a} \sqrt{a^2 - e^2x^2} dx = \frac{4\pi b}{a} e \int_{0}^{+a} \sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2 dx} =$$

$$\frac{4\pi b}{a} \left[\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - e^2x^2} + \frac{a^2}{2e} arc\, sin \frac{ex}{a}\right]_0^a =$$

$$2\pi b^2 + \frac{2\pi\ ab\ arc\ sine}{e}.$$

$$Q_{\bar{y}} = 2\pi \int_{-b}^{b} xds = \frac{2\pi a}{b^2} \int_{-b}^{+b} \sqrt{b^4 + c^2y^2}\, dy.$$

Мынадай ауыстыру $\frac{cy}{b^2} = z$ жасаймыз, сонда

$$Q_y = \frac{2\pi a}{b^2} \int_{-\frac{c}{b}}^{\frac{c}{b}} \sqrt{b^4 + b^2z^2} \frac{b^2}{c} dz = \frac{4\pi ab^2}{c} \int_{0}^{\frac{c}{b}} \sqrt{1 + z^2 dz} =$$

$$= \frac{4\pi ab^2}{c} \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 + z^2} + \frac{1}{2} ln\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right)\right]_0^{\frac{c}{b}} =$$

$$\frac{4\pi ab^2}{c}\left[\frac{c}{2b}\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{c}{b}+\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}}\right)\right]=$$

$$=2\pi a^3+\frac{\pi b^2}{e}ln\frac{1+e}{1-e},$$

мұнда $c^2=a^2-b^2$ және $c=ae$.

*2-мысал.* Мындай теңдеумен

$$x=rarc\,cos\frac{r-y}{r}-\sqrt{2ry-y^2}$$

берілген қисықтың (циклоиданың) X осін айналуынан пайда болған беттің ауданын есептеп шығару керек.

Қойылған есепті шығару үшін келесі формуланы

$$Q_y=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2dx}$$

қолданамыз.

Қисықтың берілген теңдеуінен табамыз:

$\frac{dx}{dy}=\sqrt{\frac{y}{2r-y}}$, бұл арадан

$$dx=\sqrt{\frac{y}{2r-y}}\,dy.$$

*dx*-тің осы мәнін формулаға апарып қойсақ, онда

$$Q=2\pi\int_0^{2r} y\sqrt{1+\frac{2r-y}{y}}\cdot\sqrt{\frac{y}{2r-y}}dy=$$

$$=2\pi\sqrt{2r}\int_0^{2r}\frac{ydy}{\sqrt{2r-y}}=2\pi\sqrt{2r}\left[\frac{2}{3}(2r-y)\sqrt{2r-y}-\right.$$

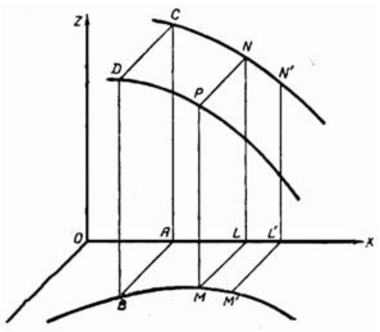
$$\left.-4r\sqrt{2r-y}\right]_0^{2r}=2\pi\sqrt{2r}\left(\frac{4r\sqrt{2r}}{3}+4r\sqrt{2r}\right)=\frac{32}{3}\pi r^2.$$

*3-мысал.* Келесі теңдеулермен

$$y=\varphi(x) \tag{34}$$

$$z=\psi(x) \tag{35}$$

екі цилиндр берілген, бұл цилиндрлердің осьтері өзара перпендикуляр, яғни бірінші цилиндрдің осі *Z* осінк параллель,



94-чертеж

екінші цилиндрдің осі У өсіне параллель. Екінші цилиндрдің бірінші цилиндрмен қоршалған бөлігі бетінің ауданын табу керек (95-чертеж).

Шынында (34) және (35) теңдеулер айтылған екі цилиндрдің бағыттау-шыларының теңдеулері болып табылады. Бірінші цилиндр тік тұрған, екіншісі – жатық цилиндр.

Былай ұйғарайық:

$$OL = x, LM = y, LN = MP = z.$$

(34) теңдеу тік тұрған цилиндрдің бағыттаушысы $BM$-нің теңдеуі де, ал $z = \psi\,(x)$жатық цилиндрдің бағыттаушысының теңдеуі. Бұл екі цилиндр *DP* қисығы бойынша қиылысады. Егер қозғалмалы *LMN* жазықтығынан басқа қозғалмайтын оған параллель *ABC* жазықтығын қарастыратын болсақ, онда жатық цилиндрде *Q=DPCN* бет шығады. Міне осы беттің ауданың есептеп шығару керек. Оны табу үшін абсцисса х-ке өсімше *LL′ = dx* береміз, сонда бет *Q* мынадай *dQ = PNP′N′* өсімше алады. Неғұрлым *LL′* кіші болған сайын, солғұрлым бұл фигураны тік төртбұрыш орнына алуға болады және мұнда *NP = LM = y* – бір қабырғасы, ал доға *NN′* екінші қабырғасы болып табылады. Сонымен, CN доғаны s арқылы белгілеп табамыз:

$$dQ = yds = y\sqrt{dx^2 + dz^2} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\ dx,$$

бұл арадан

$$Q = \int_{x_0}^{x} y\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\ dx = \int_{x_0}^{x} \varphi\,(x)\sqrt{1 + \psi^{1^2}(x)}dx.$$

Мына екі дөнгелек цилиндрдің $x^2 + y^2 = a^2 x^2 + z^2 = a^2$ қиылысу нәтижесінен шығатын беттің ауданын тауап көрейік.

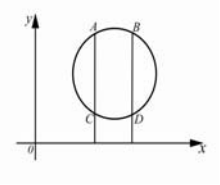
$$Q_z = \int_0^a zds = \int_0^a \sqrt{a^2 + x^2}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

$$Q_y = \int\limits_0^a yds = \int\limits_0^a \sqrt{a^2+x^2}\sqrt{1-\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\ dx.$$

Бірінші теңдеуден $y=\sqrt{a^2-x^2};\ 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{a}{a^2-x^2}$.
Олай болса,

$$Q_z = \int\limits_0^a adx = a^2.$$

*4-мысал.* Тордың айналу осіне перпендикуляр екі жазықтықтың арасындағы бетінің ауданын табу керек.



96-чертеж

Тор деп дөңгелектің өзінің жазықтығында жатқан, бірақ оның ауданың қимайтын осьті айналуынан пайда болатын бетті айтамыз (96-чертеж).

Мұндай дөңгелектің теңдеуі болады.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2,$$

бұл арадан

$$y=\beta\pm\sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}$$

АВ доғасының айналу нәтижесінен шығатын беттің ауданы:

$$Q_1 = 2\pi\int\limits_0^s (\beta+\sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}\,ds = 2\pi\beta s + 2\pi\int\limits_0^s \sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}\,ds$$

болады.

CD доғасының айналу нәтижесінен шығатын беттің ауданы:

$$Q_2 = 2\pi\int\limits_0^s [\Big(\beta-\sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}\Big]\,ds =$$

$$= 2\pi\beta s - 2\pi\int\limits_0^s \sqrt{\sqrt{R^2}-(x-\alpha)^2ds}$$

болады.

Іздеп отырған ауданның шамасы болады:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 4\pi\beta s,$$

мұнда доға $s=\overset{\smile}{AB}=\overset{\smile}{CD}$

Балай ұйғарып:$s=\pi R$табамыз:

$$Q = 4\pi^2 R\,\beta = 2\pi\,\beta\,\cdot\,2\pi R.$$

Бұл жерден мынадай қорытындыға келеміз: бүкіл тордың ауданы жасаушы дөңгелектің шеңберінің ұзындығы мен оның центрімен жасалған шеңбердің ұзындығының көбейтіндісіне тең немесе табаны жасаушы дөңгелек, биіктігі жаңағы дөңгелектің центрімен жасалған шеңбердің ұзындығына тең цилиндрдің бүйір бетінің ауданына тең.

*5-мысал. XOZ* жазықтығында жатқан қисықтың X осін айналуынан шыққан және бағыттаушылары XOУ жазықтығында жатқан тік (вертикаль) цилиндрлермен қоршалған беттің ауданын есептеп шығару керек.

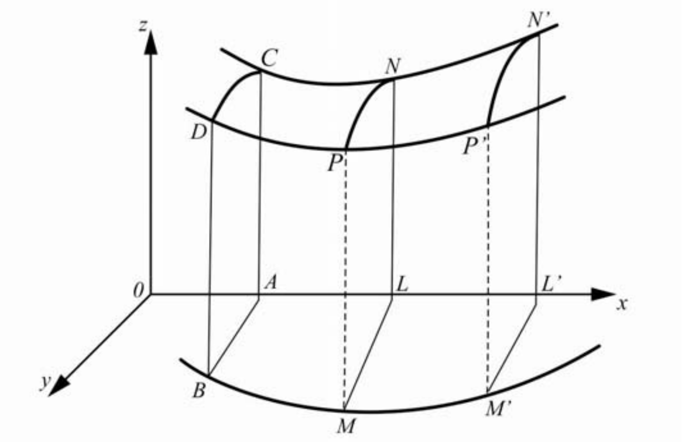
*XOZ* жазықтығында жатқан CN қисықтың теңдеуі

$$z = \psi(x)$$

болсын.

Бұл қисық *X* осін айналады. Мұның нәтижесінде шыққан дене бағыттаушысы *BM* мына теңдеумен $y = \varphi(x)$ берілген тік (вертикаль) цилиндрмен қиылысады.

Жылжымайтын параллель дөңгелек *CD*, жылжымалы параллель дөңгелек *NP*, қисық *CN* және қиылысу қисығы *DP* мына беттi *Q* = *CDNP* қоршайды (97-чертеж). Міне осы беттің ауданын табу керек.



97-чертеж.

Егер *OL* абциссаға мынадай *LL'* = *dx* өсімше берсек, онда бет мынадай өсімше *dQ* = *NPN'P'*алады.

Неғұрлым өсімше LL′аз болған сайын, солғұрлым бет Q қабырғалары NN′ және NP тік төртбұрышқа жуық болады.

$$\sin NLP = \cos MLP = \frac{LM}{LP} = \frac{LM}{LN} = \frac{y}{z}$$

бұл арадан

$$< NLP = \text{arc}\sin\frac{y}{z}.$$

Мұнда доға NP – радиусы z дөңгелектің шеңберінің доғасы болып табылады, сондықтан

$$\text{arc}\,NP = z\,\text{arc}\ \sin\frac{y}{z}.$$

Жоғарыда айтылған тік төртбұрыштың екінші қабырғасы:

$$\text{arc}\,NN' = ds = \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx.$$

болады.

Олай болса,

$$dQ = z\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,arc\,sin\,\frac{y}{z}dx.$$

Толық бет

$$Q = \int_0^x z\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,arc\,sin\,\frac{y}{z}dx$$

болады.

Енді осы шыққан формуланы мына екі бетке:

$$z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \qquad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ (a > c > b)$$

қолданайық.

Мұнда $\frac{dz}{dx} = -\frac{cx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$; $\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^4-e^2x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}$,

ал

$$e^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2}.$$

Сонымен,

$$Q = \int_0^x \frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,.\frac{\sqrt{a^4-e^2x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}\,arc\sin\frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dx =$$

$$= \frac{c}{2a}\left[x\sqrt{a^4-e^2x^2} + \frac{a^2}{e}arc\,sin\frac{ex}{a^2}\right]arc\,sin\frac{b}{e}.$$

6-мысал. Мына теңдеумен $p = 2a(1+cos\theta)$ берілген қисықтың поляр осін айналуынан шыққан беттің ауданын табу керек.

Бұл есепті шешу үшін (34) формуланы қолданамыз, ол үшін

$$\frac{dp}{d\theta} = 2a\,sin\theta; \quad \sqrt{p^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{4a^2(1 + cos\theta)^2 + 4a^2 sin^2\theta} =$$

$$= 4a\cos\frac{\theta}{2};$$

$$\mathrm{Q} = 2\pi\int_0^\pi \rho\, sin\,\theta \cdot 4a\, cos\,\frac{\theta}{2} d\theta = \frac{32}{5}\pi(2a)^2.$$

## § 6. Анықталған интегралдардың физикалық есептерге қолданылуы

1. Геометриямен бірге физика да дифференциалдық және интегралдық есептеудің тууына және оның дамуына үлкен себепкер болды. Массалары $m_1$, $m_2$…., m материалды $M_1(x_1y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$,..., $M_n(x_n, y_n)$ нүктелерден тұратын механикалық системаның *ауырлық центрі* деп координаталары мына теңдіктерді

$$M_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i\,, M_{y_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad (36)$$

қанағаттандыратын нүктені айтады.

Мұнда

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

системаның толық массасын көрсетеді.

Бұл жерде жеке нүктелерден тұратын системаны қараймыз. Массалары үздіксіз орналасқан материалды қисықты немесе жазық фигураны ғана карастырамыз.

Қарастырылған денелерді біртектес, тығыздығы бірге тең деп ұйғарамыз. Егер мұндай дененің түрі қисық сызық болса, онда оның массасы өзінің ұзындығына тең, ал жазық фигура болса, – ауданына тең.

*ХОУ* жазықтығында жатқан қисықты қарайық. Бұл қисықтың ұзындығы s болсын. Жоғарыда айтылып кеткен жалпы принцип бойынша берілген *АВ* қисығын *n* кішкентай Δs элементтерге бөлейік. Элементтердің әрқайсысының орнына бір нүктені, қарастырып отырған элементтің ауырлық центрін алып, бүкіл системаның ауырлық центрін табуға болады. Мұнда элементтің массасы жаңағы айтылған нүктеге шоғырланды деп есептелінеді (мұндай әрбір элементтің ауырлық центрі жалпы айтқанда қисықтың бойында жатпайды, бірақ дегенмен элемент неғұрлым өте кішкентай болған сайын қисыққа соғұрлым жақын жатады).

Жаңағы элементтердің біреуін мәселен $\Delta s$-ті қарайық, бұл элементтің ұштарының координаталары $(x, y)$, $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ болсын, оның ауырлық центрінің координаталарын былай белгілейік:

$(\bar{x}, \bar{y})$ (36) формулалар бойынша

$$Mx_c = sx_c = \sum \bar{x} \vartriangle m = \sum \bar{x} \vartriangle s = lim \sum x \vartriangle s = \int\limits_{(A)}^{(B)} xds. \quad (37)$$

$$My_c = sy_c = \sum \bar{y} \vartriangle m = \sum \bar{y} \vartriangle s = lim \sum y \vartriangle s = \int\limits_{(A)}^{(B)} yds. \quad (38)$$

Мұнда $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$,

ал

$$s = \int\limits_{(A)}^{(B)} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

(37) және (38) формулалардан мынадай теорема келіп шығады:

**Гульдиннің І теоремасы.** *Жазық қисықтың өзінің жазықтығында жатқан, бірақ онымен қиылыспайтын осьті айналуынан шыққан дененің бетінің ауданы, айналушы доғаның ұзындығы мен осы айналудағы доғаның ауырлық центрімен сызылған жолдың ұзындығының көбейтіндісіне тең.*

Шынында *OX* осін айналу осі үшін алатын болсақ, онда *AB* доғасының айналуынан пайда болған беттің ауданы

$$Q = 2\pi \int\limits_{(A)}^{(B)} yds$$

болатын еді.

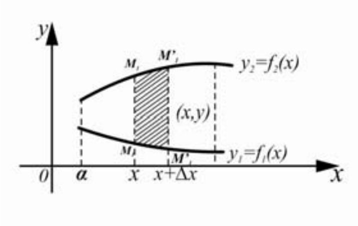
Егер (38) формуланы еске алсақ, онда

$$Q = 2\pi y_c \cdot s.$$

**2.** Енді жазық фигураны қарайық. Мұның ауданын u деп белгілейік. Бұл фигура мына теңдеулермен

$$y_1 = f_1(x),$$
$$y_2 = f_2(x)$$

берілген қисықтармен қоршалсын.



98-чертеж

Жоғарыда айталып кеткен жалпы принцип бойынша фигураның ауырлық центрінің координаталарын табуға болады.

Тілкемшенің массасы $\Delta\, m = \Delta\, u$ оның ауырлық центріне шоғырланды деп есептейміз. Осы тілкемшелердің біреуін қарастырайық және оны қоршап тұрған түзулердің абсциссаларын $x$ және $x + \Delta\, x$ арқылы белгілейік, ал $\bar{x}, \bar{y}$ арқылы ауырлық центрі координаталарын белгілейік. Егер тілкемшенің енін, яғни $\Delta\, x$-ті кішірейтсек, онда нүкте $(\bar{x}, \bar{y}$ мына $M_1\ M_2$ түзудің кесіндісінің ортасынан азақ алыста болады (98-чертеж), олай болса,

$$\bar{x} \approx x,\ \ \bar{y} \approx \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Бұл жағдайда

$$\Delta\, m \approx (y_2 - y_1)\Delta x \approx \Delta u.$$

(36) формуланы қолданып табамыз:

$$Mx_c = ux_c = \Sigma\bar{x}\Delta m = lim\Sigma x(y_2 - y_1)\Delta x = \int_a^b x\,(y_2 - y_1)dx \quad (39)$$

$$My_c = uy_c = \Sigma\bar{y}\Delta m = lim\Sigma\frac{y_2 + y_1}{2}(y_2 - y_1)\Delta x =$$

$$= lim\,\Sigma\frac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2)\Delta x = \frac{1}{2}\int_a^b\ (y_2^2 - y_1^2)\ dx. \quad (40)$$

(40) формуладан мына теорема келіп шығады:

**Гульдиннің II теоремасы.** *Жазық фигураның өзінің жазықтығында жатқан, бірақ өзімен қиылыспайтын осьті айналуынан шыққан дененің көлемі айналушы фигураның ауданы мен осы айналудағы оның ауырлық центрімен әліптелген жолдың ұзындығының көбейтіндісіне тең.*

Шынында айналу осі үшін *OX* осін алсақ, онда фигураның осы осьті айналу нәтижесінен шыққан дененің көлемі

$$V = \pi \int_{a}^{b} (y_2^2 - y_1^2) dx$$

болатын еді.

(40) теңдікті еске алып табамыз:

$$V = 2\pi y_c u.$$

*1-мысал.* Төмендегі теңдеумен

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

берілген қисықтың ауырлық центрінің координаталарын табу керек.

Бұл есепті шешу үшін (37) және (38) формулаларды қолданамыз.

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{x}{a}}\right)^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx.$$

Олай болса

$$sx = \frac{1}{2}\int_{0}^{x} x\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = a^2 + \frac{a}{2}\left[x\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) - a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\right].$$

Сол сияқты

$$s\, y_c = \frac{a}{4}\int_{0}^{x} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx = \frac{a^2}{3}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right) + \frac{1}{2}ax.$$

**3.** Кейбір физикалық тәжірибелік есептерді шешкенде анықталмаған интегралдарды қолдануға тура келеді. Қай түрде олар қолданылады, оны зерттеместен бұрын мынау есепті қарайық: екі сан $x_0, y_0$ және функция$f(x)$ берілген, $f(x)$ функцияның $x = x_0$ болғанда $y_0$-ге тең болатындай алғашқы функциясын табу керек.

$F(x)$ – берілген $f(x)$ функцияның алғашқы функцияларының біреуі болсын, ал $\varphi(x)$ – іздеп отырған алғашқы функция болсын. Онда

$$\varphi(x) = F(x) + C.$$

Бұл теңдіктегі кез келген тұрақты С-нің мәні бізге белгісіз. Қойылған есептің шарты бойынша $\varphi(x_0)$ олай болса

$$y_0 = F(x_0) + C,$$

бұл арадан

$$C = y_0 - F(x_0).$$

Сондықтан іздеп отырған алғашқы функция болады:

$$\varphi(x) = F(x) + y_0 - F(x_0).$$

Бұл қарастырылған есепті *Коши есебі* деп атайды.

Коши есебін қалай пайдалану жөнінде бір-екі мысал келтірейік.

1) Айталық бір материалды нүкте түзудің бойымен қозғалсын. Егер оның жылдамдығы уақытқа пропорционал болса, осы нүктенің жүрген жолын есептеп табу керек.

$S$ және $t$ арқылы нүктенің жүрген жолымен шыққан уақытты белгілейік, $k$ – пропорционалдық коэффициентті көрсетсін.

Туындының физикалық мағынасын еске алып табамыз:

$$\frac{ds}{dt} = kt.$$

Бұл теңдіктің екі жағын $dt$-ге көбейтіп интегралдайтын болсақ, онда

$$S = \int ktdt + C = \frac{kt^2}{2} + C$$

Кезкелген тұрақты $C$-нің мәнін табу үшін, әуелгі мезгілдегі, яғни болғандағы нүктенің жүрген жолы нольге тең деп ұйғарамыз. Міне осы ұйғаруды еске алсақ,

$$0 = \frac{k \cdot 0_2}{2} + C,$$

бұл арадан

$$C = 0$$

Сөйтіп,

$$S = \frac{kt_2}{2}.$$

2) Ньютон заңы бойынша, дененің ауадағы суу жылдамдығы дененің температурасы мен ауаның температурасының айырмасына пропорционал. Дененің температурасын *T* деп, ал ауаның температурасын *A* арқылы белгілейік.

Тәжірибе жүргізілген мезгілдегі ауаның температурасы А=20$^o$ болсын және 20 минуттың ішінде дене 100$^o$-тан 60$^o$-қа дейін суысын. Қанша уақыттың ішінде дененің температурасы 30$^o$-қа дейін төмендейді?

Дененің суу жылдамдығы $\frac{dT}{dt}$ мұнда $t$ уақытты көрсетеді. Ньютон заңы бойынша есеп шарты келесі

$$\frac{dT}{dt} = k(T - A)$$

теңдікпен беріледі, мұнда $k$ – әзірше белгісіз пропорционалдық коэффициент. Кейінгі теңдікті мына түрде жазуға болады:

$$\frac{1}{T - A} \cdot \frac{dT}{dt} = t.$$

Бұл теңдіктің екі жағын *dt*-ге көбейтіп *t* бойынша интегралдаймыз, сонда

$$\int \frac{dT}{T - A} = \int kdt + C$$

немесе

$$ln\,(T - A) = kt + C,$$

мұнда С – кез келген тұрақты сан. Кейінгі теңдіктен:

$$T = A + e^c \cdot e^{kt}$$

шығады.

Есептің шарты бойынша $t = 0$ болғанда, $T = 100^o, t = 20$ болғанда $t = 60^o$. Міне осы шарттарды пайдаланатын болсақ, онда

$$100 = 20 + e^c e^{k \cdot 20}$$
$$60 = 20 + e^c e^{k \cdot 20}$$

немесе

$$e^c = 80;$$

$$e^{20 \cdot k} = \frac{1}{2}, e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}, k = \frac{1}{20} ln \frac{1}{2}.$$

Табылған мәндерді (41) формулаға қойсақ, онда

$$T = 20 + 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}},$$

$T = 30^o$ мәнін пайдалансақ, сонда: $30 = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}};$

бұл арадан

$$10 = 80\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} t = 60 \text{ минутқа.}$$

**4.** Енді механикалық кейбір жабайы есептерін қарайық. Бір ғана материалды нүктені қарайық, бұл нүктенің массасын *m* арқылы белгілейік. Нүкте белгілі бір қисықтың бойымен қозғалады деп ұйғарсақ, онда бұл нүктенің координаталық жағдайы қисықтың доғасының ұзындығымен сипатталынады. Доға ұзындығын $s$ деп белгілейміз. Егер нүкте түзудің бойымен қозғалса, онда $s$ уақыт $t$-нің функциясы болып табылады, яғни $s = f(t)$және оның жылдамдығы:

$$\frac{ds}{dt} = f^{'}(t) = \dot{s}\,,$$

ал үдеуі

$$\frac{d^2s}{dt^2} = f"(t) = \ddot{s}.$$

болады.

Ньютонның екінші заңы бойынша нүктенің массасы мен үдеуінің көбейтіндісі нүктеге әсер етуші күшке тең. Егер нүктеге әсер етуші күш $\bar{F}$ болса, онда

$$m\ddot{s} = \bar{F}.$$

Күштің бағытымен үдеудің бағыты бір-бірімен дәл келеді. Бұл теңдеудің сол жағы эмпириялық жолмен бақылау арқылы анықталатын үдеудің шамасы болып табылады, көп жағдайда қозғалыстың өзін білмей-ақ басқа физикалық принциптерге сүйеніп, әсер етуші күштерді күнбұрын анықтауға болады. Мұндай жағдайда жаңағы тұжырымдалғын Ньютон заңы күштің анықтамасы болып табылмайды, бірақ қарастырып отырған қозғалыс жөнінде маңызды қорытындылар жасауға мүмкіндік туғызатын қатысты сипаттайды.

Күнбұрын белгілі күш, мәселен, ауырлық күш. Жоғарыдан еркімен түсуші материалды нүкте үшін Ньютон заңы мына түрде жазылған болар еді:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg \text{ немесе } \ddot{x} = \mathrm{g}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \mathrm{g}.$$

Осы кейінгі теңдіктің екі жағын $dt$-ге көбейтіп интегралдайтын болсақ, онда

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = \mathrm{g}t + C,$$

мұнда $C$ – кез келген тұрақты, оның мәнін табу үшін осы теңдіктегі $t$-нің орнына 0-ді қоямыз, сонда

$x(0) = C = v_0$ – бастапқы жылдамдық.

Сонымен,

$$\frac{dx}{dt} = gt + v_0.$$

Тағы да интегралдасақ, сонда:

$$x(t) = \frac{1}{2}g\,t^2 + v_0 t + C.$$

Бұл арадан

$x(0) = C = x_0$ – бастапқы координата, яғни нүктенің қозғалуынан бұрынғы координатасы. Сөйтіп, ең ақырында

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{g\,t^2}{2}.$$

Кейінгі қорытылып шыққан теңдеу қозғалыс процесінің толық кескінін береді.

Жоғарыдан еркімен түсуші материалды нүктеге ауырлық күштен басқа ауаның кедергі күші әсер етеді. Бұл екі күштің бағыты бір-біріне қарама-қарсы. Бұл жерде біз екі жағдайды қарастырайық:

а) Ауаның кедергі күші нүктенің жылдамдығына пропорционал; онда бұл кедергі күш болады: – *kx* (*k* – оң тұрақты сан).

б) Ауаның кедергі күші нүктенің жылдамдығының квадратына пропорционал: онда бұл күш былай өрнектеледі: – $kx^2$.

Ньютонның негізгі заңы бойынша

$$\text{а) } m\ddot{x} = mg - k\dot{x},$$

$$\text{б) } m\ddot{x} = mg - k\ddot{x}^2.$$

Былай ұйғарайық: $\dot{x} = u(t)$ онда $\ddot{x} = \dot{u}(t)$. Олай болса

$$\text{а) } m\dot{u} = m\frac{du}{dt} = mg - ku.$$

$$\text{б) } m\dot{u} = m\frac{du}{dt}mg - ku^2.$$

Бұл арадан

$$\text{а) } \frac{dt}{du} = \frac{1}{g - \frac{k}{m}u}, \text{ б) } \frac{dt}{du} = \frac{1}{g - \frac{k}{m}u^2},$$

әрқайсысының екі жағын *du*-ға көбейтіп, сонан кейін интегралдасақ, сонда:

$$\text{а) } t(u) = -\frac{m}{k}ln\left(1 - \frac{k}{mg}u\right) + t_0;$$

$$\text{б) } t(u) = -\frac{1}{2}\beta ln\frac{1-\frac{u}{\beta g}}{1+\frac{u}{\beta g}} + t_0,$$

мұнда $\beta = \sqrt{\frac{m}{kg}}, t_0$ тұрақты сандар.

Бұл екі теңдеуді *u* арқылы шешсек, сонда:

$$\text{а) } u(t) = -\frac{mg}{k}\left[e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} - 1\right], \qquad (41)$$

$$\text{б) } u(t) = -\beta g \frac{e^{-\frac{2(t-tt_0)}{\beta}}-1}{e^{-\frac{2(t-t_0)}{\beta}}+1}$$

Осы екі теңдіктен мынадай қортынды жасауға болады: уақыт *t* қаншама өскенімен жылдамдық шексіз өспейді, массаға тәуелді бір тиянақты шекке ұмтылады.

$$\text{а) } lim\, u(t) = \frac{mg}{k}, \text{б) } \lim_{t\to\infty} u\,(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

(41) теңдіктердің сол жақтарындағы $u(t)$-нің орнына $x = \frac{dx}{dt}$-ні қойсақ, сонда:

$$\text{а) } \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\frac{mg}{k}\left[e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} - 1\right],$$

$$\text{б) } \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\beta g \frac{e^{-\frac{2(t-t_0)}{\beta}}-1}{e^{-\frac{2(t-tt_0)}{\beta}}+1}.$$

Тағы да интегралдасақ, сонда

$$\text{а) } x(t) = \frac{m^2}{k^2} g e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} + \frac{mg}{k} t + c,$$

$$\text{б) } x(t) = \frac{m}{k} lnch \sqrt{\frac{kg}{m}}(t-t_0) + C,$$

мұнда *C* – кез келген тұрақты.

Егер еркімен түсуші материалды нүктенің $t = 0$ мезгілдегі $x(0) = x_0$ жағдайымен бастапқы жылдамдығы $x(0) = u(0) = v_0$ белгілі болса, онда $t_0$ және *C* тұрақтыларды табуға әбден болады.

5. Материалды нүкте берілген жазық қисықтың бойымен үйкеліссіз қозғалсын. Нүктеге әсер етуші күш – ауырлық күш *mg*.Қисық параметрлік теңдеулермен берілсін:

$$x = \varphi(\tau),$$
$$y = \psi(\tau).$$

Егер параметр $\tau$-дың орнына доғаның ұзындығы S-ті алсақ, онда қисықтың бағыты бойынша нүктеге әсер етуші күш үшін мынадай өрнекті $-mg\frac{dy}{ds}$ аламыз. Ньютон заңы бойынша:

$$\ddot{s}=\frac{d^2s}{dt^2}=-g\frac{dy}{ds}.$$

Бұл теңдіктің екі жағын $\dot{s}$-ке көбейтсек, онда

$$\ddot{s}\cdot\dot{s}=-g\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

немесе

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{s}^2\right)=-\frac{d}{dt}(gy).$$

Екі жағын интегралдасақ, сонда:

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2=-gy+C.$$

Тұрақты *C*-ні табу үшін *t=0* мезгілде нүкте мына орында $x_0=\varphi(\tau)$, $y_0=\psi(\tau)$ болды және оның бұл мезгілдегі жылдамдығы нольге тең деп ұйғарайық. Онда $-gy+c=0$, бұл арадан $c=gy_0$.

Олай болса,

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2=-g(y-y_0).$$

Бұл арадан

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\sqrt{2g(y_0-y)}}.$$

Бұл теңдіктің екі жағын *ds*-ке көбейтіп интегралдайтын болсақ, онда

$$t=C_1+\int\frac{ds}{\sqrt{2g(y_0-y)}}, \qquad (42)$$

мұнда $C_1$ – кез келген тұрақты сан. Екінші жағынан

$$ds\sqrt{=\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}\,d\tau=\sqrt{\varphi'^2(\tau)+\psi'^2(\tau)\,d\tau}.$$

Міне осы өрнекті еске алып, (42) теңдікті былай түрлендіруге болады:

$$t = C_1 + \int \sqrt{\frac{\varphi'^2(\tau) + \psi'^2(\tau)}{2g(y_0 - y)}} \cdot d\tau.$$

немесе

$$t = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{\frac{\varphi'^2(\tau) + \psi'^2(\tau)}{2g(y_0 - y)}} \cdot d\tau \qquad (43)$$

(43) теңдік арқылы біз уақытты параметр $\tau$-дың функциясы етіп табамыз, яғни $t = t(\tau)$. Осы табылған функция $t = t(\tau)$ нүктенің қозғалыс процесін толық сипаттауға мүмкіндік береді, өйткені әрбір мезгіл $t$ үшін, біз осы мезгілде нүкте жүріп өтетін қисықтың:

$$x = \varphi[\tau(t)], \quad y = \psi[\tau(t)]$$

нүктесін анықтай аламыз.

6. Мысал үшін математикалық маятникті қарайық. Мұнда берілген қисық радиусы $l$-ге тең шеңбердің доғасы:

$$x = l\sin\theta, \ \ y = -l\cos\theta.$$

Мұнда $\theta$ бұрышы ең төменгі нүктеден есептеледі.

(43) формулаға сүйеніп табамыз:

$$T = \sqrt{\frac{21}{g}} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}},$$

мұнда $\alpha$ – маятниктің ең үлкен бұрылыс бұрышын, яғни бастапқы мезгілдегі бұрылыс бұрышын көрсетеді. Бұл мезгілдегі жылдамдық нольге тең деп есептелінеді.

Егер мынадай ауыстыру:

$$u = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \qquad \frac{du}{d\theta} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

жасасақ, онда маятниктің тербеліс периоды мына түрге көшеді:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-1}^{1} \frac{du}{(1-u^2)\left(1-u^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}. \qquad (44)$$

(44) теңдіктің оң жағында тұрған интеграл элементар функциялар арқылы өрнектелмейді, бұл интегралды эллипстік интеграл деп атайды.

Егер маятниктің ең үлкен бұрылыс бұрышы $\alpha$ тым аз деп ұйғарсақ, онда радикал ішіндегі екінші көбейткіш бірге жуық болған болар еді. Онда маятниктің тербеліс периодының жуық мәні:

$$T \approx 2\sqrt{\frac{1}{\mathrm{g}}}\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\sqrt{\frac{1}{\mathrm{g}}}\, arc\sin u \;\; \begin{matrix}1\\ -1\end{matrix} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\mathrm{g}}}$$

болады.

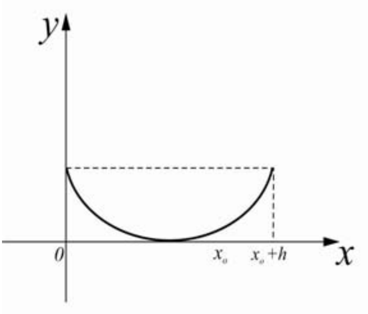
7. Енді циклоидалық маятникті қарастырайық. Жай маятниктің тербеліс периоды оның ең үлкен бұрылыс бұрышына тәуелді емес деп айтуға болмайды.

Міне осы жағдай жүрісі дәл сағаттар жасау тәжірибелерімен байланысты Нидерланд (Голландия) ғалымы Христиан Гюйгенске, тербеліс периоды бұрылыс бұрышына тәуелді болмайтын қисықты іздеуге ой салды. Мұндай қисық үшін Гюйгенс циклоиданы алды.

Материалды нүкте циклоиданың бойымен тербеліс жасау үшін циклоиданың ойыс жағы ауырлық күш бағытына қарама-қарсы болуы қажет (99-чертеж). Мұндай циклоиданың теңдеуі:

$$x = a(\tau - sin\ \tau),$$
$$y = a(1 + cos\ \tau)$$

болады.



99-чертеж.

Материалды нүктеге циклоиданың бойымен мынадай $y_0 = \alpha(1+\cos\alpha)$биіктіктегі нүктеден қисықтың ең төменгі нүктесіне барып жету үшін керек уақыт келесі формуламен өрнектеледі:

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{g}}}\int_{\alpha}^{\pi}\sqrt{\frac{x'^2+y'^2}{y_0-y}}\,d\tau =$$

$$= \sqrt{\frac{a}{\mathrm{g}}}\int_{\alpha}^{\pi}\frac{1-cos\tau}{\cos\alpha-\cos\tau}\,d\tau = \sqrt{\frac{a}{\mathrm{g}}}\int_{\alpha}^{\pi}\frac{sin\frac{\tau}{2}}{cos^2\frac{\alpha}{2}-cos^2\frac{\tau}{2}}\,d\tau;$$

$$T = -8\sqrt{\frac{\alpha}{g}}\, arc\sin\frac{cos^2\frac{\tau}{2}\pi}{cos^2\frac{\alpha}{2}\alpha} = 4\,\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Міне осы арадан тербеліс периоды $T$-нің ең үлкен бұрылыс бұрышы $\alpha$-ға тәуелді емес екендігі өзінен-өзі айқын көрініп тұр.

## §7. Математикалық анализдің кейбір мәселелерде қолданылуы жайында

Егер бұл мәселені тым тереңнен қарайтын болсақ, онда анализ пәнінің философиялық мәселесіне кетеміз. Бұл мәселені қарағандағы негізгі мақсат: анализдің кейбір методтары жаратылыс тану ғылымдарына, олардың ішінде физика мәселелеріне қалай қолданылады, міне соның мәніне жету. Ол үшін біз алдымен келесі физикалық есепті қарайық:

$X$ осінің бойында үздіксіз таралған (орналасқан) әртектес бір массаны қарайық. Мәселен, жердің бетінен тік жоғарғы тұрған, көлденең қимасы белгілі ауа бағанасын көзге елестетейік. Осы бағананың массасын есептеп табуды алдымызға мақсат етіп қояйық. Бұл есепті шешу үшін бағананың осі бойынша жоғары қарай бағытталған түзуді. $OX$ осі үшін аламыз, ал координаталардың бас нүктесі үшін жердің бетіндегі $x = 0$ нүктені аламыз. Сонда $x = 0$және абсциссалардың арасындағы масса бір $F(x)$ функциямен сипатталады. Енді $OX$осінің бойында жатқан $x$және $x\ + \Delta x$ нүктелерді қарайық. Бұл нүктелердегі массалар $F(x)$ және $F(x) + \Delta x$ болады. Ал олардың $F(x + \Delta x) - F(x)$ айырмасын бастапқы $F(x)$функцияның өсімшесі деп қарауымызға болады. Сонда $x$-тен $x + \Delta x$-ке дейінгі аралықтағы ұзындық бірлігіне тура келетін массаның орта мәні

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

болады.

Бастапқы $F(x)$ функцияны дифференциалданатын функция деп ұйғарып, алдымыздағы қатынастан $\Delta x$-ті нольге ұмтылтып шек алсақ, сонда

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x).$$

Осы шекті немесе $f(x)$ функцияны массаның нүктесіндегі тығыздығы деп атайды. Ендеше бастапқы $F(x)$ массамен оның $F(x)$ тығыздығының арасындағы қатыс мына түрде болады:

$$F(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt,$$

өйткені $f(x) = F'(x)$.

Сөйтіп, масса өзінің тығыздығының алғашқы функциясы болатын болды.

Сонымен, заттардың массасы мен тығыздығының арасындағы байланыс не интеграл, не болмаса туынды түрінде болатын болды.

Туынды, дифференциал және интеграл ұғымдары шексіз аз шама ұғымымен біте қайнасып жатқан ұғымдар. Мәселен, туынды деп біз мына $\Delta y$ және $\Delta x$ екі шексіз аздық қатынасының шегін, ал интеграл деп саны шексіз көп, шексіз аздар қосындысының шегін түсінеміз. Физикалық ақиқатта, шынында интегралға саны өте көп аз қосылғыштардың қосындысы сәйкес келеді де, ал туындыға өте кішкентай өсімшелердің қатынасы сәйкес келеді.

Мына $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынастың шегі болу үшін $y = F(x)$ функцияның үздіксіз болуы қажет. Ал барлық физикалық денелер жеке молекулалардан тұрады, олай болса олар үздіксіз емес, үзілісті. Сондықтан да жоғарыда келтірілген мысалдағы ауа бағанасының масасы үздіксіз емес, яғни $x$-тің үздіксіз функциясы болып табылмайды. *ОХ* осі бойында таралған массаны бір-біріне өте жуық жатқан молекулалардан тұрады деп есептеуіміз керек. Ал әрбір екі молекуланың бір-бірінен қашықтығы орта есеппен $10^{-8}$ – см. Ендеше массаны сипаттайтын функция $F(x)$ үзілісті.

Математикалық анализдің қорытындыларын физикалық мәселелерге қолдану үшін, физикалық сызықтың (материалды сызықтың) орнына қарастырылып отырған молекулалар ие болатын көлемді қақ жарып өтетін математикалық идеал сызықты алу керек. Міне осы математикалық идеал сызыққа анализдегі методтар, қорытындылар дұрыс болып табылады.

Мәселен, дененің тығыздығын мына $-\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ қатынастың шегі деп жоғарыда анықтадық. Тығыздықты осылай анықтау ақиқаттағы денелердің тығыздығын белгілі бір шектерге кейін сипаттай алды.

Тағы да физика саласынан бір мысал келтірейік. Бір ыдыстың ішіндегі газдың молекулаларын қарайық. Ондағы молекулалардың сандары болсын. Жылдамдығы $x$-тен кіші молекулалардың саны $N\phi(x)$ болсын. Сонда функция $\phi(x)$, $0$ мен $x$-тің арасында жатқан жылдамдықпен қозғалатын молекулалардың санымен барлық молекулалардың санының қатынасын көрсетеді.

Егер $N$-ді ойша шексіздікке ұмтылтсақ (бұл жағдай – математикалық идеализациялау), онда функция $\phi(x)$бір үздіксіз $F(x)$ функцияға ұмтылады. Былайша айтқанда $\phi(x)$ функцияға аса үлкен дәлдікпен, $F(x)$ үздіксіз функциямен ауыстырамыз. Осы $F(x)$ шектік функцияның үздіксіз туындысы бар деп ұйғарайық, яғни $F'(x) = f(x)$. Осы $f(x)$ функцияны таралу (орналасу) тығыздығы деп атайды.

Бұл тығыздықты молекуланы жылдамдығына ие болуының меншікті ықтималдығы деп те атайды.

Жоғарыда келтірілген принцип бойынша

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Бұл айтылған ойлар газдардың кинетикалық теориясында үлкен роль атқарады

## ***Жаттығулар***

1. Мына $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}$ астроидамен қоршалған фигураның ауданын табу керек.

Жауабы: $\frac{3}{8}\pi a^2$.

2. Координаталық осьтермен және мына шынжырлық $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{a}{2}} + e^{-\frac{x}{a}})$ қисықпен қоршалған фигураның ауданын $x = x_1$дейін табу керек.

3. Мына $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ лемнискатамен қоршалған фигураның ауданын табу керек.

Жауабы: $a^2$.

4. Мына $\rho = a(1 + cos\theta)$ кардиоидамен қоршалған ауданды табу керек.

Жауабы: $\frac{3}{2}\pi a^2$.

5. Мына $x = \frac{2at^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2at^3}{1+t^2}$ циссоидамен және 0X осімен қоршалған фигураның ауданын есептеу керек.

$0 \leq + \leq 8$

Жауабы: $\frac{3}{2}\pi a^2$.

6. OX осімен, $y\sqrt{2ax-x^2}=bx$ қисықпен және бұл қисықтың x = 2a асимтотасымен қоршалған фигураның ауданын табу керек.

Жауабы: $\pi ab$.

7. $y^2=ax$ парабола мен $y^2=2ax-x^2$дөңгелектің арасындағы ауданның шамасын табу керек.

Жауабы: $2\left(\frac{\pi\alpha^2}{4}-\frac{2\alpha^2}{3}\right)$.

8. Мына $y^2(x^2+a^2)=a^2x^2$ қисықпен және оның асимптоталарымен қоршалған фигураның ауданын табу керек.

Жауабы:$4\alpha^2$.

9. Мына $y=c\,sin\frac{x}{a}\ ln\,sin\ \frac{x}{a}$ қисықпен қоршалған фигураның ауданын $x=0$-ден $x=\pi a$-ға дейін есептеп шығару керек.

10. Мына $x=\frac{1}{2}aln\frac{a+\sqrt{a^2+y^2}}{a-\sqrt{a^2-y^2}}-\sqrt{a^2-y^2}$ қисықпен қоршалған фигураның ауданы $y=a$-дан $y$-ке дейін есептеп шығару керек.

11. Дөңгелектің шеңберінің бойында жатқан бір О нүктесінен диаметр *OB* және хорда *OA* жүргізілген. *A* нүктесін *OB* бойында жатқан *C* нүктесіне, ал *C* нүктесін *OA* бойында жатқан *D* нүктесіне, онан кейін *D* нүктесін *AC* бойында жатқан *M* нүктесіне проекциялайды. М нүктелерінің геометриялық орнының теңдеуін тауып және осы қисықпен қоршалған ауданды есептеу керек.

Жауабы: $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\right)R^2$.

Нұсқау. Координаталық осьтер үшін *OB* диаметрімен *O* нүктесінде оған перпендикулярді аламыз. Тік бұрышты үшбұрыштар О*AB* және ACD ұқсас, сондықтан

$$\frac{OB}{AC}=\frac{OA}{DC}$$

немесе

$$\frac{OB}{AC}=\frac{OCcsc\,\alpha}{MC\csc\alpha}=\frac{OC}{MC}$$

немесе $\frac{2R}{\sqrt{2Rx-x^2}}=\frac{x}{y}$.

Бұл арадан іздеп отырған теңдеу болады

$$y=\pm\frac{x}{2R}\sqrt{2Rx-x^2}.$$

Егер $y$ осі үшін $OB$-ге перпендикулярді алатын болсақ, онда

$$y=\pm\frac{x+R}{2R}\sqrt{R^2-x^2}.$$

12. Мына $\rho=2a\cos 2\theta\cdot cos\theta$ қисықпен қоршалған ауданды табу керек.

Жауабы: $\alpha^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\right)$.

13. Мына $y^2=2\rho x$ және $27\rho\, y^2=8(x-p)^3$ екі қисықтың арасындағы ауданның шамасын есептеп шығару керек.

Жауабы: $\frac{88\sqrt{2}}{15}\rho^2$.

14. $(0,\alpha)$нүктеден $(x,y)$ нүтеге дейін шынжырлық $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$қисықтың доғасының ұзындығын табу керек.

Жауабы: $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

15. Дөңгелектің мынадай $\rho=a\sqrt{1+t^2}$, $\theta=t-arct\,\mathrm{g}\,t$ теңдеулермен кескінделетін эвольвентасының ұзындығын табу керек.

Жауабы:$2\pi^2$.

16. Мынадай $\rho=ae^{arc\sin t}\sqrt{1-t^2}$; $\theta=arc\,sin\,t-ln\sqrt{1-t^2}$ теңдеулермен берілген қисықтың ұзындығын табу керек.

Жауабы:$a\sqrt{2(e^{arc\,sint}-1)}$.

17. Мынадай теңдеулермен $x=a\left(cost+lnt\mathrm{g}\frac{t}{2}\right), y=a\,sin\,t$ берілген трактрисса деп аталатын қисықтың ұзындығын $(0,a)$ нүктеден $(x,y)$нүктеге дейін табу керек.

Жауабы: $a\,ln\frac{a}{y}$ немесе $a\,ln\frac{1}{sint}$.

18. Кеңістікке төмендегі теңдеулермен

$$x^2+y^2=\gamma^2z^2,$$

$$\beta\,arc\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}=ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}$$

берілген қисықтың доғасының ұзындығын табу керек.

*Шешуі.* Былай ұйғарып $\sqrt{x^2+y^2}=r$, $\frac{y}{x}\equiv tg\theta$ және $r$-ді тәуелсіз айнымалы үшін алып табамыз.

$$\theta=\frac{1}{\beta}ln\frac{r}{a},\qquad z=\frac{r}{\gamma}.$$

Онан кейін

$$dx^2+dy^2=dr^2+(rd\theta)^2,$$

одай болса

$$s=\int_0^r\sqrt{1+\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2}\,dr=r\sqrt{1+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}.$$

19. Мына теңдеумен $x^2+y^2+z^2=a^2$ берілген шардың бетінде спираль сызылған, бұл спиральдің горизонталь проекциясы төмендегі теңдеумен.

$$r=\frac{a}{\frac{1}{2}(e^{\theta}+e^{-\theta})}$$

кескінделеді; бүкіл сфералық спиральдің ұзындығын экватордан полюстерге дейін табу керек.

Жауабы:$\sqrt{2}\pi a$.

*Нұсқау.*

$$z=\sqrt{a^2-r^2},\qquad e^{\theta}+e^{-\theta}=\frac{2a}{r}.$$

20. Келесі теңдеулермен

$$(y^2+x^2)^{\frac{1}{2}}(e^{narctg\frac{y}{x}}+e^{-narc\,tg\frac{y}{x}})=2a$$

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

кескінделетін локсодромия деп аталатын қисықтың ұзындығын табу керек.

*Шешуі.* Теңіздегі кемелердің барлық мердиандарды бірдей $\alpha$ бұрышпен қиып әліптейтін қисығын локсодромия деп атайды. Қисық, шардың үстінде жататын болғандықтан және онымен бірге есептеуге қолайлы болу жағын көздеп біз былай аламыз.

$$x=a\,cos\theta\cdot sin\varphi, y=sin\,\theta\cdot sin\,\varphi, z=a\,cos\,\varphi.$$

Бұл арадан

$$dx=a(cos\varphi\,cos\,\theta\,d\,\varphi-\sin\theta\cdot sin\,\varphi\;\,d\,\theta),$$
$$dy=a(sin\,\theta\,cos\,\varphi\,d\,\varphi+\cos\theta\cdot sin\,\varphi\;\,d\,\theta),$$
$$dz=-a\,sin\,\varphi\,d\,\varphi$$
$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2=}$$
$$=\sqrt{a^2(cos^2\varphi d\varphi^2)+sin^2\varphi d\varphi^2+sin\varphi d\theta^2}=a\sqrt{d\varphi^2+sin^2\varphi d\theta},$$

бұл арадан

$$s=\int_a^{\varphi}\sqrt{1+sin^2\varphi\left(\frac{d\theta}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi.$$

Қисықтың берілген теңдеуінен табамыз:

$$r=a,$$
$$\left(e^{n\theta}+e^{-n\theta}\right)\cdot sin\,\varphi=2.$$

Кейінгі теңдіктің екі жағын дифференциалдаймыз. Сонда

$$n\left(e^{n\theta}+e^{-n\theta}\right)\cdot sin\,\varphi d\theta+\left(e^{n\theta}+e^{-n\theta}\right)\cdot cos\varphi d\varphi=0.$$

Бұл жерден

$$\frac{d\varphi}{d\theta}=-\frac{n\left(e^{n\theta}+e^{-n\theta}\right)sin\varphi}{(e^{n\theta}+e^{-n\theta})cos\,\varphi}=\pm n\,sin\,\varphi$$

немесе

$$\frac{d\varphi}{d\varphi}=\pm\frac{1}{n\,sin\,\varphi}.$$

Сонымен,

$$s=\alpha\int_o^{\varphi}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\,d\varphi=\frac{a}{n}\sqrt{1+n^2\varphi}.$$

21. Мына $2br=x+y^2$ айналу параболоидының үстінде спираль сызылған. Бұл спиральдің горизонталь проекциясының теңдеуі мына түрде берілген:

$$\theta=\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a}-arc\,cos\frac{a}{r}.$$

Осы спираль доғасының ұзындығын $r=a$-дан $r$-ге дейін табу керек.

Жауабы:$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\cdot\frac{r^2-a^2}{2}$.

22. Табаны парабола $y^2 = 2px$ түзу цилиндрды параболаның $OX$ осіне $\alpha$ бұрышымен көлбеген $ABC$ жазықтығы қияды. Қиылысу сызық $AB, OX$ осіне перпендикуляр және кесінді $OK = a$ цилиндрдың $ABCO$ бөлігінің көлемін табу керек.

Жауабы: $\frac{8\sqrt{2}}{15} a^2 \sqrt{ap}\, tg\, \alpha$.

23. Табандарының радиустары бір-біріне тең, осьтері өзара перпендикуляр екі түзу дөңгелек цилиндрге ортақ көлемнің шамасын табу керек.

Жауабы: $\frac{16}{3} a^3$.

24. Мынадай теңдеумен

$$c^2 z^2 + 2\, \alpha\, b\, x\, z + \alpha^2 (x^2 + y^2 - a^2) = 0$$

берілген аллипсоидтың көлемін табу керек.

Жауабы: $\frac{4}{3} \frac{\pi a^4}{\sqrt{c^2 - b^2}}$.

25. Мына теңдеумен $xy = (a + y)\sqrt{b^2 - y^2}$ берілген қисықтың өзінің асимптотасын айналуына шыққан дененің көлемін табу керек.

Жауабы: $\pi\, b^2 \left(a\, \pi + \frac{4}{3} b\right)$.

26. Циклоида өзінің төбесіне жүргізілген жанаманы айналады. Осының нәтижесінде болған дененің көлемін табу керек.

Жауабы: $\pi^2\, a^3$.

27. Эллипс подерасы $(x^2 + y^2)^2 = a^2\, x^2 + b^2 y^2$, $OX$ осін айналады. Осы айналудың нәтижесінде пайда болған дененің көлемін табу керек.

Жауабы: $\frac{\pi}{6}\, (3a^3 + 3ab^2) + \frac{1}{2} \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\, ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$.

28. $(2a - x)y^2 = x^3$ циссоиданың өзінің асимптотасын айналуынан шыққан дененің көлемін табу керек.

Жауабы: $\pi^2 a^3$.

29. Мына түрдегі теңдеумен $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ берілген астроиданың $OX$ осін айналуынан шыққан беттің ауданын табу керек.

Жауабы: $\frac{12}{5} \pi\, a^2$.

30. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ циссоиданың OX осін айналуынан шыққан беттің ауданын есептеу керек.

Жауабы:

$$\frac{6\pi a(2a - x)}{4a - 3x} \sqrt{x(8a - 3x)} - \frac{16\pi a^2}{\sqrt{3}} arc\, cos \frac{4a - 3x}{4a} + +2\pi a^2 ln \frac{\sqrt{8a - 3x} + \sqrt{x}}{\sqrt{8a + 3x} - \sqrt{x}}.$$

31. Мынадай $r^2 = a^2 cos^2\theta + b^2 sin^2\theta$ теңдеумен берілген қисықтың поляр осін айналуынан пайда болған беттің ауданын есептеп шығару керек.

Жауабы: $2\pi \left(a^2 + \frac{b^4}{a^2 - b^2} ln \frac{a^2 + \sqrt{a^4 - b^4}}{b^2}\right)$.

32. Мынадай теңдеумен $x = a\,ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$ берілген трактриссаның *OX* осін айналуынан шыққан беттің ауданын табу керек.

Жауабы: $2\pi\ a^2$.

33. *XOZ* жазықтығында жатқан қисық $z = \sqrt{a^2-x^2}\ OX$ осін айналады. Мұның нәтижесінде шыққан дене бағыттаушысы келесі теңдеумен $by = x\sqrt{a^2-x^2}, (b \geq a)$ өрнектелген тік цилиндрмен қиылысады. Осы дененің бетінің ауданын табу керек.

Жауабы: $8a\left(a \cdot arc\ sin\frac{a}{b} - b + \sqrt{b^2-a^2}\right)$.

34. Екі цилиндр берілген $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\ z = a\,ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$, екіншісінің біріншімен қоршалған бөлігі бетінің ауданын табу керек.

Жауабы: $\frac{bx^2}{2a}$.

35. Келесі қисықтардың:

а) $x = a(t - sin\,t), y = a(1 - cos\,t)$;

б) $\rho = a(1 + cos\theta)$;

в) $\rho = ae^{\theta}$,

ауырлық центрі координаталарын табу керек.

Жауабы:

а) $x_c = \frac{a}{2} \cdot \frac{\frac{4}{3}sin^3\frac{t}{2} - (t-sint)cos\frac{1}{2}}{sin^2\frac{t}{4}}, \quad y_c = a \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}cos^2\frac{t}{2}-1\right)cos\,\frac{t}{2}+\frac{2}{3}}{sin^2\frac{t}{4}}$;

б) $x_c = \frac{4}{5}a, \quad y_c = \frac{4}{5}a$;

в) $x_c = \frac{a}{5} \cdot \frac{e^{2\theta}(2cos\theta+sin\theta)-2}{e^{\theta}-1}, \quad y_c = \frac{a}{5} \cdot \frac{e^{2\theta}(2sin\theta-cos\theta)+1}{e^{\theta}-1}$.

36. $y^2 = 16\,ax$ параболамен және $x^2 + y^2 - 10ay = 0$ дөңгелекпен қоршалған фигураның ауырлық центрін табу керек.

Жауабы: $x_c = \frac{928a^3}{15u}$.

$u\ y_c = \frac{125}{2}a^3 arc\ sin\frac{u}{5} - \frac{166}{3}a^3$.

37. Бір материалды нүкте сұйық зат ішіне бататын болсын, сұйық зат тарапынан болатын кедергіні жылдамдыққа пропорционал деп ұйғарып, қозғалыс заңын табу керек. Берілген шарттар мынадай: $t = 0$ болғанда $x = 0,\ \dot{x} = 0$.

Жауабы: $x = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m^2g^2}{k^2}$.

38. Ауаның кедергісі жылдамдықтың квадратына пропорционал деп ұйғарып, бастапқы жылдамдықсыз жоғарыдан түсуші дененің қозғалыс заңын табу керек; егер уақыт $t$ шексіздікке ұмтылса, жылдамдықтың шегі $75\frac{м}{сек}$ болсын.

Жауабы: $x = \frac{75}{g}ln\ ch\frac{g}{75}t$.

# *Төртінші бөлім.*
# ҚАТАРЛАР ТЕОРИЯСЫ

## XIII ТАРАУ
## САН ҚАТАРЛАРЫ

### § 1. Қатар ұғымы. Жинақты және жинақсыз қатарлар

1. Қатарлар теориясы – математикалық анализдің маңызды бөлімдерінің бірі болып табылады.

Барлық натурал сандар жиынында анықталған функцияны тізбек деп айтады деп біз II тарауда айтып кеттік. Айталық бізге сандар тізбегі берілсін:

$$a_1, a_2, \ . \ . \ . \ , a_n, \ . \ . \ . \ .$$

Осы тізбектің мүшелерінен келесі өрнекті құрайық:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ . \ . \ . + a_n + \ . \ . \ . \qquad (1)$$

немесе

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

Осы өрнекті *шексіз қатар* деп атайды, ал $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ сандарды оның мүшелері деп атайды. Бұл сандардың барлығын біз нақты сандар деп есептейміз.

(1) өрнекті арифметикадан белгілі кәдімгі қосынды мағынасында түсінуге болмайды, бұл жағына сақ болу керек.

(1) қатардың мүшелерінен келесі тізбекті құрайық:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ . \ . \ . \ . \ ,$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ . \ . \ . + a_n, \ . \ . \ . \ .$$

Бұл құрылған

$$S_1, S_2, S_3, \ . \ . \ . \ , S_n, \ . \ . \ . \qquad (2)$$

тізбекті (1) қатардың дербес қосындыларының тізбегі деп атайды.

Егер $n$ шексіздікке ұмтылғанда (2) тізбек бір тиянақты шекке ұмтылса, яғни мына шек

$$\lim_{n \to 0} S_n = S \qquad (3)$$

бар болатын болса, онда (1) қатарды жинақты қатар деп атайды. $S$ санын осы қатардың қосындысы деп атайды және оны былай жазады:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Егер *n* шексіздікке ұмтылғанда (2) тізбек тиянақты шекке ұмтылса немесе плюс, минус шексіздікке ұмтылса, онда (1) қатарды жинақсыз қатар деп атайды.

Элементар математикадан белгілі геометриялық прогрессияны қарайық:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + . . . + aq^n + . . . . \qquad (4)$$

Егер бұл прогрессияның еселігі q-дің абсолют шамасы бірден кіші болса, яғни $|q| < 1$, онда қаралып отырған (4) қатар жинақты, ал егер $|q| > 1$ болса, онда (4) қатар жинақсыз болады.

Мұны дәлелдеу үшін (4) қатардың дербес қосындысын табамыз:

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + . . . + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} =$$

$$= \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}$$

*n*-ді шексіздікке ұмтылып бұл арадан шекке көшсек, онда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1 - q} \text{ егер } |q| < 1\text{, болса;}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty, \text{егер } |q| > 1 \text{ болса.}$$

Сонымен, егер $|q| < 1$ болса, онда (4) қатардың қосындысы $S = \frac{a}{1-q}$.

Осы қаралған мысалдан немесе берілген анықтамадан мынадай қорытынды жасауға болады: қатардың қосындысын құру процесі саны шектелуі қосылғыштардан тұратын үйреншікті жай қосындыны құру процесіне ұқсас емес. Қатардың мүшелерін біріне-бірін біртіндеп қосып, оның қосындысын табу деген мәселе тіпті мүмкін емес, өйткені оның мүшелерін түгел «тауысу» тіпті болмайтын іс. Сонымен, шексіз қатардың қосындысын өзімізге үйреншікті қосу амалын қолданып табу мүмкін емес. Сондықтан оның қосындысын табу үшін басқа амалды, атап айтқанда, шекке көшу амалын қолданамыз. Бұл амалдың қалай қолданылуы туралы ең баста айтылды, дегенмен оны тағы да еске түсірейік. Шексіз қатардың қосындысын табу үшін (2) тізбекті құрамыз, сонан соң осы тізбектің шегін табамыз. Тіпті (2) тізбекті құрмайақ, қатардың $S_n$ дербес қосындысын құрып, содан шекке көшсе де болады. Бұл дербес қосынды өзінің номері $n$-нің функциясы болып табылады.

2. Сөйтіп, (1) қатардың қосындысы туралы мәселе (2) тізбектің шегімен байланысты болады.

(2) тізбектен (1) қатардың әрбір мүшесін табуға болады, мәселен

$$a_1 = s_1, \qquad a = s_2 - s_1, \;\; a_3 = s_3 - s_2, \;\; . \; . \; . \; ,$$
$$a_n = s_n - s_{n-1}, \;\; . \; . \; .$$

Осы кейінгі қатыстарды пайдаланып келесі теореманы дәлелдеуге болады.

**Теорема.** *Егер (1) қатар жинақты болса, онда*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Мұның алдында ғана айтылған ескертпе бойынша $a_n s_n -$ $-s_{n-1}$.

Қатар жинақты болғандықтан

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s.$$

Ендеше

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Бұл дәлелденген теореманы қатардың жинақтылығының *қажетті шарты* деп атайды. Бұл шарттың орындалуынан (1) қатар әрдайым жинақты болады деп қорытынды жасауға болмайды. Мысалы мына қатарды қарайық:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \; . \; . \; . \; + \frac{1}{n} + \; . \; . \; . \; . \qquad (5)$$

Бұл қатарды *гармониялық* қатар дейді.

(5) қатардың $n$-ші мүшесі $a_n = \frac{1}{n}$ бұл арадан шекке көшсек, онда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Бұлай болғанымен де гармониялық қатар жинақсыз. Оны дәлелдеу үшін мынадай бір мәселеге тоқтап кетуге тура келеді.

(1) қатармен бірге келесі қатарды қарайық:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \; . \; . \; . + a_{n+p} + \; . \; . \; .. \qquad (6)$$

Егер (1) қатар жинақты болса, онда (6) қатар да жинақты болады және керісінше, егер (6) қатар жинақты болса, онда (1) қатар да жинақты болады.

Егер (1) қатар жинақсыз болса, онда (6) қатар да жинақсыз болады және керісінше.

Егер (1) қатардың дербес қосындысын $S_n$ арқылы, (6) қатардың дербес қосындысын $\sigma_p$ арқылы белгілесек, онда

$$S_{n+p} = (a_1 + a_2 + \,.\,.\,. + a_n) + \left(a_{n+1} + a_{n+2} + \,.\,.\,. + a_{n+p}\right) =$$
$$= S_n + \sigma_p.$$

$S_{n+p}$ бұда (1) қатардың дербес қосындысы.

Егер (1) қатар жинақты болса, онда

$$\lim_{p\to\infty} S_{n+p} = S$$

олай болса $P$ шексіздікке ұмтылғанда, дербес қосында $\sigma p$ тиянақты шекке ұмтылады, атап айтқанда,

$$\lim_{p\to\infty} \sigma p = S - S_n.$$

Ендеше (6) қатар жинақты. Егер (6) қатар жинақты болса, онда

$$\lim_{p\to\infty} \sigma_p = \sigma.$$

Олай болса, Р шексіздікке ұмтылғанда, дербес қосынды $S_{n+p}$ тиянақты шекке ұмтылады, атап айтқанда,

$$\lim_{p\to\infty} S_{n+p} = S_n + \sigma_n.$$

Демек, (1) қатар жинақты.

Егер (6) қатар жинақты болса, онда оның қосындысын (мұны $R_n$ деп белгілейік) (1) қатардың қалдығы немесе қалдық мүшесі деп атайды.

Бұдан кейін (1) қатардың қосындысын былай жазуға болады:

$$S = S_n + R_n. \tag{7}$$

(7) теңдіктен мынадай қорытындыға келеміз: (1) қатар жинақты болу үшін $n$ шексіздікке ұмтылғанда оның қалдық мүшесі $R_n$ нольге ұмтылуы қажетті және жеткілікті.

Енді (5) гармониялық қатардың жинақсыздығын дәлелдейік. Ол үшін оның қалдық мүшесін алайық:

$$R_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \;.\,.\,.\; \frac{1}{n+p} + \;.\,.\,. \tag{8}$$

Бұл кейінгі қатардың дербес қосындысын $\sigma_n$ арқылы белгілейік, сонда

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \,.\,.\,. + \frac{1}{n+n}.$$

Ал $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$, . . ., $\frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$, олай болса,

$$\sigma_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \,.\,.\,. + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Демек, $n$ шексіздікке ұмтылғанда (8) қатар нольге ұмтылмайды. Ендеше (5) гармониялық қатар жинақсыз.

Шексіз қатардың жинақтылығына қажетті шарты көп жағдайларда оның жинақсыздығын тағайындау үшін керек болады.

Егер, мәселен $n$ шексіздікке ұмтылғанда қатардың $n$-ші мүшесі $a_n$ нольге ұмтылса, онда қатар жинақсыз.

## § 2. Коши критерийі. Қатарларға жай амалдар жүргізу.

1. Тағы да (1) шексіз қатарды қарайық:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

Төмендегі қосындыны

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \tag{9}$$

(1) қатардың «кесіндісі» деп атайды. Екінші жағынан бұл «кесінді» тең:

$$S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}. \tag{10}$$

Жоғарыда берілген анықтама бойынша, егер (2) тізбек жинақты болса, онда (1) қатар да жинақты болады. Сондықтан (2) тізбекке жарамды жинақтылық белгі (1) қатарға да жарамды болады. (2) тізбек үшін Кошидің жинақтылық белгісі бізге II тараудан белгілі. (1) қатарға бейімдеп сол белгіні тағы тұжырымдауға тура келеді.

**Теорема.** *(1) қатар жинақты болу үшін алдын ала берілген оң $\varepsilon$ санына сәйкес $N = N(\varepsilon)$ саны табылып, осы $N$ санынан артық барлық $n$-дер $(n > N)$ және кез келген натурал $p$ саны үшін төменгі теңсіздіктің*

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| < \varepsilon \tag{11}$$

*орындалуы қажетті және жеткілікті.*

Бейнелеп айтқанда (1) қатар *жинақты* болу үшін, $p$ шексіздікке ұмтылғанда оның «кесіндісінің» нольге ұмтылуы қажетті және жеткілікті.

Бұл теореманың дәлелдеуін келтірмейміз, өйткені ол бұрын бізде дәлелденген.

Тұжырымдалған теореманы (1) қатардың жинақтылығы туралы Коши белгісі немесе критерийі дейді.

Бұл теорема немесе белгі бойынша біз (1) қатардың қосындысының барлығын ғана білеміз, ол қосындының шамасы жөнінде бұл белгі ешнәрсе айтпайды.

Теориялық зерттеулерде Коши белгісінің маңызы өте зор, бірақ іс жүзінде есептер шығарғанда ол өте сирек қолданылады. Мұның бұлай болу себебі: есептерде берілетін әрбір жеке қатар үшін (11) теңсіздікті тағайындау өте қиын мәселе. Дегенмен бір мысал келтірейік:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ .\ .\ .+\frac{1}{n^2}+\ .\ .\ .\ .$$

Осы қатар үшін Коши белгісін қолданайық. Сонда

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ .\ .\ .+a_{n+p}\right|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ .\ .\ .+$$

$$+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n(n+1)}+$$

$$+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ .\ .\ .+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\ .\ .\ .+\left(\frac{1}{n+p+1}-\frac{1}{n+p}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}=\frac{p}{n(n+p)}<\frac{1}{n}$$

$\varepsilon$ – алдын ала берілген оң мейлінше аз сан болсын. Осы $\varepsilon$ саны бойынша $N$ санын мына теңсіздік $\frac{1}{N}<\varepsilon$ орындалатындай етіп сайлап алайық. Онда $N$ санынан артық барлық $n$-дер $(n>N)$ үшін төмендегі теңсіздік

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ .\ .\ .+a_{n+p}\right|<\varepsilon$$

орындалады, өйткені $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Демек, мысалға алынып отырған қатар жинақты.

2. Егер (1) қатар жинақты және оның қосындысы $S$ болса, ал $c$ – тұрақты сан болса, онда мына қатар да

$$c\,a_1+c\,a_2+c\,a_3+\ .\ .\ .+c\,a_n+\ .\ .\ .$$

жинақты болады және оның қосындысы $cS$ *болады*.

(1) қатардан басқа тағы да мынадай қатарды қарайық:

$$b_1+b_2+\ .\ .\ .+b_n+\ .\ .\ . \qquad (12)$$

Егер (1), (12) қатарлар екеуі бірдей жинақты болса және олардың қосындылары S пен $\sigma$ болса, онда мына қатар да

$$(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\ .\ .\ .+(a_n\pm b_n)+\ .\ .\ .$$

жинақты болады және оның қосындысы $S \pm \sigma$ болады.

Егер қатар жинақты болса, онда оның саны шектеулі бірнеше мүшелерін өзгерткеннен қатардың жинақтылығы өзгермейді; осындай өзгертудің нәтижесінде шыққан қатардың қосындысы тең: бастапқы берілген қатардың қосындысына плюс өзгерген мүшелермен әуелгі мүшелердің айырмалары.

Бұл арада бір ескертіп кететін мәселе мынау: саны шектеулі қосылғыштардың қосындысына тән қасиеттер жинақты қатарларға да тән болады деп ойлау негізінде қате болады. Мәселен, саны шектеулі қосылғыштардың қосындысы қосылғыштардың орналасу ретінде тәуелді емес (бұл негізгі қасиет), ал жинақты қатарларда тіпті олай емес, олардың мүшелерінің орындарын бір-бірімен қалай болса солай алмастыруға болмайды. Саны шектеулі қосылғыштардың біразын топтап жақшалардың ішіне алсақ, сонан кейін ол жақшаларды ашып жіберсек, одан қосынды өзгермейді, ал қатарлар үшін мұны жасауға болмайды. Міне осыған бір мысал келтірейік:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ .\ .\ .+\frac{1}{2^n}+\ .\ .\ .\ .$$

Бұл қатар еселігі $\frac{1}{2}$-ге тең геометриялық прогрессия. Сондықтан, ол жинақты қатар және оның қосындысы тең.

$$S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Мысал үшін алынып отырған қатарды былай да жазуға болады:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{7}{8}\right)+\ .\ .\ .+\left(1-\frac{2^n-1}{2^n}\right)+\ .\ .\ .$$

Бұл қатар жинақты және оның қосындысы 1-ге тең. Енді жақшаларды ашып жіберейік, сонда

$$1-\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}+1-\frac{7}{8}+\ .\ .\ .+1-\frac{2^n-1}{2^n}+\ .\ .\ .. \qquad (13)$$

Бұл шыққан қатар жинақсыз. Оны былай дәлелдеуге болады. Дербес қосындысын алайық.

$$S_n=1-\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}+1-\frac{7}{8}+\ .\ .\ .+1-\frac{2^n-1}{2^n}.$$

егер *n* – жұп болса, яғни *n = 2m*, онда

$$S_{2m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ .\ .\ .+\frac{1}{2m}=1-\frac{1}{2m}; \qquad (14)$$

егер *n* – тақ болса, яғни *n = 2m+1*, онда

$$S_{2m+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ .\ .\ .+\frac{1}{2m}+1=1-\frac{1}{2m}+1=2-\frac{1}{2m} \qquad (15)$$

(14) және (15) теңдіктерден мынадай қорытындыға келеміз:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=1, \qquad \text{егер } n-\text{жұп болса,}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=2, \qquad \text{егер } n-\text{тақ болса.}$$

Сөйтіп, *n* шексіздікке ұмтылғанда (13) қатардың дербес қосындысы бір тиянақты шекке ұмтылмайды. Олай болса, (13) қатар жинақсыз.

## § 3. Мүшелері оң қатарлар

Егер қатардың барлық мүшелері $a_n$ келесі теңсіздікті $a_n \geq 0\ (n=1,2,...)$ қанағаттандырса, онда мұндай қатарды мүшелері оң қатар деп атайды.

Мүшелері оң қатарды қарайық:

$$a_1+a_2+\ .\ .\ .+a_n+\ .\ .\ .\ . \qquad (16)$$

Мүшелері оң қатардың дербес қосындыларынан құрылған тізбек

$$S_1,S_2,\ .\ .\ .\ ,S_n,\ .\ .\ .\ . \qquad (17)$$

үдемелі болады, өйткені (16) қатардың мүшелері оң болғандықтан $S_n < S_{n+1}$ бұл арадан мынадай теоремаға келеміз:

**Теорема.** *Мүшелері оң (16) қатар жинақты болу үшін оның дербес қосындыларынан құрылған (17) тізбектің оң жағынан шектелуі қажетті және жеткілікті.*

Егер теореманың шарты орындалса, онда (17) тізбек жинақты болады ол бізге белгілі, ендеше (16), қатар да жинақты болады.

## § 4. Мүшелері оң қатарлар жинақтылығының жеткілікті белгілері

Мүшелері оң екі қатарды қарайық:

$$a_1+a_2+\ .\ .\ .+a_n+\ .\ .\ .=\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (16)$$

$$b_1+b_2+\ .\ .\ .+b_n+\ .\ .\ .=\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \qquad (18)$$

Осы екі қатар жөнінде келесі теореманы дәлелдеуге болады:

**1-теорема.** *Егер бір номерден бастап (мәселен $n \geq N$) мына теңсіздік $a_n \leq b_n$ орындалса, онда (18) қатардың жинақтылығынан (16) қатардың жинақтылығы келіп шығады (немесе бәрібір (16) қатардың жинақсыздығынан (18) қатардың жинақсыздығы келіп туады).*

Бұл теореманы қатарларды салыстыру принципі немесе белгісі деп атайды.

Айталық теореманың шарттарында келтірілген теңсіздік бірінші номерден бастап орындалатын болсын, яғни $a_n \leq b_n \, (n = 1, 2, ...)$ (16) қатардың дербес қосындысын $S_n$ арқылы, ал (18) қатардың дербес қосындысын $\sigma_n$ арқылы белгілесек, онда теореманың шарттары бойынша

$$S_n \leq \sigma_n.$$

Егер (18) қатар жинақты болса, онда қосынды $\sigma_n$ жоғарғы жағынан бір белгілі $M$ санымен шектелген болады, яғни $\sigma_n \leq M$.

Демек, $S_n \leq M$, олай болса үшінші параграфтағы теорема бойынша (16) қатар жинақты.

Мәселен, төмендегі қатарды қарайық:

$$\frac{|\sin x|}{2} + \frac{|\sin 2x|}{2^2} + \frac{|\sin 3\, x|}{2^3} + . . . + \frac{|\sin nx|}{2n} + . . .$$

Бұл қатар жинақты, өйткені $\frac{|\sin nx|}{2n} \leq \frac{1}{2n}$ ал қатар $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + . . . + \frac{1}{2n} + . . .$ бізге белгілі жинақты.

**2-теорема.** *Егер*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0,$$

*онда (16) және (18) қатарлар екеуі бірдей жинақты болады немесе екеуі бірдей жинақсыз болады.*

Шектің анықтамасы бойынша алдын ала берілген оң $\varepsilon$ санына сәйкесті $N = N(\varepsilon)$ саны табылып осы $N$ санынан артық барлық $n$-дер $n \geq N$ үшін келесі теңсіздік

$$k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon$$

орындалуға тиіс. Бұл арадан

$$(k - \varepsilon)\, b\, n \, < a\, n \, < (k + \varepsilon)\, b\, n\,.$$

Егер (18) қатар жинақты болса, онда мына

$$\sum_{n=1}^{\infty} (k + \varepsilon)\, b_n$$

қатарда жинақты болады. Сондықтан да мұның алдындағы теорема бойынша (16) қатар жинақты болады.

Егер (18) қатар жинақсыз болса, онда мына

$$\sum_{n=1}^{\infty}(k-\varepsilon)\, b_n$$

қатарда жинақсыз болады. Демек, (16) қатар жинақсыз болады.

Бір-екі мысал келтірейік.

а) $\sum_{n\to 1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)$,

бұл қатардың жинақтығын тексеру үшін, оны мына

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

жинақты қатармен (§ 2 қараңыздар) салыстырамыз. Сәйкесті мүшелерінің қатынасын құрып, одан шек алайық.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2sin^2\frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\pi^2}{2}lim\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^2=\frac{\pi^2}{2}.$$

Мысалға алынып отырған қатар жинақты.

Келесі екі қатарды қарайық:

$$\text{б)}\sum_{n=1}^{\infty}ln\left(1+\frac{c}{n^2}\right),\qquad \text{в)}\sum_{n=1}^{\infty}ln\left(1+\frac{c}{n}\right),$$

мұнда *c* – оң тұрақты сан. Бұл қатарлардың біріншісін мына

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{n^2}$$

қатармен, екіншісін мына

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{n}$$

қатармен салыстырайық. Сонда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ln\left(1+\frac{c}{n^2}\right)}{\frac{c}{n^2}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{ln\left(1+\frac{c}{n}\right)}{\frac{c}{n}}=1.$$

Бұл арадан мынадай қорытындыға келеміз: мысал үшін алынып отырған қатарлардың біріншісі жинақты, екіншісі жинақсыз (өйткені қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n}$$

жинақсыз).

**3-теорема.** *Егер бір номерден бастап (мәселен $n \geq N$) келесі теңсіздік*

$$\frac{a_n+1}{a_n} \leq \frac{b_n+1}{b_n} \qquad (19)$$

орындалса, онда (18) қатардың жинақтылығына (16) қатардың жинақтылығы келіп шығады немесе бәрібір (16) қатардың жинақсыздығынан (18) қатардың жинақсыздығы келіп шығады.

Айталық (19) теңсіздік бірінші номерден бастап орындалсын:

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}; \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}; \ . \ . \ .; \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Егер бұл теңсіздіктерді мүшелеп көбейтсек, онда

$$\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1} \ \text{немесе} \ a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n (n = 1, 2, \ . \ . \ .).$$

Егер *bn* сандардан құрылған қатар жинақты болса, онда мына

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$$

қатарда жинақты болады; ендеше 1-ші теорема бойынша $a_n$ сандардан құрылған қатар жинақты болады. Теорема дәлелденді.

Енді (16) қатарды келесі жинақты геометриялық прогрессиямен

$$1 + q + q^2 + q^3 + . \ . \ . + q^n + . \ . \ . (0 < q < 1)$$

салыстырайық.

Егер бір номерден бастап (мәселен $n \geq N$) мына теңсіздік $a_n \leq q^n$ немесе бәрі бір мына теңсіздік $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ орындалса, онда (16) қатар жинақты болады. Бұл арадан мынадай теоремаға келеміз:

**4-теорема.** (Коши теоремасы). Егер бір номерден бастап (мәселен $n \geq N$) мына теңсіздік $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, мұнда: $q$ – тұрақты және 1-ден кіші сан, яғни $q < 1$ орындалса, онда (16) қатар жинақты. Егерде $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ болса онда (16) қатар жинақсыз.

**2. Коши белгісі.** Айталық

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = l,$$

егер $l < 1$ болса, онда (16) қатар жинақты, егер $l > 1$ болса, онда (16) қатар жинақсыз. Егер $l = 1$ болса, онда қатардың жинақтылығы бұл белгімен шешілмейді.

$l < 1$ болсын. Оң құнарсыз аз $\varepsilon$ санын мына теңсіздік $l + \varepsilon < 1$ орындалатындай етіп сайлап алайық. Теореманың шарттары бойынша осы $\varepsilon$ санына сәйкесті $N = N(\varepsilon)$ саны табылып, N-нен артық n(n≥ $N$) номерден бастап барлық $\sqrt[n]{a_n}$ сандар мына $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ интервалдың ішінде жатады, былайша айтқанда келесі теңсіздік

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$$

орындалады. $\varepsilon$ санын сайлап алуымыз бойынша $l + 1 = q < 1$
Олай болса

$$\sqrt[n]{a_n} < q < 1$$

Ендеше Коши (4-ші) теоремасы бойынша (16) қатар жинақты.

Егер $l > 1$ болса, онда $\sqrt[n]{a_n} > 1$. Олай болса сол теорема бойынша (16) қатар жинақсыз.

Бір-екі мысал келтірейік:

а) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$

Бұл қатардың жинақтылығын тексеру үшін Коши белгісін қолданайық. Сонда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

қатар жинақты.

б) $\frac{3}{1} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n + \ldots$

Бұл қатарда да Коши белгісін қолданайық, сонда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2.$$

Қатар жинақсыз.

3. Мүшелері оң қатарлардың жинақтылығын тексеру үшін Коши белгісінен басқа Даламбер белгісі қолданылады.

**5-теорема.** (Даламбер теоремасы). Егер бір номерден бастап (мәселен n≥ $N$) мына теңсіздік $\frac{a_n+1}{a_n} \leq q$ (мұнда $q < 1$) орындалса, онда (16) қатар жинақты болады. Егерде $\frac{a_n+1}{a_n} \geq 1$ болса, онда (16) қатар жинақсыз болады.

Теореманың шарттары бойынша $\frac{a_n+1}{a_n} \leq q$ бұл арадан $a_n + 1 \leq a_n q$ (мұнда $q$ – дұрыс бөлшек). Сондықтан, *N*-нен артық барлық *n*-дер үшін келесі теңсіздіктер орындалады:

$$a_{N+1} \leq a_N\, q;\;\; a_{N+2} \leq a_{N+1}\, q \leq a_N q^2,$$

$$a_{N+3} \leq a_{N+2}\, q \leq a_N\, q^3;\; a_{N+p} \leq a_{N+p-1}\, q \leq a_N\, q^p,\; . \; . \; . \; . \qquad (20)$$

Қатар

$$a_N(q + q^2 + q^3 + q^4 + . \; . \; . \; . + q^p + . \; . \; .)$$

$q < 1$ геометриялық прогрессия.

(20) теңсіздіктерден мынадай қорытындыға келеміз: (16) қатардың барлық мүшелері *N+1* номерден бастап жинақты геометриялық прогрессияның сәйкесті мүшелерінен кіші болатын болды. Ендеше (16) қатар жинақты.

Егер *N*-нен артық барлық *n*-дер үшін $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ болса, онда $a_{n+1} \geq a_n$. Осы кейінгі теңсіздіктен мынадай қорытындыға келуге болады: (16) қатардың мүшелері *N+1*-ден бастап кемімейді, демек қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындалмайды. Олай болса (16) қатар жинақсыз.

**Даламбер белгісі.** Егер

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

бар болса, және бірден кіші болса, онда (16) қатар жинақты болады; егерде

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

бар болса және бірден артық болса немесе шексіз өссе, онда (16) қатар жинақсыз болады. Егер

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

болса, онда қатардың жинақтылығы Даламбер белгісімен шешілмейді.

Айталық

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

мұнда $l < 1$. Оң құнарсыз $\varepsilon$ аз санын мына теңсіздік $l + \varepsilon < 1$ орындалатындай етіп сайлап алайық. Сонда шектің анықтамасы бойынша осы $\varepsilon$ санына сәйкесті $N = N(\varepsilon)$ саны табылып $N$-нен артық барлық $n$-дер үшін $\mathrm{n} \geq N$ келесі теңсіздік орындалады:

$$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon.$$

Кейінгі теңсіздіктің оң жағын алайық:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon < 1.$$

Кейінгі теңсіздіктен мынадай қорытындыға келеміз: (16) қатардың мүшелері Даламбер теоремасы шарттарын қанағаттандырады. Ендеше қатар жинақты.

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$ болса, онда $N$-нен артық барлық $n$-дер үшін мына теңсіздік $a_{n+1} > a_n$ орындалады. Демек, қатардың мүшелері кемімейді, былайша айтқанда оның жинақтылығының қажетті шарты орындалмайды.

Бір мысал келтірейік:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots (x > 0).$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0.$$

Мысал үшін алынып отырған қатар жинақты.

4. Коши белгісі Даламбер белгісіне қарағанда күштірек. Бұл пікірді былай түсінуге болады: егер Даламбер белгісі жарамды болса, онда Коши белгісі тіпті жарамды болады. Керісінше дұрыс болмауы да мүмкін. Бұған бір мысал келтірейік:

$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + \ldots + a^n b^{n-1} + a^n b^n + \ldots .$$

$a$ мен $b$ – әр түрлі оң сандар.

Коши белгісі бойынша

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n b^n} = ab.$$

Даламбер белгісі бойынша $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = a$; немесе $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = b$; былайша айтқанда қатынас $\frac{a_n+1}{a_n}$ ешбір тиянақты шекке ұмтылмайды.

## § 5. Кошидің интегралдық белгісі

1. Егер *n* шексіздікке ұмтылғанда қатынас $\frac{a_n+1}{a_n}$ немесе $\sqrt[n]{a_n}$ бірге ұмтылса, онда Даламбер және Коши белгілерімен қатардың жинақтылығы немесе жинақсыздығы шешілмейді деп біз жоғарыда айттық. Осы айтылған екі белгі қанағаттанарлық жағдайға келтірмесе, онда басқа белгілерді қолдануға тура келеді. Сол белгілердің біреуі Кошидің интегралдық белгісі. Міне енді соны баяндауға кірісеміз.

Айталық бір мәнді функция $\varphi(x)$ аргумент *x*-тің бір мәнінен, мәселен оның а мәнінен бастап оң болып ылғи кемитін болсын және *x* шексіз өскен сайын нольге ұмтылатын болсын. Былайша айтқанда $x$ *осі* $l = \varphi(x)$ функцияны кескіндейтін қисықтың асимптотасы болып табылады.

Енді осы функцияның *a*-дан *l*-ге дейін алынған анықталған интегралын қарайық:

$$\int_a^l \varphi(x)\,dx. \qquad (22)$$

*l* шексіздікке ұмтылғанда, осы қаралып отырған интеграл не бір тиянақты шекке ұмтылады немесе шексіз өседі. Бұл жағдай бізге меншіксіз интегралдар теориясынан белгілі.

Коши теоремасының тұжырымдауына келейік:

**Теорема.** *Егер (22) интегралдың шегі шексіздікке ұмтылғанда интеграл бір тиянақты шекке ұмтылса, онда төмендегі қатар*

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \ . \ . \ . + \varphi(a+n) + \ . \ . \ . \qquad (23)$$

*жинақты болады, егер бұл жағдайда (22) интеграл шексіздікке ұмтылса, онда (23) қатар жинақсыз болады.*

*a*+*p* – *1* санымен *a*+*p* санының арасындағы *x*-терді қарайық:

$$a + p - 1 < x < a + p.$$

Функция $\varphi(x)$ кеміме болғандықтан, ол мына теңсіздікті

$$\varphi(a+p-1) > \varphi(x) > \varphi(a+p)$$

қанағаттандырады. Енді осы теңсіздіктің әрбір жағын *a*+*p* – 1-ден *a*+*p*-ге дейін интегралдасақ, сонда

$$\varphi(a+p-1) > \int_{a+p-1}^{a+p} \varphi(x)dx > \varphi(a+p).$$

$p$-ге біртіндеп 1, 2, 3, ..., $n$ мәндерді беріп, сонан кейін осының нәтижесінде шыққан теңсіздіктерді қоссақ, сонда:

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \ldots + \varphi(a+n-1) > \\ > \int_a^{a+n} \varphi(x)dx. \qquad (24)$$

$$\varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \ldots + \varphi(a+n) < \int_a^{a+n} \varphi(x)dx. \qquad (25)$$

(25) теңсіздіктің екі жағына $\varphi(a)$ қоссақ, сонда

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \ldots + \\ + \varphi(a+n) < \int_a^{a+n} \varphi(x)dx + \varphi(a). \qquad (26)$$

Егер

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^l \varphi(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{a+n} \varphi(x)dx = L$$

болса,

онда (26) теңдіктің сол жағы мына $\varphi(a) + L$ саннан кіші болады, яғни

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \ldots + \\ + \varphi(a+n) < L + \varphi(a). \qquad (27)$$

(27) теңсіздіктің орындалуынан біз мынадай қорытындыға келеміз: мүшелері оң (23) қатардың қосындысы жоғарғы жағынан шектелген, ендеше (23) қатар жинақты.

Егер $n$ шексіз өскен сайын интеграл

$$\int_a^{a+n} \varphi(x)\,dx$$

да шексіз өссе, онда (24) теңсіздік бойынша (23) қатардың дербес қосындысы $\varphi(a) + \varphi\big(a + 1 + \cdots + \varphi(a+n)\big)$ шексіз өседі. Демек, бұл жағдайда (23) қатар жинақсыз.

Бір-екі мысал келтірейік.

а) Төмендегі қатардың

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$$

жинақтылығын зерттеу керек, мұнда $\alpha > 0$.

Берілген қатардың жалпы $\frac{1}{n^{\alpha}}$ мүшесі бойынша $\varphi(x)$ функцияны құрамыз: $y(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$

Бұдан кейін мына интегралды

$$\int_{\alpha}^{l}\varphi(x)\,dx$$

табамыз, қарастырып отырған мысал үшін ол

$$\int_{1}^{l}\frac{dx}{x^{\alpha}}=-\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\Big|_{1}^{l}=-\frac{1}{(1-\alpha)l^{\alpha-1}}+\frac{1}{(1-\alpha)1^{\alpha-1}}$$

болады.

Бұл арадан

$$\lim_{l\to\infty}\int_{1}^{l}\frac{dx}{x^{\alpha}}=0,\qquad \text{егер,}\qquad \alpha>1 \text{ болса}$$

$$\lim_{l\to\infty}\int_{1}^{l}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\infty \text{ егер } \alpha\leq 1 \text{ болса.}$$

Сонымен екінші мысал үшін алынып отырған қатар егер $\alpha>1$ болса, жинақты болады, егер $\alpha<1$ болса, жинақсыз болады.

2. Коши өзінің анализ курсы[1] деген кітабында, біз бірінші мысал үшін алып отырған қатардан келесі теореманы қорытады.

**Теорема.** *Егер бір номерден бастап (мәселен $n\geq N$ бастап) мына қатынас $\frac{ln\frac{1}{a^{n}}}{ln\,n}$ бірден артық белгілі бір тиянақты саннан ылғи үлкен болып отырса, онда (16) қатар жинақты болады; ал егерде қатынас $\frac{ln\frac{1}{a_n}}{ln\,n}$ бірден ылғи кіші болып отырса, онда (16) қатар жинақсыз болады.*

*Логарифмдік белгі.* Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{ln\frac{1}{a_n}}{ln\,n}=q>1$ болса, онда (16) қатар жинақты; ал егер $q<1$ болса, онда (16) қатар жинақсыз; Егер $q=1$ болса, онда қатардың жинақтылығы немесе жинақсыздығы бұл белгімен шешілмейді.

---

[1] Cauchy, Cours d' Analyse.

Теореманың шарттары бойынша $\frac{ln\frac{1}{a_n}}{ln\, n} > k > 1$.

Бұл арадан

$$ln\frac{1}{a_n} > k\; ln\, n \quad \text{немесе} \quad ln\frac{1}{a_n} > ln\, n^k.$$

Осы кейінгі теңсіздіктен табамыз $\frac{1}{a_n} > n^{к}$ немесе $a_n < \frac{1}{n_{к}}$. Бұл теңсіздіктің орындалуы (16) қатардың жинақтылығын көрсетеді, өйткені $k > 1$.

Егер $\frac{ln\frac{1}{a_n}}{ln\, n} < 1$ болса, онда бұл арадан $ln\frac{1}{a_n} < ln\, n$ немесе $a_n > \frac{1}{n}$. Осы кейінгі теңсіздіктің орындалуы теореманың екінші бөлімін дәлелдейді, атап айтқанда, (16) қатардың жинақсыздығын дәлелдейді.

## § 6. Куммер, Раабе, Бертран және Гаусс белгілері

1. Тағы да мүшелері оң

$$a_1 + a_2 + a_3 + \, . \, . \, . + a_n + \, . \, . \, . \qquad (16)$$

қатарды қарайық.

**1-теорема**. (Куммер теоремасы) (16) қатар жинақты болу үшін мүшелері оң

$$b_1, b_2, \; . \; . \; . \; , b_n, \; . \; . \; .$$

тізбек табылып келесі теңсіздіктің

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} > l > 0 \qquad (27)$$

орындалуы қажетті және жеткілікті.

Алдымен (27) шарттың қажеттілігін дәлелдейік. Ол үшін (16) қатар жинақты деп ұйғарамыз және оның қосындысын *S* арқылы белгілейміз. (16) қатардың дербес қосындысын *Sn* арқылы белгілейік те келесі мүшелері оң

$$b_1 = \frac{S - S_1}{a_1}, \qquad b_2 = \frac{S - S_2}{a_2}, \; . \; . \; . \; , b_n = \frac{S - S_n}{a_n}, \; . \; . \; .$$

тізбекті қарайық. Осы тізбектің мүшелері теореманың шартын қанағаттандыратын болса, онда (27) шарттың қажеттілігі дәлелденді. (27) теңсіздіктің сол жағын құрайық:

$$b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{S - S_1}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{S - S_{n+1}}{a_n} = \frac{S_{n+1} - S_n}{a_{n+1}} = 1 > 0.$$

Енді (27) шарттың жеткіліктігін дәлелдейік. Айталық (27) шарт орындалатын болсын, онда

$$la_{n+1} < b_n a_n - b_{n+1}a_{n+1}$$

$n$-ге 1, 2, 3,…, сонан әрі қарай мәндер беріп табамыз:

$$la_2 < b_1 a_1 - b_2 a_2$$
$$la_3 < b_2 a_2 - b_3 a_3$$
$$la_4 < b_3 a_3 - b_4 a_4$$
$$la_{n+1} < b_n a_n - b_{n+1}a_{n+1}.$$

Осы теңсіздіктерді қоссақ, онда

$$l\,(a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n+1}) < b_1 x_1 .- b_{n+1}a_{n+1},$$

немесе

$$l(a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n+1}) < b_1 a_1$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_{n+1} < \frac{a_1 b_1}{l} + a_1 = k.$$

Сөйтіп, (16) қатардың дербес қосындысы $S_{n+1}$ жоғарғы жағынан шектелген болды, ендеше бұл қатар жинақты болады.

Теорема дәлелденді.

**Куммер белгісі.** Мүшелері оң

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

тізбек берілсін және осы тізбектің мүшелерінің кері шамаларынан құрылған қатар $\sum\limits_{n=l}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{b_n}}$ жинақсыз болатын болсын. Егер (16) қатар үшін $\lim\limits_{n \to \infty} \left(b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}\right)$ бар болса, яғни

$$\lim_{n \to \infty} \left(b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}\right) = R,$$

онда егер $R > 0$ болса, (16) қатар жинақты болады, егер $R > 0$ болса, жинаксыз болады.

Егер $R = 0$ болса, онда қатардың жинақтылығы бұл белгімен шешілмейді.

Бұл белгінің дәлелдеуі Кумер теоремасынан шығады, Сондықтан оған тоқталудың қажеті жоқ.

2. Куммер теоремасындағы тізбектің орнына натурал сандар тізбегін алайық:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

Сонда (27)шарт мына түрге келеді: $n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) > l$ немесе $n\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 > 1 + l$

Бұл арадан келесі белгіге келеміз:

**Раабе белгісі.** Егер

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

бар, яғни

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = L,$$

онда егер $L > 1$ болса, (16) қатар жинақты болады, егер $L > 1$ болса, жинақсыз болады. Егер $L = 1$ болса, онда белгімен қатардың жинақтылығы немесе жинақсыздығы шешілмейді.

Мысал үшін мына қатардың

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} (x > 0)$$

жинақтылығын зерттейік. Алдымен бұл қатарға Даламбер белгісін қолданайық, сонда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = lim \frac{n}{x+n} = 1.$$

Қарастырылып отырған қатар үшін Даламбер белгісі жарамайтын болды.

Енді бұл қатарға Раабе белгісін қолданып көрейік:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = lim\ n\left(\frac{x+n}{n} - 1\right) = x.$$

Бұл арадан мынадай қорытынды жасаймыз: егер $x > 1$ болса, онда (16) қатар жинақты, ал егер $x < 1$, онда (16) қатар жинақсыз. Егер $x = 1$ болса, онда қарастырылып отырған қатар гармониялық қатарға көшеді.

3. Кошидің интегралдық белгісін қолданып төмендегі қатардың

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nlnn}$$

жинақсыздығын дәлелдеуге болады.

Куммер теоремасындағы тізьектің орнына төмендегі тізбекті

$$ln1,\ \ 2ln2,\ \ 3ln3, 7 \dots, nln\, n, \dots$$

алсақ, онда (27) теңсіздіктің сол жағы мына түрге көшкен болар еді:

$$K_n = nlnn\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)ln(n+1) =$$

$$= nlnn\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)ln\, n - (n+1)\, ln = \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} 1\right) - 1\right] ln\, n - ln\, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Егер былай ұйғарсақ $Bn = \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+2}} - 1\right) - 1\right] ln\, n,$ онда

$$Kn = B_n - ln\, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Бұл арадан *Бертран белгісіне* келеміз:

Егер

$$\lim_{n\to\infty} B_n - \lim_{n\to\infty} \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] \ln n$$

бар болса, яғни

$$\lim_{n\to\infty} B_n - \lim_{n\to\infty} \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right]\, ln\, n = B,$$

онда (16)қатар егер $b > 1$ болса, жинақты болады, ал, $b < 1$болса, қатар жинаксыз болады.

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} B_n - \lim_{n\to\infty} ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = B - \ln e = B - 1.$$

Енді Куммер теоремасына сүйеніп(16) қатардың жинақтылығы немесе жинақсыздығы туралы Бертран теоремесын айта аламыз.

**4.** Даламбер, Раабе және Бертран белгілерінен келесі Гаусс белгісін қорытуға болады.

**Гаусс белгісі.** (16) қатардың тетелес $a$ және $a + 1$ екі мүшесінің қатынасы мына түрде

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \tau + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta n}{n^2} \qquad (28)$$

*жазылатын болсын (мұнда* $\tau, \mu -$ *тұрақты сандар, ал* $\Theta -$ *шектелген шама; сонда, егер* $\tau > 1$ *немесе* $\tau = 1, \mu > 1$*болса (16) қатар жинақты болады; ал егер* $\tau > 1$ *немесе* $\tau = 1,\ \mu \leq 1$ *болса онда (16) қатар жинақсыз болады.*

Алдымен $\lambda \lesseqgtr 1$ жағдайды қарайық. Бұл жағдайда (28) теңдіктен табамыз:

$$\begin{matrix} lim \\ n \to \infty \end{matrix} \frac{a_n + 1}{a_n} = \frac{1}{\lambda}$$

яғни қатардың жинақтылығын немесе жинақсыздығын тексеру Даламбер белгісіне келтіретін болды.

Енді $\tau = 1$ жағдайды қарайық. Бұл жағдайда Раабе белгісін қолданамыз:

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \mu + \frac{\theta_n}{n}.$$

Бұл арадан шекке көшсек, онда

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \mu.$$

Сонымен, жағдай $\mu \gtrless 1$Раабе белгісіне келтірілетін болды.

Егер, $\mu = 1$болса,онда Бертран белгісін қолданамыз. Сонда

$$Bn = \frac{ln\, n}{n}\theta n.$$

Бұл арадан шекке көшсек, онда

$$\lim_{n\to\infty} B_n = 0.$$

Ендеше Бертран белгісі бойынша(16)қатар жинақсыз.

Мысал үшін *гипергеометриялық қатар* деп аталынатын төмендегі қатарды қарайық:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)}x^n =$$

$$= 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$

Әзірше $\alpha,\beta,\gamma,x$-ті оң деп қараймыз.

Даламбер белгісі бойынша

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n + 1}{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}x = x.$$

Бұл арадан мынадай қортындыға келеміз: егер $x < 1$ болса, онда гипергеометриялық қатар жинақты, ал $x > 1$ егер болса, онда гипергеометриялық қатар жинаксыз болады. Егер $x = 1$ болса, онда әрине, қарастырылып отырған қатардың жинақтылығы немесе жинақсыздығы Даламбер белгісімен шешілмейді. Бұл жолы Гаусс белгісін қолданамыз, ол үшін мына $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ қатынасты табамыз:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}.$$

Екінші жағынан

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2}{1+\frac{\alpha}{n}} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha^2}{1+\frac{\alpha}{n}} \cdot \frac{1}{n^2};$$

$$\frac{1}{1+\frac{\beta}{n}} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\left(\frac{\beta}{n}\right)^2}{1+\frac{\beta}{n}} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\beta^2}{1+\frac{\beta}{n}} \cdot \frac{1}{n^2};$$

Бұдан кейін

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n} + \frac{\theta}{n^2}$$

мұнда $\Theta$ – шектелген шама.

Гаусс белгілі бойынша қатар $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ егер $\gamma-\alpha-\beta+1 > 1$ болса, немесе $\gamma-\alpha-\beta > 0$ болса, жинақты болады. Осы белгілі бойынша қатар $F(\alpha,\beta,\gamma,1$ егер $\gamma-\alpha-\beta+1 < 1$ болса, немесе $\gamma-\alpha-\beta < 0$ болса, жинақсыз болады. Бұл қатарға кейін тағы да айналып соғамыз.

## §7. Абсолют және шартты жинақты қатарлар

**1.** Біз осы уақытқа дейін мүшелері оң қатарларды қарап келдік.

Егер берілген қатардың барлық мүшелерінің таңбалары теріс болса, онда олардың барлығын – 1-ге көбейтіп, мүшелері оң қатарға келеміз. Егер берілген қатар мүшелерінің тек біразының ғана (саны шектеулі мүшелерінің ғана) таңбалары ылғи теріс болып қалғандарының таңбалары оң болса, онда сол теріс таңбалы мүшелерді шығарып тастап тағы да мүшелері оң қатарға келеміз. Сол сияқты, егер берілген қатар мүшелерінің тек біразының ғана (саны шектеулі мүшелерінің ғана) таңбалары оң болып қалғандарының таңбалары теріс болса, онда сол оң таңбалы мүшелерді шығарып тастап, барлық мүшелері теріс қатарға келеміз, ал бұл қатардың барлық мүшелерін – 1-ге көбейтіп, оны оң қатарға айналдырамыз.

Енді мүшелерінің таңбалары оң да, теріс те болып келетін төмендегі:

$$a_1 + a_2 + a_3 \cdots + a_n + \cdots \qquad (29)$$

қатарды қарайық.

(29) қатардың оң таңбалы және теріс таңбалы мүшелерінің саны шексіз деп ұйғарамыз.

Егер (29) қатар мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған мына қатар

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots \qquad (30)$$

жинақты болса, онда осы (29) қатарды абсолют жинақты қатар деп атайды. Егер (29) қатар жинақты болып, ал оның мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған (30) қатар жинақсыз болса, онда (29) қатарды шартты (дудамал) жинақты немесе жартылай жинақты қатар деп атайды.

**Теорема.** *Егер (29) қатар мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған (30) қатар жинақты болса, онда (29) қатар да жинақты болады.*

Бұл теореманы дәлелдеу үшін (29) қатардың жалпы мүшесін мына түрде жазайық:

$$a_n = \frac{|a_n| + a_n}{2} - \frac{|a_n| - a_n}{2},$$

сонан кейін былай ұйғарайық:

$$\frac{|a_n| + a_n}{2} = b_n. \frac{|a_n| - a_n}{2} = C_n \qquad (31)$$

Сонда

$$a_n = b_n - C_n$$

$b_n$ және $\mathrm{C}_n$ – оң сандар, сондықтан олардан құрылған мына қатарлар

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ және} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{C}_n \qquad (32)$$

мүшелері оң қатарлар болып табылады.

Теореманың шарттары бойынша (30) қатар жинақты, ал (31) теңдіктерден мына теңсіздіктер $b_n \leq |a_n|, C_n \leq |a_n|$ келіп шығады, ендеше (32) қатарлар жинақты.

(29) қатар, жинақты (32) қатарлардың айырмасы, яғни

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} C_n,$$

олай болса (29) қатар жинақты. Теорема дәлелденді.

Мүшелері оң қатарлар үшін жоғарыда келтірілген жеткілікті белгілер (Даламбер, Коши, Куммер т.б. белгілері), (29) қатардың абсолют жинақтылығы үшін де жеткілікті белгілер болып табылады.

**2.** Қатардың абсолют жинақтылығынан басқа шартты жинақтығын тағайындайтын да белгі бар.

Таңбалары кезекпен ауысып отыратын қатарларды, атап айтқанда төмендегі қатарды қарайық:

$$a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}\, a_n + \cdots \qquad (33)$$

мұнда $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ оң сандар.

Осы, таңбалары кезекпен ауысып келетін, қатардың жинақтылығы турасындағы Лейбниц теоремасын дәлелдейік.

**Теорема.** *Егер таңбалары кезекпен ауысып отыратын (33) қатардың мүшелері келесі теңсіздіктерді қанағаттандыратын болса*

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$$
$$\text{және } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ болса,}$$

*онда мұндай қатар жинақты болады.*

(33) қатардың бірінші $2n$ мүшелерінің қосындысын $S_{2n}$ деп белгілейік. Сонда

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}). \qquad (34)$$

Теореманың шарттары бойынша сандар $a_n$ біркелкі кемиді, олай болса жақшалардың ішіндегі айырмалардың таңбалары оң. Сондықтан

$$S_{2n} \geq 0.$$

(34) теңдікті былай жазуға да болады:

$$S_{2n} = S_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geq S_{2n-2}$$

Осы кейінгі теңсіздіктен мынадай қортындыға келеміз: $S_{2n}$ сандардан тұратын тізбек біркелкі үдемелі. (34) теңдікті тағы да мына түрде жазуға болады:

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

Бұл арадан мынадай теңсіздікке келеміз:

$$S_{2n} \leq a_1$$

Сонымен, $S_{2n}$ сандардан тұратын тізбек біркелкі үдемелі және оң жағынан шектелген болатын болады. Демек, тізбек жинақты, яғни

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

Қосылғыш сандары тақ $S_{2n+1}$ дербес қосындыны қарайық:

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}.$$

Бұл арадан шекке көшіп табамыз:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S,$$

өйткені, теореманың шарттары бойынша

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$$

Сөйтіп, қорытып келгенде (33) қатардың дербес қосындысы $S, n$ шексіздікке ұмтылғанда бір тиянақты шекке ұмтылатын болды. Ендеше бұл қатар жинақты. Теорема дәлелденді.

$S_{n+}$ дербес қосындыны былай жазуға да болады:

$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - (a_6 - a_7) - \cdots -$$
$$-(a_{2n-2} - a_{2n-1}) - (a_{2n} - a_{2n+1})$$
$$S_{2n-1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}).$$

Осы екі теңдіктің оң жақтарын салыстырып, төмендегі теңсіздікке келеміз

$$S_{2n-1} \geq S_{2n+1},$$

былайша айтқанда $S_{2n-1}$ сандардан тұратын тізбек біркелкі кемімe. Сондықтан, $n$ қандай болса да мына теңсіздік

$$S_{2n} < S < S_{2n-1}$$

немесе

$$O < S < a_1 \tag{35}$$

орыналады.

Егер (33) қатардың қалдық мүшесін $r_n$ арқылы белгілесек, онда

$$S = S_n + (-1)^n\, r_n,$$

мұнда

$$r_n = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots \qquad (36)$$

Егер (33) қатардың қосындысы үшін оның $n$ бірінші мүшелерінің қосындысын, яғни $S_n$ дербес қосындыны алсақ, онда біз сөзсіз қате жібереміз, міне $r_n$ сол қатенің шамасын көрсетеді.

(36) қатардың өзін екі қатар түрінде жазуға болады:

$$r_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} - a_{2n+4} + \cdots$$
$$r_{2n-1} = a_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+4} + \cdots$$

(35) теңсіздік бойынша

$$0 < r_{2n} < a_{2n+1}, |r_{2n-1}| < a_{2n}.$$

Кейінгі теңсіздіктер таңбалары кезекпен ауысып келетін қатардың қосындысы үшін оның бірінші $n$ мүшелерінің қосындысын алғандағы жіберілетін қатенің қандай шекаралықта жататынын көрсетеді.

Мысал үшін төмендегі қатарды қарайық:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots (-1)\frac{n_1}{n} + \cdots$$

Жоғарыда келтірілген Лейбниц теоремасы бойынша бұл қатар жинақты, өйткені:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots > \frac{1}{n} > \cdots$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Егер бұл қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан қатар құратын болсақ, онда гармониялық қатар шығады

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Гармониялық қатардың жинақсыздығы бізге бұрыннан белгілі.

Сөйтіп, мысал үшін алынып отырған қатар шартты жинақты болатын болды.

Екінші мысал үшін қайтадан гипергеометриялық қатарды қарайық:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 +$$

$$+\sum_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \cdot x^n.$$

Бұл қатардағы $\alpha,\beta,\gamma,x$ сандарды кез келген сандар деп ұйғарамыз (мұнда $\alpha,\beta,\gamma$ – ноль мен бүтін теріс сандардан айрықша).

Даламбер белгісін қолданып мынадай қорытындыға келеміз: егер $|x| < 1$ болса, онда гипергеометриялық қатар абсолют жинақты, ал егер $|x| > 1$ болса, онда ол жинақсыз болады.

Егер $x = 1$ болса, онда мына қатынас

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}$$

аса үлкен $n$-дер үшін оң болғандықтан, қаралып отырған қатардың барлық мүшелері бір номерден бастап бір таңбаға ие болады. Сондықтан бұл қатар үшін өткен параграфтағы талқылау дұрыс болады, яғни егер $\gamma-\alpha-\beta > 0$ болса, онда гипергеометриялық қатар абсолют жинақты болады, ал егер $\gamma-\alpha-\beta \leq 0$ болса, онда ол жинақсыз болады.

Енді $x = -1$ болсын. Егер $\gamma-\alpha-\beta > 0$ болса, онда мына $F(\alpha,\beta,\gamma,-1)$ гипергеометриялық қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған қатар жинақты болады. Ендеше бұл жолы гипергеометриялық қатар абсолют жинақты болады.

Енді $\gamma-\alpha-\beta \leq 0$ болсын, онда тетелес $a_n, a_{n+1}$ мүшелерінің қатынасының абсолют шамасын былай жазайық:

$$\frac{|a_n|}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \tag{37}$$

Мұнда $|\theta_n| \leq L$.

Егер $0 \geq \gamma-\alpha-\beta > -1$ болса, онда (37) теңдікті мына түрде жазамыз:

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1 + \frac{1}{n}\left(\gamma-\alpha-\beta+1+\frac{\theta_n}{n^2}\right).$$

Егер $\tau < \gamma - \alpha - \beta + 1$ болса, онда кейінгі теңдіктің оң жағындағы жақшалардың ішіндегі өрнек $\tau$-дан артық болады. Олай болса бір номерден бастап, мәселен $m$-нен артық $n$-дер үшін мына теңсіздік

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} > 1 + \frac{1}{n} \text{ және} |a_n| > |a_{n+1}|$$

орындалады.

(38) теңсіздікті логарифмдеп және $n$-ге, $m, m+1, m+1, m+2, \ldots$ мәндерді беріп табамыз:

$$ln|a_{m+1}| < ln|a_m| - ln\left(1 + \frac{\tau}{m}\right),$$

$$ln|a_{m+2}| < ln|a_{m+1}| - ln\left(1 + \frac{\tau}{m+1}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$ln|a_n| < ln|a_{n-1}| - ln\left(1 + \frac{\tau}{n-1}\right).$$

Осы теңсіздіктерді қоссақ, онда $m$-нен артық барлық $n$-дер үшін $(n > m)$ болады:

$$ln|a_n| < ln|a_m| - \sum_{k=m}^{n-1} ln\left(1 + \frac{\tau}{k}\right).$$

Қатар

$$\sum_{\mathrm{k=m}}^{\infty} \ln\,(1 + \frac{\tau}{\mathrm{k}})$$

жинақсыз, олай болса

$$\lim_{n\to\infty} \ln|a_n| = -\infty,$$

Ендеше

$$\lim_{n\to\infty} \ln|a_n| = 0.$$

Біздің қарастырып отырған жағдайымызда $(-1 < \gamma - \alpha - \beta \leq 0)$ гипергеометриялық қатардың мүшелері өздерінің таңбаларын кезекпен + не – ке ауыстырып отырады. $a_n|>||a_{n+1}|$ болатын болды және

$$\lim_{n\to\infty} |an| = 0.$$

Сондықтан Лейбниц теоремасы бойынша, мына $0 \geq \gamma - \alpha - \beta > -1, x = -1$ жағдайлар орындалғанда гипергеометриялық қатар жинақты, бірақ абсолют емес.

Егер $\gamma - \alpha - \beta < -1,$ болса, онда бір орыннан бастап мына $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ қатынастың бірден кіші болатынын (37) теңдіктен байқаймыз. Демек, бұл арадан $|a_n| < |a_{n+1}|$. Кейінгі теңсіздіктің орындалуынан, мынадай қорытындыға келеміз: қарастырылып отырған қатардың жалпы мүшесі нольге ұмтылмайды, ендеше ол қатар жинақсыз.

Енді мына жағдайды $\gamma - \alpha - \beta = 1$ қарайық. Бұл жағдайда $m$-нен артық $n$-дер үшін, төмендегі теңдік

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1 + \frac{\theta}{n_2} < 1 + \frac{L}{n_2}$$

орындалады.

Бұл теңсіздікті логарифмдеп және $n$-ге $m, m+1, m+2, \dots$ мәндерді беріп келесі теңсіздіктерге келеміз:

$$ln|a_{m+1}| > ln|a_m| - ln\left(1 + \frac{L}{m_2}\right),$$

$$ln|a_{m+2}| > ln|a_{m+1}| - ln\left[1 + \frac{L}{(m+1)^2}\right],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$ln|a_n| > ln|a_{n-1}| - ln\left[1 + \frac{L}{(n-1)^2}\right].$$

Осы теңсіздіктерді қоссақ, онда

$$ln|a_n| > ln|a_m| - \sum_{k=m}^{n-1} ln\left(1 + \frac{L}{k^2}\right).$$

Кейінгі теңсіздіктің оң жағында тұрған қосынды мына

$$\sum_{k=m}^{\infty} lm(1 + \frac{L}{k^2})$$

қатардың дербес қосындысы. Ал бұл қатар жинақты (§4 қараңыздар). Олай болса $ln|a_n| < ln|a_m| - A_n$ шексіздікке ұмтылғанда $ln|a_n|$ минус шексіздікке ұмтылмайды. Демек, $|a_n|$ нольге ұмтылмайды, ендеше гипергеометриялық қатар жинақсыз.

Сөйтіп, қорытып келгенде гипергеометриялық қатар жөнінде мыналарды айтуға болады: егер болса, онда гипергеометриялық қатар абсолют жинақты; егер $|x| >$ болса, онда ол жинақсыз; $x = 1$ болғанда, егер $\gamma - \alpha - \beta > 0$ болса, қатар абсолют жинақты болады; егер $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$ болса жинақсыз болады; $x = -1$ болғанда, егер $\gamma - \alpha - \beta > 0$ болса, онда гипергеометриялық қатар абсолют жинақты, егер $0 \geq \gamma - \alpha - \beta > -1$ болса, онда ол шартты жинақты, егер $\gamma - \alpha - \beta \leq -1$ болса, онда ол жинақсыз болады.

Осы гипергеометриялық қатарға ерекше тоқтау себебіміз оның тәжірибелік, әсіресе физикалық мәселелерге жиі қолданылатындығынан.

**3.** Жоғарыда келтірілген белгілердің көмегімен берілген қатардың жинақтылығы немесе жинақсыздығы шешілмеген жағдайда Абельдің келесі теоремасын қолдануға тура келеді. Бұл теореманы келтірместен бұрын мына леммаға тоқтап кетейік.

**Лемма.** *Айталық* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_p$ *оң кеміме шамалар, ал –* $a_0, a_1, a_2, \cdots a_p$ *– кез келген оң немесе теріс шамалар болсын. Егер мына төмендегі қосындылардың*

$$S_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1, \cdots s_p = a_0 + a_1 + \cdots a_p$$

*барлығы А мен В сандарының арасында жатса, онда мына қосынды*

$$S = \varepsilon_0, a_0 + \varepsilon_0 + a_1 + \cdots + \varepsilon_p a_p.$$

$A\varepsilon_0$ және $\beta\varepsilon_0$ *сандарының арасында жатады.*

Лемманың шарттарының табамыз:

$$a_0 = S_0, \alpha_1 = S_1 - S_0 \cdots, a_p = S_p - S_{p-1}.$$

Ендеше

$$S = \varepsilon_0 S_0 \ + \ \varepsilon_1 \left(S_1 - S_0\right) + \cdots + \varepsilon_p\left(S_p - S_{p-1}\right) \qquad (39)$$

немесе

$$S = S_0 \left(\varepsilon_0 - \ \varepsilon_1\right) + S_1 \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) + \cdots + S_{p-1}\left(\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p\right) + S_{p\varepsilon_p}.$$

Кейінгі теңдіктің оң жағындағы жақшалардың ішіндегі айырмалар оң сандар, сондықтан $S$ үшін екі шек табамыз: алдымен $S_0, S_1 \cdots, S_p$ сандардың орнына $A$ санын қоямыз, сонда

$$A = \left(\varepsilon_0 - \ \varepsilon_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p + \varepsilon_p\right) = A_{\varepsilon_0} < S$$

одан кейін $S_0, S_1 \cdots, S_p$ сандардың орнына $B$ санын қоямыз, сонда

$$S < B\left(\varepsilon_0 - \ \varepsilon_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p + \varepsilon_p\right) = B_{\varepsilon_0}.$$

Сонымен, $A\varepsilon_0 < S < B\varepsilon_0$.

Енді теоремаға келейік.

**Абель теоремасы.** Төмендегі қатар

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

*жинақты немесе жинақсыздығы мәлімсіз болсын, басқаша айтқанда оның бірінші n мүшелерінің қосындысы* $S_n$ *бір белгілі тиянақты L санынан аспайтын болсын. Екінші жағынан*

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \cdots, \varepsilon_p \cdots$$

*мүшелері оң біркелкі кеміме тізбек болсын және*

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

*Міне осы шарттар орындалса, онда қатар*

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n + \cdots \tag{40}$$

*жинақты болады.*

(40) қатардың дербес қосындысын $S_{n+p}$ арқылы белгілесек, онда теореманың шарттары бойынша

$$|S_{n+p}| < L,$$

бұл арадан

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < 2L.$$

Егер лемманы еске алсақ, онда

$$|a_{n+1} + \varepsilon_{n+1} + a_{n+2}\varepsilon_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\varepsilon_{n+p}| < 2L\varepsilon_{n+1}. \tag{41}$$

Теореманың шарттары бойынша

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Сондықтан алдынала берілген оң мейлінше аз $\delta$ санына сәйкес $N$ саны табылып, осы $N$ санынан артық барлық $n$-дер үшін $(n \geq N)$ төмендегі теңсіздік

$$|\varepsilon_{n+1}| < \frac{\delta}{2L}$$

орындалады. Бұдан кейін (41) теңсіздік $\rho$ – қандай болса да мына түрге көшеді

$$|a_{n+1}\, \varepsilon_{n+1} + a_{n+2}\varepsilon_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\, \varepsilon_{n+p}| < \delta.$$

(40) қатар үшін Коши критерийі орындалды. Олай болса бұл қатар жинақты.

Мысал үшін мына

$$sin\, x + sin\, 2\, x + \cdots sin\, nx + \cdots$$

қатарды қарайық. Бұл қатар жинақтылығы немесе жинақсыздығы мәлімсіз. Оның дербес қосындысын $S_n$ арқылы белгілейік:

$$s_n = \sin x + \sin 2\, x + \cdots \sin n\, x = \frac{1}{2sin\frac{x}{2}} \Big(2sin\frac{x}{2} \cdot sin\, x +$$

$$+2\, sin\frac{x}{2} sin\, 2x + \cdots + 2 \sin\frac{x}{2} \sin n\, x) = \frac{1}{2sin\frac{x}{2}} \Big[\Big(cos\frac{x}{2} -$$

$$-cos\frac{3}{2}x\Big) + \Big(cos\frac{3}{2}x - cos\frac{5}{2}x\Big) + \cdots + \Big(cos\,\Big(n - \frac{1}{2}\Big)x -$$

$$-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\Big] = \frac{cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2sin\frac{x}{2}},$$

бұл арадан

$$|S_n| \le \frac{1}{2sin\frac{x}{2}}.$$

Дәлелденген теорема бойынша $x$ қандай болса да мына қатар

$$\varepsilon_1 sin\, x + \varepsilon_2 sin\, 2\, x + \cdots + \varepsilon_n sin\, n\, x + \cdots$$

жинақты болады.

Сол сияқты мына қатар да

$$\varepsilon_1 cos\, x + \varepsilon_2 cos\, 2x + \cdots + \varepsilon_n cos\, nx + \cdots$$

$x$-тің жалғыз мына $2k\pi$ мәндерінен басқа қалған барлық мәндерінде жинақты болады.

Салдар. *Төмендегі қатар*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

*жинақты болсын және мұнымен бірге*

$$\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n \cdots \tag{42}$$

*мүшелері оң үдемелі немесе кеміме тиянақты, нольден айрықша тұрақты $l$ санына ұмтылатын тізбек болсын. Міне осы айтылған шарттар орындалса, онда қатар*

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n + \cdots \tag{43}$$

*жинақты болады.*

(42) тізбек үдемелі болсын.

Оң сандардан тұратын біркелкі төмендегі тізбекті

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n \cdots$$

қарайық және былай ұйғарайық:

$$\alpha_1 = l - \varepsilon_1, \alpha_2 = l - \varepsilon_2, \cdots, \alpha_n = l - \varepsilon_n, \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Мына екі қатар

$$la_1 = la_2 + \cdots + la_n + \cdots$$

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n + \cdots$$

жинақты. Сондықтан, (43) қатар жинақты болады.

## §8. Абсолют және шартты жинақты қатарлардың қасиеттері

1. Оң және теріс мүшелерден тұратын төмендегі

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (29)$$

қатарды қарайық.

Бұл қатардың оң мүшелерінен және теріс мүшелерінен жеке қатарлар құрайық. Мәселен,

$$\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n + \cdots \qquad (44)$$

(29) қатардың кілең оң мүшелерінен, ал

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n + \cdots \qquad (45)$$

оның кілең теріс мүшелерінің абсолют шамаларынан тұратын қатарлар болсын.

**1-теорема.** *Егер (29) қатар абсолют жинақты болса, онда (44) және (45) қатарларда жинақты болады; егер (29) қатардың қосындысы $S$ (44) қатардың қосындысы $P$ (45) қатардың қосындысы $Q$ болса, онда $S = P - Q$.*

*Егер (29) қатар шартты жинақты болса, онда (44) және (45) қатарлар екеуі бірдей жинақсыз болады.*

(29) қатардың дербес қосындысын $S_n$ арқылы белгілейік. Сонда бұл қосындының қосылғыштарының біразы оң болады, олардың саны $m$ болсын, біразы теріс болады, олардың саны к болсын (яғни $n = m + k$). $Pm$ арқылы (44) қатардың бірінші $m$ мүшелерінің қосындысын, $Q$к арқылы (45) қатардың бірінші $k$ мүшелерінің қосындысын белгілейік. Сонда

$$S_n = P_m - Q_k.$$

Енді (29) қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған қатарды қарайық:

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \qquad (47)$$

Егер (47) қатардың бірінші $n$ мүшелерінің қосындысын $\sigma_n$ арқылы белгілесек, онда

$$\sigma_n = P_m - Q_k. \qquad (48)$$

(29) қатар абсолют жинақты болғандықтан

$$\lim_{n\to\infty} \sigma n = \sigma$$

Бұл арадан

$$Pn < \sigma(m = 1,2,\cdots), \qquad Q_k < \sigma(k = 1,2,\cdots).$$

Сонымен, мүшелері оң (44) және (45) қатарлардың дербес қосындылары жоғарғы жағынан шектелген болды, олай болса бұл қатарлар жинақты. Теореманың бірінші бөлімі дәлелденді.

Егер $n$-ді шексіздікке ұмтылуға мәжбүр етсек, онда $m \to \infty$ және $k \to \infty$. Енді (46) теңдіктің екі жағынан шек алсақ сонда

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{S_n} = \lim_{m\to\infty} Pm - \lim_{k\to\infty} Q_k$$

немесе

$$S = P - Q.$$

Сонымен, теореманың екінші бөлімі дәлелденді.

Егер (29) қатар шартты жинақты болса, (47) қатар жинақсыз болады. Сондықтан

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty.$$

(46) және (48) теңдіктерден табамыз:

$$P_m = \frac{\sigma_n + s_n}{2}, \qquad Q_k = \frac{\sigma_n + s_n}{2}$$

Бұл арадан шекке көшсек, онда

$$\lim_{m\to\infty} P_{\mathrm{m}} = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Q_k} = +\infty.$$

Демек, (44) және (45) қатарлар жинақсыз. Теореманың үшінші бөлімі дәлелденді.

Бұл теоремадан мынадай қортындыға келеміз.

**2.** Мүшелері оң қатарлардың мынадай бір қасиетіне тоқтап кетейік.

**2-теорема.** *Мүшелері оң жинақты қатардың қосындысы оның мүшелеренің ретіне тәуелді емес, басқа сөзбен айтқанда мүшелері оң екі жинақты қатардың бір-бірінен айырмасы тек мүшелерінің орналасу тәртібінде ғана болса, онда мұндай қатарлардың қосындылары өзара тең болады.*

Мүшелері оң төмендегі

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (49)$$

қатарды қарайық. Егер бұл қатардың өзара бірдей нольден айрықша мүшелерінің саны шексіз болса, онда ол жинақсыз болады, өйткені $n$ шексіздікке ұмтылғанда, оның жалпы мүшесі нольге ұмтылмайды. Сондықтан, егер қатар жинақты болатын болса, онда оның өзара бірдей мүшелерінің саны шектеулі болуы керек.

(49) қатардың мүшелерін басқа тәртіппен орналастырып келесі қатарды құрайық:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \tag{50}$$

(49) қатармен (50) қатардың бір-бірінен айырмасы тек мүшелерінің орналасу тәртібінде ғана, яғни (49) қатардың мүшесі болып табылатын әрбір сан (50) қатардың да мүшесі болып табылады.

Егер (50) қатар жинақты болса, онда (49) қатар да жинақты болатынын және осы екі қатардың қосындылары бір ғана сан екенін дәлелдеу керек.

$S_n$ арқылы (49) қатардың дербес қосындысын белгілейік. Бұл қосындыны құратын әрбір қосылғыш (50) қатардың мүшесі болып табылады. (50) қатардың дербес $\sigma_m$ қосындысын құратын қосылғыштардың ішінде $S_n$ дербес қосындыны құратын барлық қосылғыштар болатындай $m$-ді соншама үлкен етіп сайлап алайық. Сонда

$$S_n < \sigma_m.$$

Теорема шарттары бойынша (50) қатар жинақты, $\sigma$ оның қосындысы болсын. (50) қатардың мүшелерінің барлығы оң болғандықтан, $m$ қандай болса да $\sigma_m < \sigma$ ендеше

$$S_n < \sigma,$$

(49) қатардың дербес қосындысы шектелген, олай болса ол қатар жинақты және оның қосындысы $S$ мына $\sigma$-дан кем не оған тең, яғни $S \leq \sigma$.

Осылай қорытуды керісінше жүргізсек, онда мынадай $\sigma \geq S$ теңсіздікке келген болар едік. Міне осы екі теңсіздіктен келіп шығады:

$$S = \sigma.$$

**3-теорема.** *Егер қатар абсолют жинақты болса, онда бұл қатардың қосындысы оның мүшелерінің орналасу ретіне тәуелді* *болмайды, басқа сөзбен айтқанда екі абсолют жинақты қатардың бір-бірінен айырмасы тек мүшелерінің орналасу ретінде ғана болса, онда бұл екі қатардың қосындысы бір-біріне тең болады.*

1-теорема бойынша абсолют жинақты қатарды мүшелері оң екі қатардың айырмасы деп қарауға болады. Егер бастапқы берілген қатардағы мүшелердің орнын бір-бірімен алмастырсақ, онда жаңағы айтылып отырған екі қатардағы мүшелердің орындары алмастыралады. Бұл екі қатардың мүшелерінің орындары алмасу, 2-теорема бойынша олардың қосындыларына әсер етпейді. Ендеше бұл жағдай бастапқы берілген қатардың қосындысына да әсер етпейді.

**3.** Егер қатар шартты жинақты болса, онда оның мүшелерінің орындарын алмастыруға болмайды, өйткені одан оның қосындысы тіпті басқаша боп кетеді және бұдан қатардың жинақтылықтан жинақсыздыққа айналуы мүмкін.

Бір мысал келтірейік:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}+\cdots$$

Бұл қатардың жинақтылығын біз бұрын дәлелдеген болатынбыз. Егер қаралып отырған қатардың қосындысын $S$ арқылы белгілесек, онда

$$\mathrm{S}=\lim_{\mathrm{m}\to\infty}\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{m}}\left(\frac{1}{2\mathrm{n}+1}\right)-\left(\frac{1}{2\mathrm{n}+2}\right).$$

Енді зерттеліп отырған қатардың мүшелерінің орындарын алмастырайық:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}+\cdots \qquad (51)$$

(51) қатардың жинақтылығын және оның қосындысының басқаша болатынын дәлелдейік. Ол үшін бұл қатардың бірінші $3n$ мүшелерінің қосындысын табу керек. Ол болады:

$$S_{3n}=\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{n}=\mathrm{m}}\left(\frac{1}{2\mathrm{n}+1}-\frac{1}{4\mathrm{n}+2}-\frac{1}{4\mathrm{n}+4}\right)=$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{m}}\left(\frac{1}{2\mathrm{n}+1} - \frac{1}{2\mathrm{n}+2}\right).$$

Бұл арадан

$S_{3n} = \frac{1}{2}S_{2n}$, мұнда $S_{2n}$ – бастапқы берілген қатардың дербес қосындысы. Кейінгі теңдіктен шекке көшсек, сонда

$$\lim_{n\to\infty} S_{3\mathrm{n}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} S_{2\mathrm{n}} = \frac{1}{2}S.$$

Сонымен, (51) қатардың қосындысы бастапқы берілген қатардың қосындысының жартысына тең болды.

Шартты жинақты қатарлар үшін келесі теореманы дәлелдеуге болады.

**Риман теоремасы.** *Әрбір шартты жинақты қатардың мүшелерінің орындарын алмастырып, оның қосындысын алдын-ала еркінше берілген санға тең етуге болады.*

Айталық қатар

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} a_n \tag{52}$$

шартты жинақты болсын, осы қатардың қосындысы алдын-ала еркінше берілген $A$ санына тең болатындай етіп оның мүшелерінің орындарын алмастыру талап етіледі. $S_p$ арқылы бұл қатардың бірінші $p$ оң мүшелерінің қосындысын, ал $S_q$ арқылы оның бірінші $q$ мүшелерінің абсолют шамаларының қосындысын белгілесек, онда қатардың бірінші $p+q$ мүшелерінің қосындысы болады $S_p - S_q$. Егер $p$ мен $q$ шексіз өссе, онда қосындылар $S_p$ мен $S_q$ олар да шексіз өсуі керек, өйтпесе қаралып отырған (52) қатар не абсолют жинақты болады (егер $S_p$ мен $S_q$ шектелген болса), не болмаса жинақсыз болады (егер $S_p$ мен $S_q$-дің біреуі шектелген екіншісі шектелмеген болса).

Қатар жинақты болғандықтан $n$ шексіздікке ұмтылғанда оның жалпы мүшесі $a_n$ нольге ұмтылады.

Міне осы айтылған ескертпелерді пайдаланып (52) қатардың мүшелерінің орындарын келесі түрде ауыстырамыз. (52) қатардың тек оң мүшелерінен тұратын төмендегі

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n + \cdots \tag{53}$$

қатарды және оның теріс мүшелерінің абсолют шамаларынан тұратын келесі

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n + \cdots \tag{54}$$

қатарды қарайық.

(53) қатардың берілген $A$ санынан артық болатындай дербес қосындысын алайық:

$p_1 + p_2 + \cdots + p_k > A$ және мұнда былай: $P_1 + P_2 + \cdots + P_{k+1} \leq A$.

Енді мына қатардан

$$-q_1 - q_2 - \cdots - q_n - \cdots \tag{55}$$

келесі теңсіздік

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k - q_1 - q_2 - \cdots - q_m \leq A$$

және мұндай былай

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m-1} \geq A$$

Орындалатындай етіп $m$ мүшелерді: $q_1 - q_2 \cdots, -q_m$-ді алайық.

Енді (53) қатардан мына теңсіздік

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k - q_1 - q_2 - \cdots - q_{m-1} + P_{k+1} +$$

$$P_{k+2} + \cdots + P_{k+1} > A$$

орындалатындай етіп тағы да $l$ мүшелерді $p_{k+1}, p_{k+2} \cdots \cdots, p_{k+1}$ алайық және мұнда былай:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k - q_1 - q_2 - \cdots - q_m + p_{k+1} + p_{k+2} +$$

$$+ \cdots + p_{k+1-1} \leq A.$$

Бұдан кейін (55) қатардан төмендегі теңсіздік

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k - q_1 - q_2 - \cdots - q_m + p_{k+1} + p_{k+2} +$$

$$+ \cdots + p_{k+1} - q_{m+1} - q_{m+2} - \cdots - q_{m+2} < A$$

орындалатындай етіп тағы да $r$ мүшелерді: $-q_{m+1} - q_{m+2}, \cdots,$ $-q_{m+1}$ сайлап алайық және мұнда былай:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k - q_1 - q_2 - \cdots - q_m + p_{k+1} + p_{k+2} +$$

$$+ \cdots + p_{k+1} - q_{m+1} - q_{m+2} - \cdots - q_{m+r-1} \geq A.$$

Міне осы процесті шексіз соза берсек, онда жаңадан пайда болған қатардың дербес қосындылары *А* санынан не үлкен не кіші болып отыратын болады, бірақ бұл қосындылардың А санынан айырмасы шексіз кеміме шамадан кіші болады. Олай болса бұл қосындылардың шегі А саны болады.

**4.** Мүшелері оң қатарлардың жинақтылығының тездігі туралы бір-екі ауыз сөз айтып кетуге тура келеді. Қатарлар жинақты болғанымен олардың кейбіреулері тез жинақты, ал кейбіреулері баяу жинақты болады. Баяу, тез жинақты қатарлар деп қандай қатарларды айтады, соларға тоқтайық.

Қатардың қосындысы $S$-ті табу үшін оның көп мүшелерін қосындылауға тура келсе, онда мұндай қатарды баяу жинақты қатар деп айтады. Мұндай қатардың тәжірибе жүзінде пайдасы тіпті шамалы. Жөнекей бір ескертіп кететін мәселе мынау: тәжірибеде кездесетін кейбір шамаларды есептегенде белгілі бір шарттар орындалғанда жинақсыз қатар өте қолайлы құрал болып табылады.

Әрбір жинақты қатардың қалдық мүшесі $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ шексіздікке ұмтылғанда нольге ұмтылатыны туралы бірінші параграфта айтылды. Былайша айтқанда қалдық мүше $R_n$ шексіз аз шаманың ретінде тәуелді, яғни $n$ шексіздікке ұмтылғанда ол нольге қаншама тезірек ұмтылады, міне соған байланысты.

Егер $n$ шексіздікке ұмтылғанда қалдық $R_n$ кеміме геометриялық прогрессияның мүшесіндей болып кемісе, ондай қатарды тез жинақты дейді. Қалдық осындай болып кему үшін, қатардың әрбір $a_n$ мүшесі $n$-нің аса үлкен мәндері үшін шексіз кеміме геометриялық прогрессияның сәйкес мүшесінен кем болуы керек, яғни $a_n < aq^n (n \geq N)$ мұнда $a > 0{,}0 < q < 1$.
Онда

$$R_n < a(q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots) = \frac{a\,q^{n+1}}{1-q}.$$

## §9. Абсолют жинақты қатарларға арифметикалық амалдар жүргізу

1. Келесі екі қатарды қарайық:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (56)$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \qquad (57)$$

**1-теорема.** *Егер (56) және (57) қатарлар абсолют жинақты болса, онда олардың қосындылары және айырмалары абсолют жинақты болады.*

Бұл теореманың дұрыстығын келесі теңіздіктерден

$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_2| \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

және мына

$$|u_1| + |v_1| + |u_2| + |v_2| + \cdots + \ |u_n| + |v_n| + \cdots$$

қатардың жинақтығына байқауға болады.

Енді қатарларды бір-біріне көбейту амалына келейік.

(56) қатардың әрбір мүшесі (57) қатардың әрбір мүшесіне көбейтеміз. Сонда

$$\omega = u_1 v_1, \omega_2 = u_1 v_2 + u_2 v_1, \omega_2 = u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1, \cdots$$

$$\cdots, \omega_n = u_1 v_n, + u_2 v_{n-1} + u_3 v_{n-2} + \cdots + u_n v_1, \cdots$$

Бұдан кейін мына қатарды қараймыз:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \cdots + \omega_n + \cdots \tag{58}$$

Осы (58) қатарды (56) қатар мен (57) қатардың көбейтіндісі деп атайды.

**2-теорема.** *Егер (56) және (57) қатарлар абсолют жинақты болса, онда олардың көбейтіндісі (58) қатар да абсолют жинақты болады және осы кейінгі қатардың қосындысы* $\omega$ *(56) қатар мен (57) қатардың қосындыларының көбейтіндісіне тең, яғни* $\omega = uv$. [*мұнда* $u$ *– (56) қатардың қосындысы, ал* $v$ *–(57) қатардың қосындысы*].

Бұл тұжырымдалған теореманы Коши тағайындаған.

Егер қарастырылып отырған қатарлардың біреуі абсолют жинақты болып, екінші шартты жинақты болса, онда да теорема дұрыс болады.

Айталық (56) қатар абсолют жинақты болсын, ал (57) қатардың абсолют жинақты болуы міндетті емес, бірақ жинақты болса болғаны.

Теореманы дәлелдеу үшін $n$ шексіздікке ұмтылғанда мына төмендегі айырмалардың

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots v_{2n} - (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)(v_1 + v_2 + \cdots + v_n)$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots v_{2n+1} - (u_1 + u_2 + \cdots + u_{n+1})(v_1 + v_2 + \cdots + v_{n+1})$$

нольге ұмтылуын көрсету керек. Бұл айырмалардың біреуін, мәселен біріншісін жеке алайық және оны $\delta$ арқылы белгілейік. Сонда

$$\delta_1 = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{2n} - (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

$$(v_1 - + v_2 + \cdots + v_n).$$

Осы кейінгі теңдіктегі $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2n}$ дердің орнына олардың сәйкес мәндерін қойып ықшамдағаннан кейін, айырма $\delta$ мына түрге көшеді:

$$\delta = u_1(v_{n+1} + \dots + v_{2n}) + u_2(v_{n+1} + \dots + v_{2n-1}) +$$
$$+ \dots + u_n v_{n+1} + u_{n+1}(v_1 + \dots + v_n) + u_{n+2}(v_1 + \dots +$$
$$+ v_{n-1}) + \dots + u_{2n} v_1.$$

Теореманың шарты бойынша (56) қатар абсолют жинақты. Сондықтан мына қосынды

$$|u_1| + |v_2| + \dots + |v_n|$$

қандай болса да бір тиянақты оң $A$ санынан аспайды, яғни

$$(|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|) \leq A.$$

(57) қатар жинақты болғандықтан, оның дербес қосындысы $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ өзінің абсолют шамасы бойынша қандай болса да тиянақты $\beta$ санынан аспайды, яғни

$$|v_1 + v_2 + \dots + v_n| \leq B.$$

$\varepsilon$ – алдынала берілген оң құнарсыз аз сан болсын. Сонда Коши критерийі бойынша берілген $\varepsilon$ санына сәйкес $N = N(\varepsilon)$ саны табылып, осы $N$-нен артық барлық $n$-дер $(n \geq N)$ үшін $p$ саны қандай болса да төмендегі теңсіздіктер

$$(|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|) < \frac{\varepsilon}{A+B}.$$
$$(|v_{n+1}| + |v_{n+2}| + \dots + |v_{n+p}|) < \frac{\varepsilon}{A+B}.$$

орындалуға тиіс.

Егер осы кейінгі екі теңсіздікті еске алсақ, онда

$$|\delta| < \frac{s}{A+B}(|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|) + B(u_{n+1} + u_{n+2} +$$
$$+ \dots + u_{2n})$$

немесе

$$|\delta| < \frac{\varepsilon A}{A+B} + \frac{\varepsilon B}{A+B} = \varepsilon.$$

Сөйтіп $\delta$-ның шегі ноль болатын болды. Осымен теорема дәлелденді.

2. Енді (58) қатарды (56) қатарға бөлейік. (58) қатарды (56) қатарға бөлу деген сөз (57) қатарды табу деген мәселе.

Егер (58) қатар – (56) қатар мен (57) қатардың көбейтіндісі болса, онда

$$\omega_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + u_n v_1.$$

Бұл арадан

$$u_1 v_1 + \omega_1$$

$$u_1 v_2 + u_2 v_1 = \omega_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1 = \omega_n. \qquad (59)$$

Осы кейінгі теңсіздіктерден $v_1, v_2, v_3 \cdots v_4 \cdots$ сандарды табуға болады, өйткені мұнда $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ... және $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ..., белгілі сандар. Осы жолмен табылған $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ... сандардан (57) қатарды құрамыз. Егер осы құрылған (57) қатар және (56), (58) қатарлар абсолют жинақты болса, онда (57) қатардың қосындысы – (58) қатарды (56) қатарға бөлуден шығатын бөлінді болып табылады. Бұл пікір – қатарларды көбейту жөніндегі дәлелденген теоремадан шығатын сандар.

Бір-екі мысал келтірейік, алдымен қатарларды көбейту жөнінде.

а) келесі екі қатардың

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$
$$1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1} x^n + \cdots,$$

мұнда $x$ мына теңсіздікті $|x| < 1$ қанағаттандыратын тұрақты сан. Ендеше бұл екі қатар – кеміме геометриялық прогрессиялар, $|x| < 1$ болғандықтан қатардың екеуі де абсолют жинақты.

Енді біртіндеп $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ..., сандарды табайық:

$$\omega'{}'_1 = 1 \cdot 1 = 1;\ \omega_2 = 1(-x) + x \cdot 1 = 0;\ \omega_3 = 1 \cdot x^2 + x(-x) +$$

$$+ x^2 \cdot 1 = x^2, \omega_4 = 1 \cdot (-x^3) + x \cdot x^2 + x^2(-x) + x^3 \cdot 1 = 0, \cdots,$$

$$\omega_{2n-1} = 1 \cdot x^{2n-1} + x(-x^{2n-3} + x^2(-x^{2n-4} + \cdots + x^{2n-2} \cdot 1 = x^{2n-1}$$

$$\omega_{2n} = (1 \cdot x^{2n-1}) + x(-x^{2n-2}) + x^2(-x^{2n-3}) + \cdots + x^{2n-1} \cdot 1 = 0$$

Сонымен, мысал үшін алынып отырған екі қатардың көбейтіндісі болады.

$$1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots,$$

Егер $|x| < 1$ болса, бұл қатарда абсолют жинақты.

б) Енді төмендегі

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

қатарды мына қатарға

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}+\cdots$$

бөлу керек. Ол үшін мына $v_1, v_2, \ldots, v_n, \cdots$ сандарды табу керек. (59) теңдіктерді пайдаланамыз. Сонда

$$\frac{1}{2}v_1=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}v_2=\frac{1}{2^2}v^1=\frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{2}v_3-\frac{1}{2^2}v_2+\frac{1}{2^3}v_1=\frac{1}{2^3},$$

$$\frac{1}{2}v_n-\frac{1}{2^2}v_{n-1}+\frac{1}{2^3}v_{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}v_1,=\frac{1}{2^n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Бірінші теңдіктерден $v_1=1, v_2=1, v_3=\frac{1}{2},$

$$v_4=\frac{1}{2^2},\cdots,\quad v_n=\frac{1}{2^{n-2}}\ (n=2,3,4\cdots)$$

Математикалық индукция әдісін қолданып мына $v_n=\frac{1}{2^{n-2}}$ формуланың дұрыстығын дәлелдеуге болады (мұны дәлелдеу оқушылардың өздерінің қолдарынан да келеді).

Сонымен, іздеп отырған қатар.

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=3$$

болады.

Бөлінгіш қатардың қосындысы тең 1-ге, ал бөлгіш қатардың қосындысы $\frac{1}{3}$-ге тең. Ал, $1:\frac{1}{3}=3$.

## §10. Қатарларды қосындылау жөніндегі екі теорема

**Теорема.** Егер

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

қатардың $a_n$ жалпы мүшесін мына түрде $a_n = x_n - x_{n+1}$ жазуға болса және $x_n$ сандары $a$ санына жинақты тізбек құрса, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = x_1 - a.$$

Теоремада айтылып отырған қатардың дербес қосындысын $S$ арқылы белгілесек, онда

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) +$$

$$+ \cdots + (x_n - x_{n+1}) = x_1 - x_{n+1};$$

бұл арадан

$$\lim_{n\to\infty} S_n = x_1 - a$$

теорема дәлелденді.

Мәселен, мындай

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\,(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}$$

қатарды

алайық. Бұл қатардың жалпы мүшесі

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\,(\sqrt{n} + \ \sqrt{n+1})} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} xn = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n} = 0}.$$

Сондықтан

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\,(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = 1.$$

**Теорема.** *Егер*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*қатардың $a_n$ жалпы мүшесін мына түрде*

$$a_n = \alpha_1 x_{n+1} + \alpha_2 x_{n+2} + \cdots + \alpha_p x_{n+p}$$

*жазуға болса (мұнда* $p \geq 2$ *оң сан),* $x_n$ *сандарды* $a$ *санына жинақты тізбек құрса және* $\alpha_1, \alpha_{2\ldots,}\, \alpha_n$ *сандары төмендегі шартты*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ \alpha_3 + \cdots + \alpha_p = 0$$

қанағаттандырса, онда қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

жинақты және

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 x_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) x_2 + \cdots + \big(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p-1}\big) x_{p-1} +$$

$$+\big(\alpha_2 + 2_{\alpha_3} + 3_{\alpha_4} + \cdots + (p-1)\alpha_p\big)\alpha.$$

Егер теоремада айтылып отырған қатардың дербес қосындысын. $S_n$ арқылы белгілесек, онда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_p x_p + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 + \cdots +$$

$$+\alpha_p x_{p+1} + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_4 + \cdots + \alpha_p x_{p+2} + \cdots + \alpha_1 x_{n+1} +$$

$$\alpha_2 x_{n+2} + \cdots + \alpha_p x_{n+p}$$

немесе

$$Sn = \alpha_1 x_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) x_2 + \cdots + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p-1}) x_{p-1} +$$

$$\sum_{h=0}^{p+1} (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p) x_{p+h} + \big(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_p\big) x_{n+2} +$$

$$+(\alpha_3 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_p) x_{n+3} + \cdots + \alpha_p x_{n+p} = \alpha_1 x_1 + (\alpha_1 +$$

$$+\alpha_2) x_2 + \cdots + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{p-1}) x_{p-1} + (\alpha_2 + a_3 +$$

$$+ \cdots + \alpha_p) x_{n+2} + (\alpha_3 + \alpha_4 + \cdots + x_{n+3} + \cdots + \alpha_p x_{n+p}$$

Теореманың шарттары бойынша

$$\lim_{n \to \infty} x_{n+2} = \lim_{n \to \infty} x_{n+3} = \cdots = \lim_{n \to \infty} x_{n+p} = a.$$

Сондықтан

$$\lim S_n = \alpha_1 x_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) x_2 + \cdots + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots +$$
$$+\alpha_{p-1}) x_{p-1} + (\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3a_4 + \cdots + (p - 1\alpha_p) a$$

Теорема дәлелденді.

Мына қатардың

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n+1)}{n(n+1)(n+2)}$$

қосындысын табайық. Бұл қатардың жалпы мүшесі

$$\alpha_n = \frac{2(2n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{3}{n+2}.$$

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = -3.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Ендеше

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2\mathrm{n}+1)}{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)} = 1\cdot 1 + (1+2)\frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

### *Жаттығулар*

Төмендегі қатарлардың жинақтылығын тексеру керек.

1. $\frac{1}{3} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 - \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \cdots + (-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \cdots$

2. $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)^2 + \cdots$

3. $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-} - \frac{1}{n} + \cdots$

4. $1 + \frac{1}{1\cdot 1!} + \frac{1}{2\cdot 2!} + \cdots + \frac{1}{n\cdot n!} + \cdots$

5. $\frac{1}{(ln2)^{\alpha}} + \frac{1}{(ln3)^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{(lnn)^{\alpha}} + \cdots (\alpha > 0)$

6. $1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)!} + \cdots$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}, (a > 0)$

8. $\frac{sin\,\alpha}{1\sqrt{1}} + \frac{sin2\alpha}{2\sqrt{2}} + \cdots + \frac{\sin n\,\alpha}{n\sqrt{n}} + \cdots$

Келесі қатарларды қосындылау керек.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+3n+1}{n^2(n+1)^3}.$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2(n+1)^2}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

# XIV ТАРАУ
# ФУНКЦИЯЛЫҚ ҚАТАРЛАР

## § 1. Функциялық тізбек

**1.** Біз осы уақытқа шейін мүшелері тұрақты сандар болып келетін тізбектерді немесе қатарларды қарастырдық. Енді барлық мүшелері бір аралықта, мәселен (a, b) аралығында анықталған функциялар болып келетін төмендегі

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots \tag{1}$$

тізбекті қарайық. Мұндай тізбекті функциялар тізбегі немесе функциялық тізбек деп атайды. Ал $f_n(x)$-ті тізбектің жалпы немесе $n$-ші мүшесі деп атайды.

Егер (1) тізбектің мүшелерінің аргументіне $x_0$-мәнін бергендегі шығатын сан тізбегі

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \cdots, f_n(x), \cdots \tag{2}$$

жинақты болатын болса, (1) функциялық тізбекті $a, b$ аралығының $x = x_0$ −нүктесінде жинақты болады деп айтамыз. Былайша айтқанда, егер алдынала берілген кез келген мейлінше (құнарсыз) аз $\varepsilon > 0$ санына сәйкес және табылып, осы $N$-нен артық барлық $n$-дер үшін

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{3}$$

теңсіздігі орындалатын болса, (1) тізбекті $(a, b)$ аралығының $x_0$-нүктесінде $f(x_0)$ санына жинақты болады дейміз.

Егер (1) функциялық тізбек $(a, b)$ аралығының әрбір $x$ нүктесінде жинақты болса, онда оны $(a, b)$ аралығында жинақты дейміз.

Анықтамада айтылып отырған $N$ саны $\varepsilon$-ға және $x_0$-ге тәуелді болып сайланылып алынады, былайша айтқанда (3) теңсіздікті орындау үшін берілген $\varepsilon$ саны бойынша $(a, b)$ аралығының әртүрлі нүктелері үшін әртүрлі $N$ сандары сайланып алынуы керек.

(3) теңсіздікті теңдік арқылы былай жазамыз:

$$\lim_{n\to\infty} fn(x_0) = f(x_0).$$

(2) сандық тізбектің жинақтылығы туралы мәселе Коши критерийі көмегімен шешілетіні белгілі. Сондықтан да (1) функциялық тізбектің $(a, b)$ аралығында жинақтылығы туралы мәселе Коши критерийі арқылы шешіледі.

$(a, b)$ аралығында анықталған функциялардан құрылған (1) тізбек жинақты болу үшін, алдынала берілген оң $\varepsilon$ санына және $(a, b)$ аралығының әрбір $x$ нүктесіне сәйкес $N = N(\varepsilon, x)$ саны табылып, осы $N$ санынан үлкен $m$ және $n$ сандары $(m, n > N)$ үшін төмендегі теңсіздіктің

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad (4)$$

орындалуы қажетті және жеткілікті.

Осы тұжырымдалған теореманы Коши критерийі дейді. Мұндағы айталып отырған $N$ саны жалғыз $\varepsilon$ ғана емес, жалпы айтқанда $x$-ке де тәуелді. Айталық $m > n$ болсын және $m - n = p$ бұл арадан $m = n + p$. Сонда (4) теңсіздіктің орнына мынадай теңсіздік болады:

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon. \qquad (4')$$

Егер (1) функциялық тізбек $(a, b)$ аралығының әрбір $x$ нүктесінде жинақты болса, онда бір тиянақты $y$ санына ұмтылатын сандық тізбек шыққан болар еді, әрине бұл $y$ саны сөзсіз $x$-ке тәуелді болады, яғни $x$-тің $(a, b)$ аралығында анықталған функциясы болып табылады: $y = f(x)$. Бұл функцияны шектік функция деп атайды және ол былай жазылады:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Бұл арадан мынадай анықтамаға келеміз:

Егер берілген әрбір оң $\varepsilon$ санына және қаралып отырған аралықтың әрбір $x$ нүктесіне сәйкес $N = N(\varepsilon, x)$ саны табылып, осы $N$-нен артық барлық $n$ натурал сандар $n > N$ үшін төмендегі теңсіздік

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (5)$$

орындалатын болса, (1) функциялық тізбекті $(a, b)$ аралығында $f(x)$ функцияға жинақты болады деп айтады.

Мысалы, мына $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} (n = 1,2, \dots)$ функциялардан құрылған тізбекті алсақ, онда бұл тізбек үшін шектік функция:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2} = |x|}$$

болады.

**2.** Функциялық тізбек өзінің шектік функциясына түрліше жинақты болады. Осы түрліше жинақтылықтардың ішіндегі ең маңыздысы бірқалыпты жинақтылық.

Егер алдынала берілген оң құнарсыз аз $\varepsilon$ санына сәйкес және тек осы $\varepsilon$-ға ғана тәуелді $N = N(\varepsilon)$ саны табылып, бұл $N$ санынан үлкен барлық натурал $n$ сандары $n > N$) үшін келесі теңсіздік

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{6}$$

$(a, b)$ аралығының барлық нүктелері үшін орындалса, онда (1) функциялық тізбекті $(a, b)$ аралығында $f(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты болады деп айтамыз.

Бірқалыпты жинақтылық пен $(a, b)$ аралығының әрбір нүктесіндегі жинақтылықтың бір-бірінен айырмасы мынада: бірқалыпты жинақтылықта $N$ саны тек $\varepsilon$-ға ғана тәуелді, яғни (6) теңсіздік $(a, b)$ аралығының барлық нүктелері үшін бірдей орындалады. Егер (1) функциялық тізбек $(a, b)$ аралығында бірқалыпты жинақты болса, онда тізбек аралықтың әрбір нүктесінде жинақты. Керісінше қорытынды дұрыс емес, яғни функциялық тізбек айтылып отырған аралықтың әрбір нүктесінде жинақты болғанымен ол аралықты бірқалыпты жинақты болмауы мүмкін.

Мысал үшін $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ интервалында анықталған келесі функциялардан

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$
$$(n = 1,2, \dots)$$

тұратын функциялық тізбекті қарайық. Бұл тізбек үшін шектік функция:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1 - x}.$$

Енді мысал үшін алынып отырған тізбек шектік функцияға қалай жинақты екенін тексерейік. Ол үшін $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ интервалының ішінде жатқан барлық $x$ нүктелер үшін мына $f_n(x) = \frac{1}{1-x}$. айырманың абсолют шамасын қараймыз. Сонда

$$\left|f(x) - \frac{1}{1-x}\right| = \frac{1}{1-x} - f_n(x) = \sum_{p=1}^{\infty} x^{n+p} < \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^n}.$$

Сонымен,

$$\left|f(x) - \frac{1}{1-x}\right| < \frac{1}{2^n}.$$

$\varepsilon$ – алдынала берілген оң құнарсыз аз сан болсын. Осы берілген $\varepsilon$ саны бойынша $N$ санына мына $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ теңсіздік орындалатындай етіп сайлап алсақ, сонда төмендегі теңсіздікті

$$n > \frac{ln\frac{1}{\varepsilon}}{ln\,2} = N(\varepsilon)$$

қанағаттандыратын барлық $n$ натурал сандар үшін келесі теңсіздік

$$\left|f_n(x) - \frac{1}{1-x}\right| < \varepsilon$$

$\left(0, \frac{1}{2}\right)$ интервалдың ішінде жатқан барлық нүктелер үшін бірдей орындалады. Демек, мысалға алынып отырған тізбек $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ интервалында $f(x) - \frac{1}{1-x}$ функцияға бірқалыпты жинақты болатын болды.

Осы қаралып отырған тізбек егер о $< a < 1$ болса, (0, $a$) интервалында бірқалыпты жинақты болады. Ал бұл қатар (0,1) интервалында жинақты, бірақ бірқалыпты емес.

## §2 Функциялық тізбектің бірқалыпты жинақтылығы жөніндегі Коши критерийі

**1.** Функциялық тізбектің бірқалыпты жинақтылығы жөніндегі қажетті және жеткілікті шартты келтірейік.

**Теорема (Коши критерийі).** *(1) Функциялық тізбек (a,b) аралығында f(x) функцияға бірқалыпты жинақты болу үшін алдынала берілген оң құнарсыз аз ε санына сәйкес және тек ε-ғана тәуелді* $N = N(\varepsilon)$ *саны табылып, осы* $N$*-нен үлкен барлық* $n$

*натурал сандар $n > N$ үшін p саны қандай болса да төменгі теңсіздіктің*

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon \tag{7}$$

*(a, b) аралығының барлық нүктелері үшін орындалуы қажетті және жеткілікті.*

Алдымен бұл белгінің қажеттігін дәлелдейік.

(1) Функциялық тізбек $(a,b)$ аралығында $f(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты болсын деп ұйғарайық. Онда жоғарыда берілген бірқалыпты жинақты болсын деп ұйғарайық. Онда жоғарыда берілген бірқалыпты жинақтылықтың анықтамасы бойынша алдын ала берілген оң $\varepsilon$ санына сәйкес $N = N(\varepsilon)$ саны табылып, осы $N$ санынан үлкен барлық $n$ натурал сандар $(n > N)$ үшін төмендегі теңсіздік

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7'}$$

$(a, b)$ аралығының барлық нүктелері үшін орындалуға тиіс. Олай болса, $N$ санынан артық $m$ натурал саны $(m > N)$ үшін де (7′) теңсіздік орындалады, яғни

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8}$$

Келесі теңбе-теңдікті құрайық:

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x).$$

Бұл арадан

$$|f_m(x) - f(x)| < |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f(x)|.$$

(7′) және (8) теңсіздіктерді еске алсақ, онда

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

немесе бәрібір

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$$
$$n > N, p = 1,2 \cdots .$$

Сонымен, (7) шарт орындалды.

Енді Коши критерийінің жеткіліктілігін дәлелдейік, яғни $(a, b)$ аралығының барлық нүктелері үшін (7) теңсіздік орындалса, онда (1) функциялық тізбектің $(a, b)$ аралығында $f(x)$ функцияға бірқалыпты жинақтылығын дәлелдеуіміз керек.

Сонымен, $(a, b)$ аралығының барлық нүктелерінде (7) теңсіздік төмендегі қос теңсіздікпен

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f_{n+p}(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

парапар.

$(a, b)$ аралығының әрбір нүктесі үшін мына шарт $\lim\limits_{p\to\infty} f_{n+p}(x) = f(x)$ орындалуға тиіс.

Егер $p$-ні шексіздікке ұмтылтып, (9) теңсіздіктен шекке көшсек, онда

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) \leq f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

яғни бұл арадан $(a, b)$ аралығының кез келген нүктесі үшін төмендегі теңсіздіктің

$$|f_n(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

дұрыстығы келіп шығады. Бұл теңсіздіктің орындалуы (1) тізбектің $(a, b)$ аралығында $f(x)$ функцияға бірқалыпты жинақтылығын дәлелдейді.

2. Функциялық тізбектің барлық мүшелері $(a, b)$ аралығында үздіксіз болғанымен оның шектік функциясы үзілісті болуы мүмкін. Мәселен [0,1] сегментінің барлық нүктелерінде үздіксіз мына $f_n(x) = x^n (n = 1,2,3, \dots)$ функциялардан тұратын тізбекті қарайық. Бұл тізбектің шектік функциясы:

егер $0 \leq x < 1$ болса,

$$f(x) \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

егер $x = 1$ болса,

$$f(x) \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 1,$$

болады.

Міне осы теңдіктердің өзінен-ақ шектік функцияның $x = 1$ нүктесінде үзілісті екені көрініп тұр.

Сонымен, шектік функция үздіксіз болу үшін тізбектің барлық мүшелерінің үздіксіз болуы жеткіліксіз. Шектік функцияның үздіксіздігі жөнінде келесі теореманы дәлелдейік.

**Теорема.** *Егер* $(a, b)$ *аралығында анықталған үздіксіз функциялардан тұратын тізбек*

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots \tag{9}$$

*осы аралықта* $f(x)$ *функцияға бірқалыпты жинақты болса, онда шекті функция* $f(x)$, $(a, b)$ *аралығында үздіксіз болады.*

$x_0 - (a, b)$ аралығының кез келген нүктесі болсын. Осы $x_0$ нүктесінде шектік функцияның үздіксіздігін дәлелдейік.

(9) тізбек $(a, b)$ аралығында $f(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты болғандықтан, алдын ала берілген оң құнарсыз аз $\varepsilon$ саны бойынша $N = N(\varepsilon)$ саны табылып осы $N$ санынан артық $(n > N)$ натурал $n$ сандары үшін келесі теңсіздік

$$|f_n(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (10)$$

$(a, b)$ аралығының барлық нүктелері үшін орындалады.

Теореманың шарты бойынша функциялар $f_n(x)$, $(a, b)$ аралығында үздіксіз, сондықтан $x_o$ нүктесінің $(x_0 - \delta, x_0 - \delta)$ аймағында жатқан барлық $x$-тер үшін төмендегі теңсіздік

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (11)$$

орындалады. (10) теңсіздік $x_0$ нүктесі үшін де орындалады, яғни

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (12)$$

Келесі теңбе-теңдікті құрайық:

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0).$$

Бұл арадан

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| +$$
$$+|f_n(x_0) - f(x_0)|$$

(10), (11), (12) теңсіздіктерді еске алсақ, сонда:

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad (13)$$

Сонымен, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ аймақтың ішінде жатқан барлық $x$-тер үшін (13) теңсіздік орындалатын болды. Бұл теңсіздіктің орындалуы теореманың дұрыстығын дәлелдейді.

## § 3. Функциялық қатар және оның жинақтылығы

1. $(a, b)$ аралығында анықталған функциялардан тұратын төмендегі тізбекті қарайық

$$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$$

Осы тізбектің мүшелерінен келесі

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \qquad (14)$$

немесе

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

өрнекті құрайық. Бұл өрнекті *функциялық қатар* деп атайды.

(14) қатардың мүшелерінен келесі қосындыларды түзейік:

$$S_1(x) = u_1(x),$$
$$S_2(x) = u_1(x) + u_2(x), \cdots,$$
$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x), \cdots.$$

Бұл қосындыларды (14) қатардың *дербес қосындылары* деп атайды. Егер (14) функциялық қатардың дербес қосындыларының тізбегі

$$S_1(x), S_2(x), \cdots S_n(x), \cdots \qquad (15)$$

$(a, b)$ аралығының $x_0$ нүктесінде $S(x_0)$ санына жинақты болса, онда (14) функциялық қатарды осы нүктеде $S(x_0)$ санына жинақты болады деп атайды.

Былайша айтқанда мына сандық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \qquad (16)$$

жинақты болса, (14) функциялық қатар да $x = x_0 -$ нүктесінде жинақты болады деп атаймыз.

Осы $S(x_0)$ санын (14) қатардың $x_0$-нүктесіндегі қосындысы деп атайды және

$$S(x_0) = \sum_{h=1}^{\infty} u_n(x_0).$$

Егер (14) қатар $(a, b)$ аралығының әрбір нүктесінде жинақты болса, онда оны $(a, b)$ аралығында *жинақты қатар* деп атайды. (14) қатардың қосындысы $S(x)$, $(a, b)$ аралығында анықталған функция болып табылады және біз мұны былай жазамыз:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Екінші жағынан $S(x)$ – (15) тізбектің шектік функциясы болып табылады:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x).$$

Сөйтіп, жоғарыда берілген анықтама бойынша, егер (15) тізбек жинақты болса, онда (14) қатар да жинақты.

(14) қатармен бірге мына қатарды қарайық:

$$u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x) + \cdots$$

Егер бұл қатардың қосындысын $R_n(x)$ арқылы белгілесек, яғни

$$R_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+\text{к}}(x), \text{ онда}$$

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x) \tag{17}$$

немесе

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x). \tag{18}$$

Осы $R(x)$ функцияны (1) қатардың *қалдық мүшесі.* деп атайды.

Егер (14) қатардың қосындысы үшін оның бірінші $n$ мүшелерінің қосындысын алсақ, онда бұдан сөзсіз қате жібереміз. Қалдық мүше $R_n(x)$ осы жіберілетін қатенің шамасын береді.

Егер (14) функциялық қатар жинақты болса, онда

$$\lim_{n\to\infty} \quad R_n(x) = 0.$$

және керісінше, егер $x$ қандай болса да

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

болса, онда (14) қатар жинақты болады.

2. Егер. (14) функциялық қатардың дербес қосындыларының (15) тізбегі $(a, b)$ аралығында $S(x)$ функциясына бірқалыпты жинақты болса, (14) функциялық қатар да $(a, b)$ аралығында $S(x)$ функциясына бірқалыпты жинақты деп атайды.

Бұл ұғымға бірінші параграфта берілген анықтамадан гөрі басқаша анықтама берейік.

Жоғарыда берілген анықтама бойынша, егер (14) функциялық қатар $(a, b)$ аралығының әрбір $x$ нүктесінде жинақты болса, онда алдын ала берілген оң $\varepsilon$ саны қаншама аз болса да осы $\varepsilon$-ға және $x$-ке тәуелді $N = N(\varepsilon, x)$ саны табылып, $N$-нен артық барлық натурал $n$ сандары $(n > N)$ үшін төмендегі теңсіздік

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \tag{19}$$

орындалады.

Айнымалы $x, (a, b)$ аралығында өзгергенде жаңағы берілген анықтамада айтылып отырған $N = (\varepsilon, x)$ саны шексіз үлкен мәндерді қабылдауы мүмкін. Егер осылайша болса, онда (14) қатар $(a, b)$ аралығында жинақты болғанымен, бірқалыпты жинақты болмайды.

Айнымалы $x, (a, b)$ аралығында өзгергенде $N = (\varepsilon, x)$ саны бір белгілі $N_1 = N_1(\varepsilon)$ санынан аспауы мүмкін. Бұл жағдайда (14) қатар $(a, b)$ аралығында бірқалыпты жинақты болады, өйткені (19) теңсіздік $N_1$ санынан артық $n$ номерлер $n < N_1$ үшін $(a, b)$ аралығының барлық нүктелерінде орындалады.

Мысал үшін мына қатарды қарайық:

$$x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots (x^n - x^{n-1}) + \cdots.$$

Бұл қатардың мүшелері (-1, 1) интервалында анықталсын. Қарастырылып отырған қатардың дербес қосындысы

$$S_n(x) = x^n,$$

мұнда $|x| < 1$ бұл тізбекті екінші параграфта қарағанбыз, оның шектік функциясы

$$S(x) = \begin{cases} 0, \text{егер } |x| < 1\text{болса;} \\ 1, \text{егер } x = 1\text{, болса.} \end{cases}$$

Тексеріліп отырған қатар осы шектік функцияға қалай жинақты, соны зерттейік. Ол үшін мына $S(x) = S_n(x)$ айырманы құрамыз:

$$|S(x) - S_n(x)| = |x^n| = |x|^n \text{ егер } |x| < 1 \text{ болса.}$$

$\varepsilon$ – алдын ала берілген оң мейлінше аз сан болсын. Сонда мына теңсіздік $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ немесе бәрібір мына теңсіздік $|x^n| < \varepsilon$ орындалу үшін $N = (\varepsilon, x)$ санды қалай сайлап алу керек? Кейінгі теңсіздіктен

$\frac{1}{|x|n} > \frac{1}{\varepsilon}$ немесе $\left|\frac{1}{x}\right|^n > \frac{1}{\varepsilon}$. Бұл теңсіздіктің екі жағын логарифмдесек, сонда:

$$n > \frac{ln\frac{1}{\varepsilon}}{ln\frac{1}{|x|}} = N(\varepsilon, x).$$

Егер $|x|$ бірге ұмтылса, онда $N = (\varepsilon, x)$ шексіздікке ұмтылады. Ендеше мысалға алынып отырған қатар (-1, 1) интервалында жинақты болғанымен, бірқалыпты жинақты емес. Енді осы қатардың [-r,r] сегментінде (мұнда r< 1) бірқалыпты жинақты болатынын дәлелдейік.

$|x| \leq r$ болғандықтан $ln\frac{1}{|x|} \geq ln\frac{1}{r}$ сондықтан

$\frac{ln\frac{1}{|\varepsilon|}}{ln\frac{1}{|x|}} \leq \frac{ln\frac{1}{\varepsilon}}{ln\frac{1}{r}}$ $N(\varepsilon)$. Сонымен, [-r,r]

сегментінің ішінде жатқан $x$ қандай болса да $N\,(\varepsilon, x) \leq N(\varepsilon)$ болатын болды. Олай болса, мысал үшін алынып отырған қатар [*–r, r*] сегментінде (мұнда r < 1) бірқалыпты жинақты.

## §4. Функциялық қатардың бірқалыпты жинақтылық белгілері

**1.** Функциялық тізбектің бірқалыпты жинақтылығы жөніндегі Коши критерийін еске түсіріп, функциялық қатардың бірқалыпты жинақтылығы жөнінде келесі теореманы дәлелдеуге болады.

**1-теорема. (Коши критерийі).** *Функциялық қатар*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

$(a, b)$ *аралығында* $S_1(x)$ *функцияға бірқалыпты жинақты болу үшін кезкелген оң мейлінше аз* $\varepsilon$ *санына сәйкес және оған тәуелді* $N = N(\varepsilon)$ *саны табылып, осы* $N$ *санынан артық барлық* $n$ *натурал сандар* $n > N$ *үшін* $p$ *қандай болса да келесі теңсіздіктің:*

$$\left|S_{n+p}(x) = S_n(x)\right| = \left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$$

$(a, b)$ *аралығының барлық нүктелерінде орындалуы қажетті және жеткілікті.*

Бұл теореманың дәлелдеуі екінші параграфта келтірілген.

Функциялық қатардың бірқалыпты жинақтылығы жөніндегі жоғарыда берілген анықтамадан мынадай қорытындыға келуге болады: функциялық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

$(a, b)$ аралығында бірқалыпты жинақты болу үшін алдын ала берілген оң мейлінше аз $\varepsilon$ санына сәйкес және оған тәуелді $N = N(\varepsilon)$ саны табылып, осы $N$ санынан артық барлық $n$-дер $(n > N)$ үшін төмендегі теңсіздіктің

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

$(a, b)$ аралығының барлық нүктелерінде орындалуы қажетті және жеткілікті.

2. Тағы да төмендегі

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \qquad (14)$$

функциялық қатарды қарайық.

Егер мүшелері оң таңбалы жинақты сандық қатар

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (20)$$

табылып, $(a, b)$ аралығының барлық нүктелері үшін төмендегі

$$|u_n(x)| \leq a_n \ (n = 1,2,3, \cdots)$$

теңсіздіктері орындалатын болса, (14) функциялық қатарды $(a, b)$ аралығында дұрыс жинақты немесе мажорантталатын қатар деп атайды.

Бұл анықтамадан мынадай қорытындыға келеміз: егер (14) функциялық қатар $(a, b)$ аралығында дұрыс жинақты болса, онда ол $(a, b)$ аралығының әрбір нүктесінде абсолют жинақты болады. Керісінше қорытынды дұрыс болмауы да мүмкін.

Тәжірибеде кездесетін есептерде функциялық қатардың бірқалыпты жинақтылығын Коши критерийімен тексеру өте қиын мәселе. Тәжірибелік есептерді шығарғанда көп қолданылатын белгілердің біреуі *Вейерштрасс белгісі.* Енді осы белгіге келейік.

**2-теорема. (Вейерштрасс белгісі).** $(a, b)$ *аралығында дұрыс жинақты қатар сол аралықта абсолют және бірқалыпты жинақты болады.*

Айталық (14) функциялық қатар $(a, b)$ аралығында дұрыс жинақты болсын. Онда мүшелері оң жинақты сандық қатар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ табылып, келесі теңсіздіктер $u_n(x) \leq a_n (n = 1,2,3, \cdots)$ $(a, b)$ аралығының барлық нүктелері үшін орындалады. Егер осы сандық қатардың қалдық мүшесін $p_n$ арқылы белгілесек, онда $(a, b)$ аралығының барлық нүктелері үшін келесі теңсіздіктер

$$|R_n(x)| \leq p_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

орындалады. Сандық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

жинақты болғандықтан

$$\lim_{n \to \infty} p_n = 0.$$

Демек, алдын ала берілген оң құнарсыз аз $\varepsilon$ санына сәйкес және тек соған ғана тәуелді $N = N(\varepsilon)$ саны табылып, осы $N$-нен артық барлық $n$-дер $(n > N$ үшін мына теңсіздік $\varrho < \varepsilon$ орындалады. Олай болса, $(a, b)$ аралығының барлық нүктелері үшін төмендегі теңсіздік $|R_n(x)| < \varepsilon$ орындалады. Бұл теңсіздіктің орындалуы теореманы дәлелдейді.

*Ескертпелер.*

а) функциялық қатар тиісті аралықта бірқалыпты жинақты болғанымен, бұл аралықта ол дұрыс жинақты болмауы мүмкін.

Сонымен, функциялық қатар бірқалыпты жинақты болу үшін Вейерштрасс белгісі жеткілікті шарт болып табылады да, бірақ қажетті шарт болып табылмайды.

б) функциялық қатар $(a, b)$ аралығында бірқалыпты жинақты болғанымен, бірақ бұл аралықтың кейбір нүктелерінде оның абсолют жинақты болмауы мүмкін.

Мәселен мына

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)n - 1\,\frac{x^n}{n} + \cdots$$

қатарды қарайық. Бұл қатар [0,1] сегментінде бірқалыпты жинақты. Оны мынадан байқауға болады: қаралып отырған қатардың қалдық мүшесі

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+2}}{n+2} + \cdots,$$

бұл арадан

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1};\, 0 \leq x \leq 1 \text{ болғандықтан}$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}, \text{яғни } \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

демек, қаралып отырған қатар [0,1] сегментінде бірқалыпты жинақты. Егер $x = 1$ болса, онда тексеріліп отырған қатар мына түрге көшеді

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{\,n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

бұл қатар бізге белгілі, абсолют жинақты емес, шартты жинақты.

в) функциялық қатар $(a, b)$ аралығының әрбір нүктесінде абсолют жинақты болғанымен, бірақ бұл аралықта оның бірқалыпты жинақты болмауы мүмкін.

Мәселен мына төмендегі

$$(1-x)+x(1-x)+x^2(1-x)+\cdots+x^n(1-x)+\cdots$$

қатарды қарайық. Бұл қатар [0,1] сегментінің барлық нүктелерінде абсолют жинақты, оны мынадан байқауға болады: егер $x=0$ болса, онда қатардың бірінші мүшесінен басқа мүшелерінің барлығы нольге айналып кетеді; егер $x=1$ болса, онда қатардың барлық мүшелері нольге айналады; ал 0 мен 1-дің арасында жатқан барлық $x$-тер үшін қатардың барлық мүшелері оң және қатар кеміме геометриялық прогрессия, болып табылады. Демек, қатар абсолют жинақты. Бірақ тексеріліп отырған қатар [0,1] сегментінде бірқалыпты жинақты емес, оны былай дәлелдеуге болады: егер осы қаралып отырған қатардың орнына мына

$$1+(x-1)+x(x-1)+\cdots+x^{n-1}(x-1)+\cdots$$

қатарды алсақ, онда бастапқы берілген қатар мен бұл қатардың бір-бірінен айырмасы тек таңбасында және бірінші мүшеде. Егер бастапқы берілген қатардың бірінші мүшесін шығарып тастасақ, ал барлық мүшелерінің таңбаларын өзгертсек, одан қатардың жинақтылық қасиеті өзгермейді. Енді кейінгі қатардың дербес қосындысын құрайық:

$$S_n(x)=1+(x-1)+x(x-1)+\cdots+x^{n-1}(x-1)=x^n.$$

Сонымен, кейінгі қатардың дербес қосындыларының тізбегі

$$x, x^2, \cdots x^n, \cdots$$

болады.

Мұндай тізбекті өткен параграфтарда қарағанда да оның [0,1] сегментінде бірқалыпты жинақты емес екендігіне көз жеткізген болатынбыз.

г) функциялық қатар $(a,b)$ аралығында абсолют және бірқалыпты жинақты болғанымен, бірақ оның бұл аралықты дұрыс жинақты болмауы мүмкін.

**2.** Жоғарыда келтірілген Вейерштрасс белгісінен басқа тағы да бір белгіні келтіруге болады, бұл белгі – *Дирихле белгісі*. Келесі функциялық қатарды қарайық:

$$a_1(x)b_1(x)+a_2(x)b_2(x)+\cdots+a_n(x)b_n(x)+\cdots. \qquad (21)$$

**3-теорема. (Дирихле белгісі).** *Егер мына*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

*қатардың дербес қосындылары шектелген болса, ал мына қатар*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n(x) - b_{n+1}(x)|$$

*бірқалыпты жинақты болса және*

$$\lim_{n\to\infty} b_n(x) = 0.$$

*болса, онда (21) қатар бірқалыпты жинақты болады.*

Егер мына қатардың

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

дербес қосындысын $S_n(x)$ арқылы белгілесек, онда теореманың шарттары бойынша

$$S_n(x) < M.$$

Теореманың шарттары бойынша тізбек $b_1(x), b_2(x), \dots, b_n(x), \cdots$ нольге жинақты, сондықтан бұл тізбек үшін Коши критерийі орындалуға тиіс, яғни

$$\left|u(x) - b_{n+p}(x)\right| = [b[n(x) - b_{n+1}(x)] + [b_{n+1}(x) - b_{n+2}(x)] +$$
$$+ \cdots + \left[b_{n+p-1}(x) - b_{n+p}(x)\right] \le |b_n(x) - b_{n+1}(x)| +$$
$$+|b_{n+1}(x) - b_{n+2}(x)| + \cdots + \left|b_{n+p-1}(x) - b_{n+p}(x)\right| < \varepsilon.$$

Енді мына

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x)$$

қосындыға өткен тараудың жетінші параграфындағы (39) формуланы қолданайық. Сонда

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} [S_k(x) - S_{k-1}(x)] b_k(x) =$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} S_k(x) b_k(x) - \sum_{k=p+1}^{n+p} S_{k-1}(x) b_k(x) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k(x)b_k(x) - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(x)b_{k+1}(x) =$$

$$= S_{n+p}(x)b_{n+p}(x) - S_n(x)b_{n+1}(x) +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x)\,[b_k(x) - \, b_{k+1}(x)].$$

Бұл арадан

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \leq \left|S_{n+p}(x)\right|b_{n+p}(x) + |S_n(x)||b_{n+1}(x)| +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |s_k(x)|\,|b_k(x) - b_{k+1}(x)| \leq$$

$$\leq M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_k(x - b_{k+1}(x)| + M\left|b_{n+p}(x)\right| + M|b_{n+1}(x)|.$$

Егер теореманың шарттарын пайдалансақ, онда алдынала берілген оң мейлінше аз $\varepsilon$ санына сәйкес $N = N(\varepsilon)$ саны табылып, осы $N$-нен артық барлық $n$-дер ($n > N$) үшін келесі теңсіздіктер

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}, \quad |b_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M},$$

$$\text{демек } \left|b_{n+p}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{M}$$

$x$-тің барлық мәндері үшін орындалуға тиіс. Олай болса

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\,b_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Сонымен, қаралып отырған (21) қатар үшін бірқалыпты жинақтылық жөніндегі Коши критерийі орындалды. Демек, теорема дәлелденді.

Бұл дәлелденген белгі ілгеріде кездесетін тригометриялық қатарлардың жинақтылығын зерттегенде жиі қолданылады.

## §5. Қатарлар қосындысының үздіксіздігі

**1.** Тағы да келесі функциялық қатарды қарайық:

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{14}$$

Функциялық қатардың мүшелерінің барлығы үздіксіз болғанымен оның қосындысы үзілісті функция болуы мүмкін. Функциялық қатар қосындысының үздіксіздігі туралы мәселе қатарлар теориясындағы негізгі мәселелердің бірі болып табылады. Бұл мәселенің жай ғана мәселе емес екенін мынадан байқауға болады: $(a, b)$ аралығында анықталған үздіксіз функциялардан тұратын қатар осы аралықтың барлық нүктелерінде абсолют жинақты болса да, оның қосындысы үзілісті функция болуы тіпті мүмкін нәрсе.

Функциялық қатардың қосындысы үздіксіз функция болу үшін оның мүшелерінің барлығы үздіксіз болудан басқа тағы да қандай қосымша шарт болу керек? Бұл сұраққа төмендегі теорема жауап береді.

**1-теорема.** *Егер (14) функциялық қатардың барлық мүшелері $(a, b)$ аралығында үздіксіз болса және осы аралықта ол бірқалыпты жинақты болса, онда оның қосындысы $(a, b)$ аралығында үздіксіз функция болады.*

(14) қатардың қосындысын $S(x)$, дербес қосындысын $S_n(x)$, арқылы, ал оның қалдық мүшесін $R_n(x)$ арқылы белгілейік. $x_0 - (a, b)$ аралығының кез келген нүктесі болсын. Аргумент $x$-ке $x_0$ нүктесінде $h$ өсімшесін берейік. Өсімше $h$-тың аздығы сонша ма, нүкте $x_0 + h, (a, b)$ аралығының ішінде жатады. Теореманың шарты бойынша (14) қатар $x_0$ және $x_0 + h$ нүктелерінде жинақты және онымен бірге

$$s(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots$$

$$s(x_0 + h) = u_1(x_0 + h) + u_2(x_0 + h) + \cdots + u_n(x_0 + h) + \cdots$$

Екінші жағынан

$$s(x) = s_n(x) + R_n(x). \tag{22}$$

Теореманың шарттары бойынша (14) қатар $(a, b)$ аралығында бірқалыпты жинақты. Сондықтан, алдын ала берілген оң $\varepsilon$ саны қаншама аз болса да оған сәйкес $N = N(\varepsilon)$ саны табылып, осы $N$-нен артық барлық $n$-дер $(n > N)$ үшін төмендегі теңсіздік

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$(a, b)$ аралығының барлық нүктелері орындалады. Ендеше бұл арадан

$$|R_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, |R_n(x_0 + h)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (23)$$

(22) теңдіктегі $x$-тің орнына әуелі $x_0$-ді онан кейін $x_0 + h$-ты қойсақ, сонда

$$s(x_0) = s_n(x_0) + R_n(x_0),$$

$$s(x_0 + h) = s_n(x_0 + h) + R_n(x_0 + h),$$

бұл арадан

$$s(x_0 + h) - s(x_0) = s_n(x_0 + h) - s_n(x_0) + R_n(x_0 + h) - R_n(x_0),$$

$$|s(x_0 + h) - s_n(x_0)| \leq |s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| +$$

$$+|R_n(x_0 + h)| - |R_n(x_0)|. \qquad (24)$$

$n$ – мына $N$ санынан артық $(n > N)$ тұрақты сан болсын, онда $S_n(x)$ – саны шектеулі үздіксіз функциялардың қосындысы болып табылады. Сондықтан, $S_n(x) - (a, b)$ аралығында үздіксіз функция. Олай болса берілген оң $\varepsilon$ саны бойынша $\delta$ саны табылып, қалай мына теңсіздік $|h| < \delta$ орындалысымен солай төмендегі теңсіздік

$$|s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (25)$$

орындалады.

(23) және (25) теңсіздіктерді еске алсақ, онда (24) теңсіздік мына түрге көшеді:

$$|s(x_0 + h) - s\,(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Осы кейінгі теңсіздіктің орындалуы $S(x)$ функцияның $x_0$ нүктесінде үздіксіздігін дәлелдейді. $x_0 - (a, b)$ аралығының кез келген нүктесі болғандықтан, функция $S(x)$, $(a, b)$ аралығының әрбір нүктесінде үздіксіз болады. Сонымен, теорема дәлелденді.

Сөйтіп, үздіксіз функциялардан құрылған қатардың қосындысы үздіксіз функция болу үшін оның бірқалыпты жинақтылығы жеткілікті шарт болатын болды, бірақ бұл шарт қажетті шарт бола алмайды. Былайша айтқанда, үздіксіз функциялардан құрылған қатардың қосындысы үздіксіз функция болғанымен, бірақ оның бірқалыпты жинақты болмауы мүмкін, немесе үздіксіз функциялардан тұратын қатар бірқалыпты жинақты болмағанымен, бірақ оның қосындысы үздіксіз функция болуы мүмкін.

Үздіксіз функциялардан құрылған қатардың қосындысы үздіксіз болу үшін оның бірқалыпты жинақтылығы қажетті шарт болып табылатын жағдай да бар, ол жағдай – қатардың барлық мүшелерінің таңбалары бірдей болу.

**2-теорема (Дини теоремасы).** *Егер (14) қатардың барлық мүшелері $(a, b)$ аралығында оң, үздіксіз болса және ол осы аралықтағы үздіксіз $s(x)$ функцияға жинақты болса, онда оның жинақтылығы бірқалыпты болады.*

$x_0 - (a, b)$ аралығының кез келген нүктесі болсын. Онда

$$s(x) - s(x_0) = s_n(x) - s_n(x_0) + R_n(x) - R_n(x_0). \quad (26)$$

Теореманың шарттары бойынша $x_0$ нүктесінде қатар жинақты, сондықтан еркімізше алынған оң $\varepsilon$ саны бойынша $N_1$ саны табылып, осы $N_1$ санынан артық барлық $n_0(n_0 > N_1)$ сандары үшін мына теңсіздік

$$\left|R_{n_0}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (27)$$

орындалуға тиіс. $n_0$ – турақты сан болсын.

Теореманың шарттары бойынша функциялар $s_n, (x), s(x)$ $x_0$ нүктесінде үздіксіз. Олай болса $\varepsilon$ санына сәйкес $\sigma$ саны табылып, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалының ішінде жатқан барлық $x$-тер үшін төмендегі теңсіздіктер

$$|s_n(x) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |s(x) - s(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (28)$$

орындалады. Жоғарыда жазылған (26) теңдіктен келесі теңсіздікке келеміз:

$$\left|R_{n_0}(x)\right| \leq |s(x) - s(x_0)| + \left|s_{n_0}(x) - s_{n_0}(x_0)\right| + \left|R_{n_0}(x_0)\right|$$

(27), (28) теңсіздіктерді еске алсақ, онда

$$\left|R_{n_0}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Осы кейінгі теңсіздіктен мынадай қорытындыға келеміз: қатардың барлық мүшелері оң болғандықтан, әрбір $x$ үшін қалдық мүшелер $R_1(x)$, $R_2(x), \cdots, R(x), \cdots$ кеміме тізбек құрады. Демек, $n_0$ санынан артық барлық $n$-дер $(n > n_0)$ үшін төмендегі теңсіздік

$$R_n(x) < \varepsilon$$

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ аймақтың барлық нүктелерінде орындалады. Олай болса, бұл аймақта қатар бірқалыпты жинақты. Ал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ аймағы – $(a, b)$ аралығының ішінде жатқан кез келген аймақ, ендеше зерттеліпіп отырған функциялық қатар $(a, b)$ аралығында бірқалыпты жинақты. Теорема дәлелденді.

**2.** Тағы да үздіксіз функциялардан құрылған (14) функциялық қатарды қарайық. Егер бұл қатар $(a, b)$ аралығында $s(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты болса, онда функция $s(x)$ айтылып отырған аралықтың әрбір $x_0$ нүктесінде үздіксіз болатындығын $\left[\text{яғни } \lim\limits_{x\to x_0} s(x) = s(x_0)\right]$ біз жоғарыда дәлелдедік.

Бұл арадан мынадай теорема келіп шығады:

**3-теорема.** *Егер (14) қатар* $(a, b)$ *аралығындағы үздіксіз функциялардан тұратын болса және осы аралықта ол бірқалыпты жинақты болса, онда*

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x),$$

*мұнда* $x_0$ – $(a, b)$ *аралығының ішінде жатқан нүкте.*

Бұл теореманың орнына келесі теореманы дәлелдеуге болады.

**4-теорема.** *Егер (14) қатар* $(a, b)$ *интервалында бірқалыпты жинақты болса және* $x$ *интервалдың ішінен* $a$*-ға ұмтылғанда әрбір функция* $u_n(x)$ *мына* $a_n$ *санына ұмтылса, яғни* $\lim\limits_{x\to \mathrm{a}} u_n(x) = a_n (n = 1, 2, \cdots)$ *болса, онда біріншіден сандық қатар*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

*жинақты болады, екіншіден*

$$\lim_{x\to a} s(x) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ немесе бәрібір}$$

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} u_n(x).$$

Теореманың шарттары бойынша (14) қатар $(a, b)$ аралығында бірқалыпты жинақты. Сондықтан бұл қатар үшін Коши критерийі орындалады, яғни еркімізше сайлап алған оң $\varepsilon$ саны бойынша $N = N_1(\varepsilon)$ саны табылып, осы $N_1$ санынан артық $n$ сандарынан $(n > N_1)$ бастап $p$ санына қандай болса да төмендегі теңсіздік.

$$\left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon \qquad (29)$$

$(a, b)$ интервалының барлық нүктелері үшін орындалады. $n$ мен $p$-ні тұрақты деп қарап $x$-ті $a$-ға ұмтылып (29) теңсіздіктен шек алсақ, онда $N_1$ санынан артық $n$-дер $(n > N_1)$ үшін мына теңсіздік орындалады

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

Осы кейінгі теңсіздіктің орындалуы мына

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сандық қатардың жинақтылығын дәлелдейді. Осы сандық қатардың қосындысын $A$ арқылы, ал дербес қосындысын $A_n$ арқылы белгілейік. Бұл қатар жинақты болғандықтан $\varepsilon$ саны бойынша $N_0 = N_0(\varepsilon)$ саны табылып, осы $N_0$ санынан артық $n$ номерден бастап төмендегі теңсіздік орындалады:

$$|A - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (30)$$

Теореманың шарттары бойынша (14) функциялық қатар бірқалыпты жинақты. Сондықтан $N_0$ санынан артық барлық $n$-дер $(n > N_0)$ үшін мына теңсіздік

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (31)$$

$(a, b)$ интервалының барлық нүктелерінде орындалады.

$m$ – мына $N_0$ санынан үлкен тұрақты оң бүтін сан болсын. Келесі теңбе-теңдікті құрайық:

$$s(x) - A = s_m(x) + R_m(x) - A_m - A + Am,$$

бұл арадан

$$|s(x) - A| = |s_m(x) + A_m| + |A_m - A| + |R_m(x)|. \quad (32)$$

Теореманын шарттары бойынша, алдынала берілген оң $\varepsilon$ санына сәйкес $\delta$ саны табылып, мына $(o, a + \delta)$ интервалдың ішінде жатқан барлық $x$-тер үшін төмендегі теңсіздік

$$|s_m(x) - A_m| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{33}$$

орындалады. (30), (31), (33) теңсіздіктерді еске алсақ, онда (32) теңсіздік $(o, a + \delta)$ интервалының ішінде жатқан барлық $x$-тер үшін мына түрге көшеді:

$$s(x) - A < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \text{ яғни } \lim_{x \to a} s(x) = A.$$

Сонымен, теорема дәлелденді.

Осы дәлелденген теореманы қатар таңбасы ішінде шекке көшу теоремасы деп атайды.

## §6. Функциялық қатарды мүшелеп дифференциалдау

$(a, b)$ аралығында жинақты төмендегі функциялық қатарды қарайық:

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) \cdots \tag{14}$$

Бұл қатардың әрбір мүшесі $[a, b]$ аралығында дифференциалданатын болсын. (14) қатармен бірге оның мүшелері туындыларынан тұратын келесі функциялық қатарды қарайық:

$$u'_1(x) + u'_2(x) + \cdots + u'_n(x) + \cdots \tag{34}$$

Бұл параграфта біздің талдайтын мәселеміз (14) қатармен (34) қатардың арасындағы байланыстылық.

(14) қатардың қосындысын $s(x)$ арқылы, ал дербес қосындысын $s_n(x)$ арқылы белгілейік.

Егер (14) қатардың қосындысынан алынған туынды $s'(x)$ (34) қатардың қосындысына тең болса, онда (14) қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады дейміз.

Функциялық қатардың барлық мүшелері сәйкес аралықта дифференциалданатын функциялар болғанымен, бірақ оның қосындысы ешбір нүктеде дифференциалданатын функция болмауы мүмкін. Мәселен мына функциялық қатар

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \times \cos(a^n \pi x)$$

(мұнда $a$ – бүтін тақ сан, $0 < b < 1, ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$) үздіксіз және дифференциалданатын функциялардан тұратын бірқалыпты жинақты қатар. Солай болсадағы, бұл қатардың қосындысы дифференциалданатын функция болып табылмайды.

Айталып отырған мысалдан біз мынаны байқаймыз:
функция үздіксіз болғанымен, бірақ туындысы болмай қалуы мүмкін.

(14) қатардың бірқалыпты жинақтылығы (34) қатардың жинақтылығын қамтамасыз ете алмайды. (34) қатар жинақты болғанымен, оның қосындысы (14) қатардың қосындысынан алынған туындыға тең болмай қалуы мүмкін. Егер (34) қатар бірқалыпты жинақты болса, онда (14) қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады. Осы кейінгі айтылған сөйлемді теорема ретінде былай тұжырымдаймыз:

**1-теорема**. *Егер* $(a, b)$ *аралығында дифферанциалданатын функциялардан құрылған (14) қатар осы аралықтың ең болмағанда бір нүктесінде жинақты болса және егер (34) қатар* $(a, b)$ *аралығында бірқалыпты жинақты болса, онда (14) қатардың өзі* $(a, b)$ *аралығында бірқалыпты жинақты болады және оның қосындысы дифференциалданатын функция болады, онымен бірге бұл қосындыдан алынған туынды (34) қатардың қосындысына тең, яғни*

$$[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)]' + \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

c $-$ $(a, b)$ аралығының теоремада айтылған (14) қатар жинақты болатын нүктесі болсын. Мына

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} [u_i(x) - u_i(c)]$$

қосындыны алайық та, осы қосындыдағы айырмаға шектеулі өсімше жөніндегі Лагранж теоремасын қолданайық. Сонда

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} [u_i(x) - u_i(c)] = (x - c) \sum_{i=n+1}^{n+p} u'i(\xi) \qquad (35)$$

мұнда $\xi - x$ пен $c$-нің арасында жатқан сан, яғни $x < \xi < c$.

Теореманың шарттары бойынша (34) қатар $(a, b)$ аралығында бірқалыпты жинақты. Сондықтан Коши критерийі бойынша еркімізше сайлап алған оң $\varepsilon$ санына сәйкес $N = N(\varepsilon)$ саны табылып, осы $N$ санынан артық $n$ номерден $(n > N)$ бастап $p$ қандай болса да келесі теңсіздік

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}[u'_i(x)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (36)$$

$(a, b)$ аралығының барлық нүктелері үшін орындалады. Онда (35) теңдік келесі теңсіздікке айналады:

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}[u_i(x) - u_i(c)]\right| < \frac{x-c}{b-a}\varepsilon < \varepsilon.$$

Осы кейінгі теңсіздіктің орындалуы мына

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x) - u_n(c)]$$

функциялық қатардың $(a, b)$ аралығында бірқалыпты жинақты екенін көрсетеді. Теореманың шарттары бойынша сандық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(c)$$

жинақты.

Ендеше функциялық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),$$

$(a, b)$ аралығында бірқалыпты жинақты.

Сонымен, (14) қатардың $(a, b)$ аралығында бірқалыпты жинақтылығы дәлелденді.

$x_0 - (a, b)$ аралығының кез келген нүктесі болсын. Аргумент $x$-ке $x_0$ нүктесінде $h$ өсімшені берейік, бұл өсімшенің аздығы соншама, нүкте $x_0 + h, (a, b)$ аралығының ішінде жатады. Сонда

$$s\,\frac{(x_0 + h) - s(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x_0 + h) - u_n(x_0)]. \qquad (37)$$

Енді (37) теңдіктің оң жағында тұрған қатардың $h$ бойынша бірқалыпты жинақтылығын дәлелдейік. Ол үшін мына

$$\frac{1}{h}\sum_{i=n+1}^{n+p}[u_i(x_0+h)-u_i(x_0)]$$

қосындыны алып, оның ішіндегі айырмаға тағы да Лагранж теоремасын қолданайық. Сонда

$$\left|\frac{1}{h}\sum_{i=n+1}^{n+p}[u_i(x_0+h)-u_i(x_0)]\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p}u'i(\xi_0)\right|.$$

мұнда $x_0 < \xi_0, < x_0 + h$.

Егер (36) теңсіздікті еске алсақ, онда

$$\left|\frac{1}{h}\sum_{i=n+1}^{n+p}[u_i(x_0+h)-u_i(x_0)]\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} < \varepsilon.$$

Осы кейінгі теңсіздіктің орындалуы (37) теңдіктің оң жағында тұрған қатардың мына $a - x_0 < h < 0, 0 < h < b - x_0$ интервалдарда бірқалыпты жинақтылығын көрсетеді. Ендеше $h$-ты нольге ұмтылтып (37) теңдіктің екі жағынан шек аламыз (мұнда бірқалыпты жинақты қатардың таңбасы ішінде шекке көшуге болады деген теореманы пайдаланамыз). Сонда

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(x_0+h)-s(x_0)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x_0+h)-u_n(x_0)}{h}$$

немесе бұл

$$s'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty}u'_n\,(x_0).$$

$x_0 - (a, b)$ аралығының кез келген нүктесі, олай болса бұл теңдік $-(a, b)$ аралығының барлық нүктесі үшін орындалады, яғни

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}u'n\,(x_0).$$

Теорема дәлелденді.

**2-теорема.** Егер $(a, b)$ аралығында дифференциалданатын функциялардан тұратын тізбек

$$f_1(x), f_2(x), \cdots f_n(x), \cdots \qquad (38)$$

осы аралықтың ең болмағанда бір нүктесінде жинақты болса және егер (38) тізбектің мүшелерінен алынған туындылардан тұратын тізбек

$$f'_1(x), f'_2(x), \cdots f'_n(x), \cdots \qquad (39)$$

$(a, b)$ аралығында бірқалыпты жинақты болса, онда (38) тізбек бұл аралықта бірқалыпты жинақты болады және оның шектік функциясы дифференциалданатын функция болады, яғни

$$[\lim_{n\to\infty} fn(x)]' = \lim_{n\to\infty} f'n(x).$$

Бір мысал келтірейік:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Егер $x > 1$ болса, онда бұл қатардың жинақтылығы бізге белгілі. Егер $x \geq 1 + \delta$ болса, (мұнда $\delta > 0$), онда қаралып отырған қатар бірқалыпты жинақты, өйткені $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\sigma}}$ ал сандық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+x}}$$

жинақты. Сонымен, егер, $x > 1$ болса, онда функциялық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

бір үздіксіз $\xi(x)$ функцияға жинақты болады. Бұл функцияны *Риман функциясы* деп атайды. Енді осы қатарды мүшелеп дифференциалдауға болатынын дәлелдейік ($x > 1$ деп ұйғараймыз). Талқыға түсіп отырған қатарды дифференциалдап табамыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_n n}{n^x}.$$

Енді $x \geq 1 + \delta$ (мұнда $\delta > 0$) болғанда осы кейінгі қатардың бірқалыпты жинақтылығын дәлелдесек болғаны. Мына шекті:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_n n}{n^\alpha}$$

(мұнда $\alpha > 0$) табайық. Ол үшін Лопиталь ережесін қолданамыз. Сонда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{l_n n}{n^{\alpha}}=\lim\frac{1}{\alpha n^{\alpha}}$$

Сондықтан.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{l_n n}{\frac{\delta}{n^2}}=0.$$

Сөйтіп, шектің анықтамасы бойынша $N$-нен артық $n$-нен $(n > N)$ бастап $\frac{l_n n}{\frac{\delta}{n^2}} < 1$ болады. Енді $(n > N)$ және $(x \geq 1+\delta)$ болсын, онда

$$\left|\frac{l_n n}{n^x}\right| \leq \frac{1}{n^1+{}^{\delta}/_{2}}\cdot\frac{l_n n}{n\,{}^{\delta}/_{2}} < \frac{1}{n1+{}^{\delta}/_{2}}.$$

Ал сандық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n1+\frac{\delta}{2}}$$

жинақты, олай болса мына теңсіздікті $x \geq 1+\delta$ қанағаттандыратын барлық $x$-тер үшін функциялық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l_n n}{n^x}$$

бірқалыпты жинақты. Сондықтан да

$$\dot{\varsigma}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l_n n}{n^x}$$

жоғарыда дәлелденген 1-теорема бойынша мына

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n^x}$$

функциялық қатарды мүшелеп дифференциалдауға болатын болды.

## § 7. Функциялық қатарды мүшелеп интегралдау

Барлық мүшелері $(a, b)$ аралығында интегралданатын функциялардан тұратын келесі функциялық қатарды қарайық:

$$u'_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{14}$$

Мұнымен бірге тағы да мына қатарды қарайық:

$$\int_a^x u_1(x)dx + \int_a^x u_2(x)\,dx + \dots + \int_a^x u_n(x)dx + \cdots \qquad (40)$$

Бұл параграфтағы негізгі мақсат – (14) қатармен (40) қатардың арасындағы байланысты зерттеу. Бұл зерттеудегі шешетін негізгі мәселелер мыналар: қандай шарттар орындалғанда (14) қатардың қосындысы $S(x), (a,b)$ аралығында интегралданатын функция болады? Қандай шарттар орындалғанда (40) қатар $(a,b)$ аралығында жинақты болады? Егер (40) қатардың қосындысын $F(x)$ арқылы белгілесек, онда қандай шарттар орындалғанда мына теңдік

$$F(x) = \int_a^x S(x)dx$$

орын алады? Егер осы кейінгі теңдік $(a,b)$ аралығының барлық нүктелерінде орындалса, онда (14) функциялық қатарды мүшелеп интегралдауға болады дейміз.

Жоғарыда қойылған сұрақтарға төмендегі теорема жауап береді.

**1-теорема.** *Егер* $(a,b)$ *аралығында интегралданатын функциялардан тұратын (14) қатар осы аралықта* $S(x)$ *функцияға бірқалыпты жинақты болса, онда* $S(x)$, $(a,b)$ *аралығында интегралданатын функция болады және (40) қатар айтылып отырған аралықта бірқалыпты жинақты болып оның қосындысы*

$$F(x) = \int_a^x S(x)dx,$$

*яғни*

$$\int_a^x [\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)]\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(x)dx.$$

(14) қатардың дербес қосындысын $S_n(x)$, арқылы, ал (40) қатардың қосындысын $\sigma_n(x)$, арқылы белгілейік. Сонда $S_n(x)$, – саны шектеулі интегралданатын функциялардан тұратын болғандықтан, ол $(a,b)$ аралығында интегралданатын функция болады және

$$\int_a^x S_n(x)dx = \int_a^x u_1(x)dx + \int_a^x u_2(x)dx + \cdots + \qquad (41)$$

$$+ \int_a^x u_n(x)dx = \delta_n(x).$$

Біз ең алдымен мына

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

$(a, b)$ аралығында интегралданатын функция екенін дәлелдеуіміз керек.

Теореманың шарттары бойынша (14) қатар $(a, b)$ аралығында $S(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты. Сондықтан, еркімізше сайлап алған оң $\varepsilon$ санына сәйкес тек соған ғана тәуелді $N = N(\varepsilon)$ саны табылып, осы $N$-нен артық $n$-дерден $(n > N)$ бастап келесі теңсіздік

$$|s(x) - s_n(x)| = \left|R_n(x) < \tfrac{\varepsilon}{4(b-a)}\right| \qquad (42)$$

$(a,$в) аралығының барлық нүктелері үшін орындалады.

Берілген оң $\varepsilon$ саны бойынша $\delta$ санын сайлап алып $(a, b)$ аралығын төмендегі тәртіппен ораласқан $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b)$ нүктелермен $m$ бөлшек сегменттерге бөлейік және әрбір бөлшек сегменттің ұзындығы $\delta$-дан аспайтын болсын. Егер әрбір бөлшек $[x_i, x_{i+1}]$ сегменттегі $S_n(x)$ функцияның тербелісін $\omega'_i$ арқылы белгілесек, онда бұл функция $(a, b)$ аралығында интегралданатын болғандықтан төмендегі теңсіздік

$$\sum_{i=1}^{m} \omega'_i(x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (43)$$

орындалады.

Егер әрбір бөлшек $[x_i, x_{i+1}]$ сегменттегі $R_n(x)$ функцияның тербелісін $\omega''_i$ арқылы, $S(x)$ функцияның тербелесін $\omega_i$ арқылы белгілесек, онда $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$ болғандықтан $\omega_i \leq \omega_i + \omega''_i (i = 1,2, \cdots, m)$. Енді осы кейінгі теңсіздіктің екі жағын $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$-ге көбейтіп, сонан кейін $i$-ге 1-ден $m$-ге дейін мәндер беріп қосындылайық. Сонда

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \omega'_i(x_{i+1} - x_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \omega_i''(x_{i+1} - x_i) \qquad (44)$$

(42) теңсіздік бойынша $\omega_i'' < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Енді осы кейінгі теңсіздікті және (43) теңсіздікті еске алсақ, сонда:

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i(x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{m} (x_{i+1} - x_i)$$

немесе

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i(x_{i+1} - x_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Бұл кейінгі теңсіздіктің орындалуы, $S(x)$ функцияның $(a, b)$ аралығында интегралданатынын дәлелдейді (біз мұны анықталған интегралдар теориясына арналған тараудан білуіміз керек).

Екінші жағынан

$$\left|\int_a^x S(x)dx - b_n(x)\right| = \left|\int_a^x S(x)dx - \int_a^a S_n(x)dx\right| <$$

$$\leq \int_a^x |S(x) - S_n(x)|dx.$$

Егер (42 теңсіздікті еске алсақ, онда)

$$\left|\int_a^x S(x)dx - \sigma_n(x)\right| < \frac{\varepsilon(x-a)}{4(b-a)} < \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon. \qquad (45)$$

Бұл теңсіздіктің орындалуы (40) қатардың $(a, b)$ аралығында бірқалыпты жинақтылығын көрсетеді. (45) теңсіздік келесі теңдікпен

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \int_a^x S(x)dx \qquad (46)$$

пара-пар. Немесе (46) теңдіктің орнына мына теңдікті алуға болады:

$$\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)d\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(x)dx.$$

Сонымен теорема дәлелденді.

**2-теорема.** *Егер* $(a, b)$ *аралығында интегралданатын функциялардан құрылған тізбек*

$$f_1(x), f_2(x), \cdots f_n(x), \cdots \tag{47}$$

*осы аралықта* $f(x)$ *функцияға бірқалыпты жинақты болса, онда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(x)\, dx = \int_a^x f(x)dx = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Бұл теореманы интеграл таңбасы ішінде шекке көшу теоремасы деп атайды.

(47) тізбектің $(a, b)$ аралығында бірқалыпты жинақтылығы мына екі интегралдың

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx, \quad \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

бір-біріне тең болуына жеткілікті шарт болғанымен, бірақ ол үшін қажетті шарт бола алмайды.

## XV ТАРАУ
## ДӘРЕЖЕЛІК ҚАТАР

### §1. Абель теоремалары. Дәрежелік қатардың жинақтылық интервалы

1. Функциялық қатарлардың ішіндегі толық зерттелгені және тәжірибелік мәселелерде көп кездесетіні дәрежелік қатарлар.

Дәрежелік қатар деп төмендегі функциялық қатарды:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

айтады. Егер $a = 0$ болса, онда бұл қатар мына түрге көшеді:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \tag{1}$$

Біздің талдайтынымыз осы қатар болады. Бұл қатардағы $a_0, a_1, a_2 \cdots + a_n$ – тұрақты сандар, оларды дәрежелік қатардың коэффициенттері дейді.

(1) дәрежелік қатар $x = 0$ нүктесінде әрқашанда жинақты, сондықтан нольден айрықша нүктелерді қараймыз.

**Абельдің бірінші теоремасы.** *Егер (1) дәрежелік қатар* $x_0$ *нүктесінде жинақты болса, онда ол абсолют шамасы* $x_0$*-дің абсолют шамасынан кіші барлық* $x$*-тер үшін, яғни мына* $|x| < |x_0|$ *теңсіздікті қанағаттандыратын барлық* $x$*-тер үшін абсолют жинақты болады.*

Теореманың шарттары бойынша төмендегі сандық қатар

$$a_0 + a_1x_0 + a_2{x_0}^2 + \cdots + a_n{x_0}^n + \cdots$$

жинақты. Бұл қатар жинақты болғандықтан $n$ шексіз өскен сайын оның жалпы мүшесі нольге ұмтылады. Олай болса бір тұрақты оң $M$ саны табылып мына теңсіздік

$$|a_n{x_0}^n| < M \quad (n = 0,1,2,\cdots) \tag{2}$$

орындалады.

Енді (1) дәрежелік қатарды абсолют шамасы $x_0$-дің абсолют шамасынан кіші $x$-тер үшін қарайық:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \tag{3}$$

Сонымен, (3) қатардағы $x$-тер мына теңсіздікті $|x| < |x_0|$ қанағаттандырады деп есептейміз. Онда $\frac{x}{x_0} = q < 1$ және

$$|a_nx^n| = |a_n||x^n| = |a_n||x_0|^n \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

(2) теңсіздікті еске алсақ, онда

$$|a_nx^n| < M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = Mq^n. \tag{4}$$

$$(n = 0,1,2 \cdots).$$

Мүшелері оң келесі сандық қатарды қарайық:

$$M + Mq + Mq^2 + \cdots + Mq^n + \cdots,$$

бұл қатар кеміме геометриялық прогрессия. Сондықтан, ол жинақты. Енді (4) теңсіздіктерге көңіл жіберіп, мынадай қорытындыға келеміз: (3) қатардың әрбір мүшесі өзінің абсолют шамасы бойынша жинақты қатардың сәйкес мүшесінен кіші. Ендеше (3) дәрежелік қатар абсолют жинақты. Теорема дәлелденді.

**Абельдің екінші теоремасы.** *Егер (1) дәрежелік қатар* $x = x_0$ *нүктесінде жинақсыз болса, онда ол абсолют шамасы* $x_0$*-дің абсолют шамасынан артық барлық* $x$*-тер үшін, яғни мына* $|x| > |x_0|$ *теңсіздікті қанағаттандыратын барлық* $x$*-тер үшін жинақсыз болады.*

Бұл теореманың шарттары бойынша мына

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

сандық қатар жинақсыз. Сондықтан, мына $|x| > |x_0|$ теңсіздікті қанағаттандыратын $x$-тер үшін келесі

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

дәрежелік қатарды жинақты болады деп айтуға болмайды, өйткені егер бұл қатар жинақты болса, онда жоғарыдағы дәлелденген теорема бойынша мына

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сандық қатар жинақты болады, ал бұл қатардың жинақты болуы теореманың шарттарына қайшы келеді.

Сонымен, бұл теорема да дәлелденді.

2. Жоғарыдағы дәлелденген екі теорема (1) дәрежелік қатардың жинақтылық облысын анықтауға мүмкіндік береді.

**Теорема.** *Егер (1) дәрежелік қатар* $x$*-тің кейбір мәндері үшін жинақты, ал кейбір мәндері үшін жинақсыз болса, онда бір тиянақты R саны табылып, абсолют шамасы осы R санынан кіші* $x$*-тер үшін (1) қатар абсолют жинақты болады да, ал абсолют шамасы R-ден артық* $x$*-тер үшін жинақсыз болады.*

Айталық (1) дәрежелік қатар $x = x_0$ нүктесінде жинақты болсын да ал $x = x'_0$ нүктесінде жинақсыз болсын. Онда мына теңсіздікті қанағаттандыратын $x_1$ нүктесінде Абельдің бірінші теоремасы бойынша (1) дәрежелік қатар абсолют жинақты болады, ал мына $x_1' > |x\,_0'|$ теңсіздікті қанағаттандыратын $x'_1$ нүктесінде (1) дәрежелік қатар жинақсыз болады. Енді сол ұшы $x_1$-ге, оң ұшы $x'_1$-қа тең $[x_1, x'\,_1]$ сегментті алайық, бұл сегменттің сол ұшында (1) дәрежелік қатар абсолют жинақты да, ал оның оң ұшында жинақсыз $x_1, x'\,_1$ сегментті қақ бөлейік. Сонда оның $\frac{x_1+x_1{}'}{2}$

ортасында (1) дәрежелік қатар не жинақты, не жинақсыз. Егер бұл нүктеде (1) дәрежелік қатар жинақты болса, онда $[x_1, x'_1]$ сегменттің оң жақ жартысын аламыз және оны былай белгілейміз. $[x_2, x'_2]$ бұнда $x_2 = \frac{x_1+x_1{}'}{2}$, $x'_2 = x'_1$. Егер $\frac{x_1+x_1}{2}$ нүктеде (1) дәрежелік қатар жинақсыз болса, онда $[x_1, x'_1]$ сегменттің сол жақ жартысын аламыз және оны былай белгілейміз: $[x_2, x'_2]$ мұнда $x_2 = x_1, x_2{}' = \frac{x_1+x_1{}'}{2}$.

Сонымен, $[x_2, x'_2]$ сегменттің сол жақ ұшында (1) қатар жинақты да, оң жақ ұшында жинақсыз. Енді осы $[x_2, x'_2]$ сегментті қақ бөліп, жаңағы сияқты сегментті табамыз. Бұл сегменттің де сол жақ ұшында (1) қатар жинақты болады да, оң ұшында жинақсыз болады.

Міне осы процесті шексіздікке дейін созып, төмендегі сегменттер

$$[x_1, x'_1], [x_2, x'_2], [x_3, x'_3], \cdots, [x_n, x'_n], \cdots$$

тізбегін табамыз. Бұл сегменттердің сол жақ ұштарында (1) қатар жинақты да, оң ұштарында жинақсыз және олардың ұзындықтары $x'_n - x_n = \frac{x_1{}'+x_1}{2^n} \to 0, n$ шексіздікке ұмтылғанда $(n \to \infty)$. Ендеше Кантор аксиомасы бойынша осы сегменттердің барлығына бірдей ортақ жалғыз ортақ жалғыз ғана $R$ нүктесі болады:
$x_n \leq R \leq \ x'_n$, және мұнда былай:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = R.$$

Енді бізге осы $R$ санынан абсолют шамасы кіші $x$-тер үшін (1) қатардың абсолют жинақтылығын, ал $R$-ден абсолют шамасы артық $x$-тер үшін оның жинақсыздығын дәлелдеу керек.

Айталық $|x| < R$ болсын. Егер $n$-ді аса үлкен етіп алсақ, онда барлық $x_n$-дер $|x|$ пен $R$-дің арасында жатады, яғни $|x| < x_n < R$

Ал $x_n$ нүктесінде (1) қатар абсолют жинақты. Ендеше Абельдің бірінші теоремасы бойынша мына $|x| < x_n$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x$-тер үшін (1) дәрежелік қатар абсолют жинақты болады.

Енді $R$ санынан абсолют шамасы артық $\bar{x}$ нүктелерді карайық, яғни $|\bar{x}| > R$. Егер $n$-ді аса үлкен етіп алсақ, онда барлық $x'_n$сандар мына $|\bar{x}|$саннан гөрі $R$-ге жақын болады, былайша айтқанда $|\bar{x}| > \bar{x}'_m$ болады. Ал $x'_m$нүктесінде (1) қатар жинақсыз.

Ендеше Абельдін екінші теоремасы бойынша мына $|\bar{x}| > |x_m|$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x$-тер үшін (1)қатар жинақсыз болады.

Сонымен, теорема дәлелденді.

Осы $R$ санын (1)дәрежелік қатардың *жинақтылық радиусы* дейді. Ал $(-R, R)$ интервалды (1) дәрежелік қатардың *жинақтылық интервалы* дейді. Бұл интервалдың ішінде жатқан барлық нүктелерде (1) дәрежелік қатар абсолют жинақты, ал сыртында жатқан нүктелерде жинақсыз. Айтылып отырған интервалдың ұштарында (1) қатар жинақты болуы да, болмауы да мүмкін.

## § 2. Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусын табу жолы

Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусын табу жөнінде Коши – Адамдар теоремасы деп аталатын келесі теореманы дәлелдейміз.

**Теорема.** *Егер (1) дәрежелік қатардың коэффициенттері үшін мына жоғарғы шек*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \omega$$

*бар болатын болса, онда оның жинақтылық радиусы* $R = \frac{1}{\omega}$.

Теореманың шарты бойынша төмендегі

$$a_1, \sqrt{|a_2|}, \sqrt[3]{|a_3|}, \cdots, \sqrt[n]{|a_n|}, \cdots$$

тізбектің жоғарғы шегі бар және тең $\omega$. Енді $\frac{1}{\omega}$ дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы болатындығын дәлелдеу үшін, осы саннан абсолют шамасы кіші барлық $x$-терде, яғни мына $|x| < \frac{1}{\omega}$теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x$-тер үшін (1) дәрежелік қатардың абсолют жинақтылығын, ал мына $|x| > \frac{1}{\omega}$ теңсіздікті қанағаттандыратын $x$-тер оның жинақсыздығын дәлелдеу керек.

Сөйтіп, әуелі $x$-тер мына$|x| < \frac{1}{\omega}$ теңсіздікті қанағаттандырсын, онда келесі теңдік

$$|x| < \frac{1}{\omega + \delta} \tag{5}$$

орындалатындай етіп оң $\delta$ санын сайлап алуға болады. Жоғарғы шектің қасиеті бойынша ноль мен $\delta$-ның арасында жатқан $\delta_1$ саны қандай болса да $(o < \delta_1 < \delta)$ оған сәйкес $N_1 = N_1(\delta)$ саны табылып, осы $N_1$саңынан артық барлық $n$-дер $(n > N_1)$ үшін төмендегі теңсіздік

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \omega + \delta_1 \text{немесе} |a_n| < (\omega + \delta_1)^n \qquad (6)$$

орындалуға тиіс.

(5) теңдік (6) теңсіздік бойынша $N_1$санынан артық барлық $n$-дер $(n > N_1)$үшін келесі теңсіздік

$$|a_n x^n| < \left(\frac{\omega+\delta_1}{\omega+\delta}\right)^n \text{шығады.}$$

Осы кейінгі теңсіздіктен біз мынадай қорытындыға келеміз: зерттеліну отырған (1) дәрежелік қатар мүшелерінің абсолют шамалары бір орыннан бастап төмендегі жинақты

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega + \delta_1}{\omega + \delta}\right)^n$$

геометриялық прогрессияның сәйкес мүшесінен кіші болатын болды. Ендеше мына $|x| < \frac{1}{\omega}$ теңсіздікті қанағаттандыратын $x$-тер үшін (1) дәрежелік қатар абсолют жинақты болады.

Енді $x$-тер мына$|x| > \frac{1}{\omega}$ теңсіздікті қанағаттандырсын. Онда келесі теңдік

$$|x| < \frac{1}{\omega-\delta} \qquad (7)$$

орындалатындай етіп оң санын сайлап алуға болады. Тағы да ноль мен $\delta$-ның арасында жатқан $\delta_1$ санын $(0 < \delta_1 < \delta)$ алайық. Сонда жоғарғы шектің қасиеті бойынша санының соншама үлкен мәндері үшін келесі теңсіздік орындалады:

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \omega + \delta_1 \text{немесе} |a_n| > (\omega - \delta_1)^n \qquad (8)$$

(7) теңдікке және (8) теңсіздікке сүйеніп табамыз:

$$|a_n x^n| > \left(\frac{\omega-\delta_1}{\omega-\delta}\right)^n, \qquad (9)$$

ал $\frac{\omega-\delta_1}{\omega-\delta} > 1$. Сондықтан, $n$ саны аса үлкен болса дәреже $\left(\frac{\omega-\delta_1}{\omega-\delta}\right)^n$соншама үлкен болады.

Олай болса (9) теңсіздіктен мынадай қорытындыға келеміз:

мына $|x| > \frac{1}{\omega}$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x$-тер үшін (1) дәрежелік қатар жинақсыз.

Мысал үшін мына қатарды қарайық:

$$1 + 2x + 2^2x^2 + \cdots + 2^n x^n + \cdots,$$

мұнда $a_n = 2^n$. Олай болса $lim\sqrt[n]{|a_n|} = lim\sqrt[n]{2^n} = 2 = \omega$. Ендеше $R = \frac{1}{2}$. Сонымен, мысалға алынып отырған қатардың жинақтылық интервалы $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ болады.

Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусын табу үшін Даламбер белгісін де пайдалануға болады. Даламер белгісі бойынша (1) қатар абсолют жинақты болу үшін $lim\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}$ бірден кіші болу керек, яғни

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} < 1.$$

Бұл арадан

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n\pm1}}{a_n}} = \frac{1}{L},$$

мұнда

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Сонымен, мына $|x| < \frac{1}{L}$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x$-тер үшін (1) дәрежелік қатар абсолют жинақты болады да, ал мына $|x| < \frac{1}{L}$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x$-тер үшін (1) қатар жинақсыз болады. Ендеше (1) дәрежелік қатардың жинақтылық интервалы: $(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L})$ болады.

Мысал үшін мына қатарларды қарайық:

$$a)\ \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$a_{n+1} = (-1)^n\frac{1}{n+1}, a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Сондықтан

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

Мысалға алынып отырған қатардың жинақтылық интервалы (-1,1) болады.

б) $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$

мұнда $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}, a_n=\frac{1}{n!}$ сондықтан

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=0.$$

Екінші мысалға алынып отырған қатардың жинақтылық интервалы $(-\infty,\infty)$ болады.

## § 3. Дәрежелік қатардың бірқалыпты жинақтылығы және онымен кескінделетін функциялардың үздіксіздігі

Дәрежелік қатардың бірқалыпты жинақтылығы жөнінде келесі теореманы дәлелдеуге болады.

**1-теорема.** *Жинақтылық интервалының ішінде жатқан әрбір $[-p,p]$ сегментте дәрежелік қатар бірқалыпты жинақты болады.*

$[-p,p]$ – мына $[-R,R]$ жинақтылық интервалының ішінде жатқан сегмент. Сондықтан $p<R$. Олай болса (1) дәрежелік қатар $x=p$ нүктесінде абсолют жинақты болады, яғни мүшелері оң келесі қатар

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|p^n=|a_0|+|a_1|p+|a_2|p^2+\cdots+|a_n|p^n+\cdots \quad (10)$$

жинақты.

Енді (1) дәрежелік қатарды $[-p,p]$ сегменттің бойында жатқан $x$-тер үшін, былайша айтқанда мына $|x|\le p$ теңсіздікті қанағаттандыратын $x$-тер үшін қарайық.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n. \quad (11)$$

Сонымен, (11) қатардағы $x$-тің абсолют шамасы $p$-дан аспайды, яғни мына теңсіздікті $|x|\le p$ қанағаттандырады деп есептейміз. Сонда

$$|a_nx^n|\le|a_n|p^n. \quad (12)$$

(12) теңсіздіктен мынадай қорытындыға келеміз: (11) функциялық қатардың әрбір мүшесі өзінің абсолют шамасы бойынша мүшелері оң жинақты (10) қатардың мүшелерінен кем болатын болды, ендеше Вейерштрасс белгісі бойынша (11) қатар бірқалыпты жинақты. Теорема дәлелденді.

**2-теорема**. *Жинақтылық интервалының ішінде жатқан әрбір* $[-p, p]$ *сегментте дәрежелік қатардың қосындысы үздіксіз функция болады.*

Жаңағы дәлелденген теорема бойынша $[-p, p]$ сегментте (1) дәрежелік қатар бірқалыпты жинақты, ал оның мүшелерінің барлығы бұл сегментте үздіксіз функциялар. Ендеше функциялық қатар қосындысының үздіксіздігі туралы теорема бойынша (1) дәрежелік қатардың қосындысы $[-p, p]$ сегментте үздіксіз функция болады. Сонымен, бұл теорема да дәлелденді.

**3-теорема.** *Егер (1) дәрежелік қатар өзінің жинақтылық интервалының* $x = R$ *ұшында жинақсыз болса, онда ол* $[0, R]$ *аралығында бірқалыпты жинақты бола алмайды.*

Шынында, егер (1) қатар $[0, R]$ аралығында бірқалыпты жинақты болса, онда функциялық қатар таңбасы ішінде шекке көшу турасындағы теореманы пайдаланып келесі жинақты сандық қатарға

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

келген болар едік. Бұл жағдай теореманың шартына қайшы келеді.

**4-теорема.** Егер (4) дәрежелік қатар $x = R$ нүктесінде жинақты болса (абсолют немесе шартты бәрібір), онда ол $[-R, R]$ сегментінде бірқалыпты жинақты болады.

(1) дәрежелік қатарды мына түрде жазайық:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right) (\text{мұнда } 0 \leq x \leq R). \qquad (13)$$

Мына $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ – көбейткіштер кеміме тізбек құрады:

$$1 \geq \frac{x}{R} \geq \left(\frac{x}{R}\right)^2 \geq \cdots \geq \left(\frac{x}{R}\right)^n \geq \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \geq \cdots$$

Теореманың шарты бойынша сандық қатар

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

жинақты. Ендеше Абель белгісі бойынша (13) қатар бірқалыпты жинақты.

**5-теорема. (Абель теоремасы).** *Егер (1) дәрежелік қатар $x = R$ нүктесінде жинақты болса, онда оның қосындысы осы $x = R$ нүктесінде үздіксіз болады.*

Мұның алдындағы теорема бойынша (1) дәрежелік қатар $[o, R]$ сегментінде бірқалыпты жинақты болады. Олай болса, бұл қатарға функциялық қатар таңбасы ішінде шекке көшу теоремасын қолдануға болады. Сонда

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Осы кейінгі теңдік теореманы дәлелдейді.

## §4. Дәрежелік қатарды дифференциалдау және интегралдау

**1.** Дәрежелік қатарды дифференциалдау жөнінде келесі теорема орын алады.

**1-теорема.** *Егер төмендегі*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

*дәрежелік қатардың жинақтылық интервалы $(-R, R)$ болса, ал қосындысы $F(x)$ болса, онда бұл қатарды мүшелеп дифференциалдаудан шыққан келесі қатардың*

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots \tag{13}$$

*жинақтылық интервалы да $(-R, R)$ болады, ал қосындысы $F'(x)$ болады.*

Бұл теореманы дәлелдеу үшін алдымен (13) қатардың $(-R, R)$ интервалдың ішінде жатқан $[-\rho, \rho]$ сегментінде бірқалыпты жинақтылығын дәлелдеу керек.

Егер $x_0$ – мына $\rho$ мен $R$-дің арасында жатқан сан болса (яғни $\rho < x_0 < R$), онда (1) қатар бұл нүктеде жинақты болады және

$$\lim_{n \to \infty} a_n x_0^n = 0.$$

Сондықтан бір оң $M$ саны табылып, келесі теңсіздік

$$|a_n {x_0}^n| < M \ (n = 1,2,\cdots)$$

орындалады.

Егер $|x| \leq \rho$ болса, онда

$$|na_n x^{n-1}| \leq |\, na_n \rho^{n-1}| = n|a_n {x_0}^{n-1}| \left(\frac{\rho}{x_o}\right)^{n-1} < n\frac{M}{x_o}q^{n-1}, (14)$$

мұнда $q = \frac{\rho}{x_0} < 1$, өйткені $\rho < x_0$. Енді мүшелері оң мына сандық қатарды қарайық:

$$\frac{M}{x_0}(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots + nq^{n-1} + \cdots). \qquad (15)$$

(15) қатардың жинақтылығына көз жеткізу үшін Даламбер белгісін қолданамыз. Сонда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}} = q < 1.$$

Демек (15) қатар жинақты. Ендеше (14) теңсіздіктен мынадай қорытындыға келеміз: (13) қатар $(-R, R)$ интервалдың ішінде жатқан $[-\rho, \rho]$ сегментте мажорантталатын қатар болды. Олай болса (13) қатар $[-\rho, \rho]$ сегментінде бірқалыпты жинақты. Сондықтан да (1) қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады және оның қосындысынан алынған туынды (13) қатардың қосындысына тең. (13) қатар мажорантталатын қатар болғандықтан, ол (1) қатардың жинақтылық интервалының ішінде абсолют жинақты болады.

Енді осы интервалдың сыртында (13) қатардың жинақсыз болатынын дәлелдейік. Айталық $(-R, R)$ интервалдың сыртында жатқан яғни мына теңсіздікті $|\xi| > R$ қанағаттандыратын $\xi$ нүктесінде (13) қатар жинақты болсын.

Сонымен, бұл ұйғару бойынша келесі қатар

$$|a_1| + 2|\, a_2|\, |\xi| + 3\, |a_3|\, |\xi|^2 + \cdots + n\, |a_n|\, |\xi|^{\, n-1} + \cdots$$

жинақты. Бұл қатардың барлық мүшелерін $|\xi|$-ге көбейтейік одан қатардың жинақтылығы өзгермейді. Сонда

$$|a_1||\xi| + 2|\, a_2|\, |\xi| + 3\, |a_3|\, |\xi^3| + \cdots + n\, |a_n|\, |\xi|^n + \cdots \qquad (16)$$

Егер (16) жинақты болса, онда мына қатар да

$$|a_1\xi| + |\, a_2|\, |\xi|^2 + |a_3|\, |\xi|^3 + \cdots + |a_n|\, |\xi|^{\, n} + \cdots$$

жинақты болады, өйткені

$$|\, a_n|\, |\xi|^n < n|a_n|\, |\xi|^n.$$

Демек, $\xi$ нүктесінде (1) қатар жинақты, бұлай болу тіпті мүмкін емес, өйткені $|\xi| > R$, яғни $\xi$ − оның жинақтылық интервалының сыртында жатқан нүкте.

Сөйтіп, $(-R, R)$ интервалының сыртында жатқан нүктеде (13) қатар жинақты болсын деп ұйғару бізді қайшылыққа келтіреді. Міне, осы қайшылық (13) қатардың жинақтылық интервалы $(-R, R)$ болатынын дәлелдейді.

Жинақтылық интервалының ұштарында (1) және (13) қатарлардың жинақтылығы бірдей болмайды: (1) қатар жинақты болғанымен (13) қатардың жинақсыз болуы мүмкін.

Мәселен мына қатардың

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$

Жинақтылық интервалы $(-1,1)$. Осы қатардағы $x$-тің орнына – 1-ді қояйық, сонда

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n} + \cdots,$$

бұл қатар бізге белгілі жинақты қатар.

Сонымен, мысалға алынып отырған қатар өзінің жинақтылық интервалының сол жақ ұшында, яғни $x = -1$ нүктесінде жинақты болатын болды. Енді осы қатарды дифференциалдайық. Сонда

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n \cdots.$$

Дәлелденген теорема бойынша бұл қатардың да жинақтылық интервалы $(-1,1)$ болады. Бірақ кейінгі қатар $x = -1$ нүктесінде жинақсыз.

**2.** Үшінші параграфта дәлелденген теорема бойынша дәрежелік қатар өзінің жинақтылық интервалының ішінде жатқан әрбір $[-\rho, \rho]$ сегментінде бірқалыпты жинақты. Олай болса, функциялық қатарды мүшелеп интегралдау теоремасы бойынша (1) дәрежелік қатарды $[-\rho, \rho']$ сегментінде интегралдауға болады. Былайша айтқанда

$$\int_0^x F(x)\, dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \cdots \qquad (17)$$

мұнда $|x| < R$. Интегралдың жоғарғы шегі $x$ жинақтылық интервалының бір ұшымен, егер бұл ұшта (1) қатар жинақты болса дәл келуі мүмкін. Сонымен, (17) теңдік $-R$-мен, $+R$-дің арасындағы әрбір $x$ үшін дұрыс болады, демек (17) формула бүкіл жинақтылық интервалы үшін дұрыс болады.

(17) қатардың да жинақтылық интервалы $(-R, +R)$ болатынын мынадан байқауға болады: егер (17) қатардың жинақтылық интервалы $(-R, +R)$ болмай, басқа $(-R', +R')$ интервалы болса, онда (17) қатарды мүшелеп дифференциалдаудан шыққан мына қатардың да

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n + \cdots$$

жинақтылық интервалы $(-R', +R')$ болады. Бұл мүмкін емес! Өйткені (1) дәрежелік қатардың жинақтылық $(-R, R)$ интервалы болатын.

Мысал үшін төмендегі қатарды қарайық:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

Бұл қатар – еселігі – $x^2$ геометриялық прогрессия. Сондықтан, егер $x^2 < 1$ болса мысалға алынып отырған қатар жинақты болады, егер $x^2 < 1$ болса, жинақсыз болады. Ендеше бұл қатардың жинақтылық интервалы $(-1, 1)$ болады, ал қосындысы $\frac{1}{1+x^2}$. Сонымен, $(-1, 1)$ интервалында

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

Енді бұл қатарды 0-ден $x$-ке дейін (мұнда $\leq x \leq 1$) интегралдайық. Сонда

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n\pm1}}{2n+1} + \cdots$$

немесе

$$arc\ tg\ x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad (18)$$

(18) қатардың да жинақтылық интервалы (−1,1). Егер (18) қатардағы орнына 1-ді қойсақ, онда

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2_{n+1}} \ldots$$

Бұл қатардың жинақтылығы бізге белгілі. Осы қатардан $\pi$-дің жуық мәнін табуға болады.

## §5 Маклорен мен Тейлор қатарлары. Функцияларды дәрежелік қатарға жіктеу

1. Егер (1) дәрежелік қатардың жинақтылық интервалы $(-R, R)$, ал қосындысы $F(x)$ болса, онда оны мүшелеп дифференциалдаудан шыққан (13) қатардың да жинақтылық интервалы $(-R, R)$ болатынын және осы кейінгі қатардың қосындысы (1) қатар қосындының туындысына тең болатынын төртінші параграфта көрсеттік. Осы айтылған пікір (13) дәрежелік қатар үшін де дұрыс болады, яғни, егер (13) қатардың жинақтылық интервалы $(-R, R)$ және қосындысы $F'(x)$ болса, онда бұл қатарды дифференциалдаудан шыққан қатардың да жинақтылық интервалы $(-R, R)$ болады және оның қосындысы $F''(x)$ болады.

Сөйтіп, егер (1) дәрежелік қатар өзінің $(-R, R)$ жинақтылық интервалында $F(x)$ функцияға жинақты болса, онда бұл интервалдың ішінде жатқан барлық нүктелерде $F(x)$ функцияның барлық ретті туындылары болады және бұл туындыларды табу үшін берілген қатарды мүшелеп тілегенімізше дифференциалдаймыз.

Сонымен,

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x_2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$F'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

$$F''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 1 \cdot 2 \cdot 3a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots$$

$$F'''^{(x)} = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4a_4x + \cdots$$

$$\cdots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \cdots$$

……………………………………………………………………

$$F^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)na_n + \cdots$$

……………………………………………………………………

Бұл қатардың әрқайсысы $(-R, R)$ интервалында жинақты болады. Осы қатарлардағы $x$-тің орнына нольді қойсақ, онда

$$a_0 = F(0), a_1 = F'(0), a_2 = \frac{F''(0)}{2!}, a_3 = \frac{F'''(0)}{3!}, \cdots,$$

$$a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$$

Сөйтіп, (1) дәрежелік қатардың коэффициенттері $x = 0$ нүктесіндегі оның қосындысының мәні арқылы және осы қосындыдан алынған туындылардың мәндері арқылы өрнектелетін болады. Бұдан кейін (1) дәрежелік қатар мына түрге көшеді

$$F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \frac{x^2}{2!}F''(0) + \frac{x^3}{3!}F'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}F^{(n)}(0) + \cdots \quad (19)$$

(19) дәрежелік қатарды *Маклорен қатары* деп атайды. Бұл қатардың, анализде болсын және басқа тәжірибелік ғылымдарда болсын, маңызы өте зор.

Осы қорытылып шыққан (19) қатардан мынадай сұрақ туады: берілген $f(x)$ функцияны (19) дәрежелік қатар арқылы кескіндеу үшін бұл функция қандай қасиеттерге ие болу керек? Дәрежелік қатарды дифференциалдау турасындағы теореманы негізгі алып, бұл сұраққа былай жауап беруге болады: $x = 0$ нүктесінде $f(x)$ функцияның барлық ретті туындылары болу керек. Онда

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots +$$

$$+ \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \cdots \quad (20)$$

Берілген $f(x)$ функцияны (20) дәрежелік қатармен кескіндеуді оны *Маклорен қатарына жіктеу* деп атайды.

Сөйтіп, егер берілген $f(x)$ функцияның $x = 0$ нүктесінде шектеулі барлық ретті туындылары болса, онда бұл функцияны Маклорен қатарына формальді түрде жіктеуге болатын болды.

**2.** Егер берілген $f(x)$ функцияның $x = 0$ нүктесіндегі өзі немесе оның туындылары шексіздікке айналса, онда бұл функцияны Маклорен қатарына жіктеуге болмайды. Мәселен мына $lnx$-ті Маклорен қатарына жіктеуге болмайды, өйткені бұл функцияның өзі және оның туындылары $x = 0$ нүктесінде шексіздікке айналып кетеді.

Айталық берілген $f(x)$ функцияның нольден айрықша $x_0$ нүктесінде барлық ретті шектеулі туындылары болсын. Аргумент $x$-ке $x_0$ нүктесінде $h$ өсімшені береміз, сонда $x = x_0 + h$ және $f(x) = f(x_0 + h)$, былай ұйғарайық:

$$\varphi(h) = f(x_0 + h)$$

бұл арадан

$$\varphi'(h) = f'(x_0 + h),$$
$$\varphi''(h) = f''(x_0 + h),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi^{(n)}(h) = f^{(n)}(x_0 + h)$$

Енді осы тендіктердегі $h$-тың орнына нольді қояйық. Сонда

$$\varphi(0) = f(x_0), \varphi'(0) = f'(x_0), \varphi''(0) = f''(x_0),$$
$$\cdots, \varphi^{(n)}(0) = f^{(n)}(x_0), \ldots$$

$\varphi(h)$ функцияны Маклорен қатарына жіктейміз. Сонда

$$\varphi(h) \sim \varphi\,(0) + \frac{h}{1}\varphi'(0) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \cdots$$

немесе

$$f(x_0 + h) \sim f(x_0) + \frac{h}{1}f'(x_0) \ + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \cdots$$

Ал $h = x - x_0$, олай болса,

$$f(x) \sim f(x_0) + \frac{x - x_0}{1}f'(x_0) \ + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots$$
$$+ \frac{(x - x^0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \cdots \qquad (21)$$

(21) қатарды *Тейлор қатары* дейді.

Егер нольден айрықша $x_0$ нүктесінде $f(x)$ функцияның барлық ретті шектеулі туындылары болса, онда бұл функцияны осы нүктенің аймағында мына $x - x_0$ айырманың өспелі дәрежесі бойынша Тейло қатарына жіктеуге болады.

## § 6. Маклорен мен Тейлор қатарларының жинақтылығы

**1.** Барлық ретті шектеулі туындылары бар $f(x)$ функцияны Маклорен немесе Тейлор қатарына жіктеуге болады деп айттық. Бірақ мұнын нәтижесінде шыққан қатарлар сол жіктелуші функциялардың өздеріне жинақты болуы да, болмауы да мүмкін.

Енді мәселе осыны қалай білуде.

Біз ең алдымен берілген $f(x)$ функцияны Маклорен қатарына жіктейміз, яғни (20) қатарды құраймыз, егер оның $x = 0$ нүктесінде барлық шектеулі туындылары болса немесе Тейлор қатарына жіктейміз, яғни (21) қатарды құрамыз, егер қарастырылып отырған функцияның нольден басқаша $x_0$ нүктесінде барлық шектеулі туындылары болса. Маклорен қатарына жіктеу деген мәселе мына коэффициенттерді

$$a_0 = f(0), a_1 = \frac{f'(0)}{1}, a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \cdots, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \cdots$$

табу деген сөз.

Маклорен қатарына жіктеп болғаннан кейін, оның нәтижесінде шыққан дәрежелік қатардың жинақтылық интервалын белгілі тәсілдердің бірін қолданып табамыз. Бұдан кейін осы құрылған қатар жаңағы табылған жинақтылық интервалында жіктеліціп отырған функцияның өзіне жинақты бола ма, жоқ па, міне соны зерттейміз. Ол үшін дифференциалдық есептеу бөліміне арналған тараулардағы келтірілген Маклорен және Тейлор формулаларын пайдаланамыз. Осы формулаларды еске түсірейік:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots +$$

$$+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n(x), \qquad (22)$$

мұнда $R_n(x)$ – қалдық мүше. Қалдық мүшені Лагранж және Коши түрінде алуға болады:

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta\, x), \qquad (23)$$

бұл – қалдық мүшенің Лагранж түріндегі формуласы, мұнда $0 < \Theta < 1$.

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}(1-\Theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta\, x), \qquad (24)$$

бұл – қалдық мүшенің Лагранж түріндегі формуласы, мұнда $0 < \Theta < 1$.

(20) қатар $f(x)$ функцияға жинақты болу үшін $n$ шексіздікке ұмтылғанда мына айырма

$$f(x) - [f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots +$$

$$+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)] + R_n(x),$$

немесе бәрібір қалдық мүше $R_n(x)$ нольге ұмтылу керек. Бұл қажетті және жеткілкті шарт.

Сөйтіп, қорытып келгенде былай болатын болды: егер $x = 0$ нүктесінде $f(x)$ функцияның барлық ретті шектеулі туындылары болса, онда оны (20) Маклорен қатарына жіктейміз де, мұның нәтижесінде шыққан қатардың жинақтылық интервалын табамыз, бұдан кейін осы қатардың берілген $f(x)$ функцияның өзіне жинақты болуын білу үшін қалдық мүшені не Ланграж, не Коши түрінде құрамыз; егер $n$ шексіздікке ұмтылғанда осы қалдық мүше нольге ұмтылса, онда құрылған қатар берілген $f(x)$ функцияға өзінің жинақтылық интервалында жинақты болады.

2. Енді мысал үшін мына $f(x) = ln\,(1 + x)$ функцияны Маклорен қатарына жіктейік. Ол үшін алдымен туындыларды табамыз:

$$f(x) - \ln(1+x)\,, f'^{(x)} = \frac{1}{1+x}, f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''^{(x)} = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}, \cdots, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)}{(1+x)^n}, \cdots$$

Бұл арадан

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, f'''(0), = 2!$$

$$f^{IV}(0) = -3!, \cdots, f^n(0) = (-1)^{n-I}(n-1)!\cdots$$

Енді Маклорен қатары мына түрде болады:

$$ln(1+x) \sim \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x_n}{n!} + \cdots. \quad (25)$$

Алдымен, бұл қатардың жинақтылық интервалын табайық ол үшін Даламбер белгісін пайдаланамыз:

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

Сонымен, (25) қатардың жинақтылық интервалы (–1,1) болады. Енді (25) қатар $ln\,(1 + x)$ функцияға жинақты бола ма, соны білу үшін қалдық мүшені Коши түрінде құрамыз:

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}\cdot\frac{(-1)^n\cdot n!}{(1+\theta x\,)^{n+1}} = (-1)^n\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

немесе

$$R_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \frac{1}{1+\theta x}. \qquad (26)$$

$|x| < 1$ болса, онда (26) теңдіктің оң жағында тұрған бірінші көбейткіш $x^{т+1}$, $n$ шексіздікке ұмтылғанда нольге ұмтылады; екінші көбейткіш $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ , $x$ оң болса да, теріс болса да бірден кіші болады, өйткені алымы бөлімінен кіші; үшінші $\frac{1}{1+\theta x}$ көбейткіштің шамасы тиісті бір саннан, мәселен мына $\frac{1}{1-|x|}$ саннан аспайды. Сонымен, мына $|x| < 1$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық $x$-тер үшін (26) қалдық мүше $n$ шексіздікке ұмтылғанда нольге ұмтылатын болды. Олай болса

$$ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots. \qquad (27)$$

Егер $x = 1$ болса,

$$ln2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots \qquad (28)$$

(28) теңдіктің оң жағында тұрған қатардың абсолют емес, шартты түрде жинақтылығы бізге белгілі.

(27) қатар бойынша кез келген санның логарифмін табуға бола ма деген сұрақ туады. Әрине жоқ, өйткені бұл қатар мына $-1 < x \leq 1$ теңсіздікті қанағаттандыратын $x$-тер үшін ғана $-ln\,(1+x)$ функцияға жинақты бола алады. Дегенмен осы қатардың көмегімен кез келген оң бүтін санның натурал логарифмін табуға болатын қатарды құруға болады. (27) теңдіктегі $x$-тің орнынан – $x$-ті қойсақ, онда

$$l\,n(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots \qquad (29)$$

бұл қатар да (–1,1) аралығында жинақты болады. (27) теңдіктен (29) теңдікті алайық. Сонда

$$l\,n\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2_{n+1}} + \cdots\right) \qquad (30)$$

$x$ нольден бірге дейін өзгергенде рационал бөлшек $\frac{1+x}{1-x}$, $+1$-ден $+\infty$-ке дейін ылғи өсіп отырады. Енді былай ұйғарамыз:

$\frac{1+x}{1-x} = \frac{N+1}{N}$ бұл арадан $x = \frac{1}{2N+1}$, сонда (30) теңдік мына түрге көшеді

$$l\,n(N+1) - ln\,N = [2\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \cdots +$$

$$+\frac{1}{(2m-1)(2N+1)^{2m-1}} + \cdots] \qquad (31)$$

(31) теңдіктің оң жағындағы квадрат жақшалардың ішіндегі қатар, егер $N$ аса үлкен болса, тез жинақты қатар.

Міне осы (31) формула бойынша кез келген оң санның натурал логарифмін табуға болады. Бұл – есептеп шығаруға өте қолайлы формула.

Егер (31) теңдіктің оң жағындағы квадрат жақшалардың ішіндегі қатардың $\frac{2}{(2m-1)(2N+1)^{2m-1}}$ мүшесіне дейін ғана тоқтасақ, онда біздің жіберетін қатеміз тең болады:

$$R_n = \left[2\frac{1}{(2m+1)(2N+1)^{2m+1}} + \frac{1}{(2m+3)(2N+1)^{2m+3}} + \cdots\right].$$

Осы кейінгі теңдіктің оң жағындағы квадрат жақшалардың ішіндегі бөлшектердің бөлімінде тұрған $2m+1,\ 2m+3\ 2m+5$ көбейткіштердің орнына $2m+1$ санын қойсақ, онда

$$R_n < \frac{2}{2m+1}\left[\frac{1}{(2N+1)^{2m+1}} + \frac{1}{(2N+1)^{2m+3}} + \cdots\right]. (32)$$

(32) теңсіздіктің оң жағындағы квадрат жақшалардың ішіндегі өрнек еселігі $\frac{1}{(2N+1)^{2m+1}}$ кеміме геометриялық прогрессия. Сондықтан

$$R_n < \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{\frac{1}{(2N+1)^{2m+1}}}{1-\left(\frac{1}{2N+1}\right)^2} = \frac{1}{(2m+1)(2N+1)^{2m-1}2N(N+1)}.$$

Мәселен (31) формула бойынша

$$l\,n\,2 = 2\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{2}{5}\cdot -\frac{1}{3^5} + \cdots \qquad (33)$$

Егер $l\,n\,2$-нің жуық мәнін жеті ондық таңбаларға жеткізіп табатын болсақ, онда (33) қатардың сегіз мүшесін алуымыз керек. Сонда жіберілетін қате $R_8 < \frac{1}{2\cdot 17\cdot 3^{15}} < \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10^8}$ болады. Егер сегіз мүшенің әрқайсысын он ондық таңбаларға жеткізіп ондық бөлшекке айналдырсақ, онда жіберетін қатеміз $\frac{1}{10^{10}}$-ден аспайды; демек олардың қосындысын тапқандағы жіберілетін қате $\frac{18}{10^{10}}$-ден аспайды. Сонымен, $l\,n\,2$-нің жуық мәнін тапқанда дәлдігін жеті ондық танбаларға дейін жеткізетін болсақ, онда жіберілетін қате $R_n < \frac{1}{10^8}$ болады, және

$$l\,n\,2 = 0{,}6931471.$$

Бұл арада бір айтып кететін мәселе мынау: бүтін бөлігі $A$ мың мен он мыңның арасында жатқан $A+\alpha$ санының логарифмін іздегенде $A$ саны мен оған тетелес $A+1$ санының ондық логарифмін табамыз да, мына $\lg(\mathrm{A}+1)-\lg\mathrm{A}$ айырманы аламыз. Сонда берілген $A+\alpha$ санының ондық логарифмі

$$l\mathrm{g}\,(A+\alpha) = l\mathrm{g}A + \alpha\,[\,l\mathrm{g}(A+1) - l\mathrm{g}A]$$

болады.

Шынында осы жазылып отырған теңдік – жуық теңдік. Олай болса, теңдіктің сол жағында тұрған сан оның оң жағында тұрған санға қандай дәлдікпен тең болады деген сұрақ туады. Міне осы мәселені шешу үшін санның ондық логарифмі мен натурал логарифмінің арасындағы байланысты қарастырамыз:

$$l\mathrm{g}\,(A+\alpha) = M\;ln(A+\alpha); \mathrm{lg}A = MlnA;$$

$$l\mathrm{g}\,(A+1) = M\;ln(A+1).$$

Бұдан кейін жоғарыда жазылған теңдік мына түрге көшеді:

$$ln\,(A+\alpha) - \;ln\,A + \alpha\,[ln(A+1) - ln\,A].$$

Бұл теңдіктің сол жағындағы санды оның оң жағындағы санға тең деп алғандағы жіберілетін қате келесі айырмаға тең болады:

$$ln\,(A+\alpha) - \;ln\,A - \alpha\,[ln(A+1) - ln\,A] =$$

$$= ln\,\left(1+\frac{\alpha}{A}\right) = \;\alpha\,ln\,\left(1+\frac{1}{A}\right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{A} - \frac{\alpha^2}{2A^2} + \frac{\alpha^3}{3A^3} - \cdots\right) - \alpha\,\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{2A^2} - \frac{1}{3A^3} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{\alpha(1-\alpha)}{2A^2} - \;\frac{\alpha(1-\alpha^2)}{3A^3} + \left(\frac{\alpha(1-\alpha^3)}{4A^4}\right) - \cdots.$$

Бұл теңдіктің оң жағындағы тұрған қатар мүшелерінің таңбалары кезектесетін біркелкі кеміме қатар. Сондықтан оның қосындысы мына $\frac{\alpha(1-\alpha)}{2A^2}$ саннан кіші болады. Бұл бөлшектің алымын былай түрлендіріп жазуға болады:

$$\alpha(1-\alpha)=\frac{1}{4}-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Ендеше

$$\alpha(1-\alpha)<\frac{1}{4},$$

өйткені $\alpha$ – оң дұрыс бөлшек. Сонымен, $\frac{\alpha(1-\alpha)}{2A^2}<\frac{1}{8A^2}$.

Сөйтіп, айтылып отырған қатенің шамасы $\frac{1}{8A^2}$ санынан кіші болатын болды. А саны мың мен оң мыңның арасында болғандықтан жаңағы қате мына $\frac{10^{-6}}{8}$ саннан кіші болады.

Демек, мына ереже:

$$lg\,(A+\alpha)=lgA+\alpha\,[\lg\,(A+1)-lgA];$$

дұрыс.

**3.** Мұна $e^x$, $sinx, cosx,$ үш функцияны Маклорен қатарына жіктейік. Сонда

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

Егер бірінші қатардағы $x$-тің орнынан әуелі $ix$-ті қойсақ, сонда

$$e^x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+\cdots+$$

$$+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1);}+\cdots\right).$$

Кейінгі екі қатар бойынша

$$e^{ix}=cos\,x+i\sin x.$$

Дәл осы сияқты

$$e^{-ix} = cos\, x - i \sin x.$$

Осы қорытылып шыққан екі формуланы бір-бірімен қоссақ

$$cos\, x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Енді оларды бір-бірінен алсақ:

$$sin\, x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Осы қорытылып шыққан кейінгі төрт формуланы Эйлер формулалары дейді.

## § 7. Биномдық қатар

Мына $f(x) = (1 + x)^n$ функцияны Маклорен қатарына жіктеу керек. Ол үшін бұл функцияның туындыларын біртіндеп табамыз:

$$f(x) = (1 + x)^m, f'^{(x)} = m(1 + x)^{m-1},$$

$$f''^{(x)} = m(m - 1)(1 + x)^{m-2}, f'''^{(x)} =$$
$$= m(m - 1)(m - 2)(1 + x)^{m-3}, \cdots,$$

$$f^{(n)}(x) = m(m - 1)(m - 2) \cdots (m - n + 1)(1 + x)^{m-n},$$

$$f^{(n+1)}(x) = m(m - 1)(m - 2) \cdots (m - n)(1 + x)^{m-n-1}, \cdots$$

Бұл арадан

$$f(0) = 1, f'(0) = m. f''(0) = m(m - 1),$$

$$f'''(0) = m(m - 1)(m - 2), \cdots f^{(n)}(0) =$$
$$= m(m - 1)(m - 2) \cdots (m - n + 1),$$

$$f^{(n+1)}(0) = m(m - 1)(m - 2), \cdots (m - n), \cdots$$

Енді Маклорен формуласы бойынша

$$(1 + x)^m \sim 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots. \qquad (34)$$

Алдымен (34) қатардың жинақтылық интервалын табу керек, ол үшін Даламбер белгісін қолданамыз. Сонда

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|m-n|}{n} = 1.$$

Сонымен, (34) қатардың жинақтылық интервалы (–1, 1) болады. Осы интервалда (34) қатардың берілген $f(x) = (1+x)^m$ функцияға жинақтылығын білу үшін қалдық мүшені Коши түрінде аламыз:

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{n!} x^{n+1} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{m-1} \qquad (35)$$

(35) теңдіктің оң жағындағы мына $\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{n} x^{n+1}$ көбейткіш $n$ шексіздікке ұмтылғанда нольге ұмтылады, өйткені бұл көбейткіш (-1, 1) интегралында жинақты (34) қатардың жалпы мүшесі. Көбейткіш $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ оң болса да, теріс болса да бірден кіші; төртінші көбейткіш $(1+\Theta x)^{m-1}$ белгілі бір тиянақты саннан кіші. Мәселен, егер $m-1>0$ болса, онда $(1+2x)^{m-1} < 2^{m-1}$ егерде $m-1<1$ болса, онда $(1+\Theta x)^{m-1} < 1(1-|x|)^{m-1}$.

Сөйтіп, (-1, 1) интервалдың ішінде жатқан барлық $x$-тер үшін

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Ендеше бұл интервалда (34) қатар $f(x) = (1+x)^m$ функцияға жинақты. Сондықтан да

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 =$$

$$+\cdots+ \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots \qquad (36)$$

Егер $m>0$ болса, онда (36) қатар $x=1$ және $x=-1$ нүктелерінде жинақты; егер $-1<m\le 0$ болса, онда (36) қатар $x=+1$ нүктесінде жинақты да, ал $x=-1$ нүктесінде жинақсыз; егер $m\le -1$ болса, онда $x=1$ және $x=-1$ нүктелерінде (36) қатар жинақсыз болады.

Енді (36) формуладағы $x$-тің орнына – $x^2$-ты, ал $m$-нің орнына – $\frac{1}{2}$-ді қойсақ, сонда

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}x^{2n} + \cdots \qquad (37)$$

(37) формула (–1, +1) интервалдың ішінде жатқан барлық $x$-тер үшін дұрыс болады. Енді (37) теңдіктің екі жағын 0-ден $x$-ке дейін (мұнда $|x| < 1$) интегралдап табамыз:

$$ars\sin x = \frac{x}{1} + \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x^{2+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n(2n+1)} + \cdots$$

Осы теңдіктің екі жағындағы $x$-тің орнына 1-ді қойсақ, онда

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n(2n+1)} + \cdots$$

Енді мынадай шығарайық: төмендегі параметрлік теңдеулермен

$$x = a\,sin\,t, y = b\cos t$$

бірілген эллипстің доғасының ұзындығын табу керек. Параметрлік теңдеулермен берілген қисықтың доғасының ұзындығы мына формуламен

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

анықталатыны бізге белгілі. Осы формуланың негізінде эллипс доғасының ұзындығы болады:

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2cos^2t + b^2sin^2t\,dt} =$$

$$= \int_0^t \sqrt{a^2 - a^2sin^2t + b^2sin^2t\,dt} =$$

$$= a\int_0^t \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}sin^2t\,dt}\,;$$

немесе былай ұйғарып: $k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ мұнда $k^2 < 1$, табамыз:

$$s = a\int_0^t \sqrt{1 - k^2sin^2t\,dt}.$$

Осы шыққан интегралды эллипстік интеграл деп атайды. Бұл интеграл былай оңай сияқты болып көрінгенімен белгілі жолмен «алынатын» интеграл емес, былайша айтқанда, ол элементар функциялар арқылы өрнектелмейді. Сондықтан бұл интегралдың тек жуық мәнін ғана табуға болады. Ол үшін интеграл таңбасы ішіндегі $\sqrt{1-k^2sin^2t}$ өрнекті биномдық қатарға жіктейміз. Сонда

$$\sqrt{1-k^2sin^2t} = 1-\frac{1}{2}k^2sin^2t-\frac{1}{2\cdot 4}k^4sin^4t-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6sin^6t-\cdots \quad (38)$$

Бұл қатар $t$-нің мәні үшін жинақты, өйткені оның әрбір мүшесінің абсолют шамасы төмендегі

$$1+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}k^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}k^6+\cdots \quad (39)$$

сандық қатардың әрбір сәйкес мүшесінен кіші. Екінші жағынан (39) қатардың әрбір мүшесі келесі

$$1+k^2+k^4+k^6+\cdots \quad (40)$$

қатардың әрбір сәйкес мүшесінен кіші.

Ал (40) сандық қатар – еселігі $k^2<1$ геометриялық прогрессия, сондықтан бұл қатар жинақты. Олар болса (39) қатар жинақты. Сөйтіп, (38) қатар $t$-нің әрбір мәні үшін абсолют және бірқалыпты жинақты. Ендеше (38) қатарды мүшелеп интегралдауға болады.

$$s=a\int_0^t\sqrt{1-k^2sin^2t}\,dt=a(t-\frac{1}{2}k^2\int_0^t sin^2t\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}k^4\int_0^t sin^4t\,dt-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}k^6\int_0^t sin^6t\,dt-\cdots)$$

Интегралдың жоғарғы шегі $t$-нің орнына $\frac{\pi}{2}$-ді алайық. Сонда

$$s=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2sin^2tdt}=2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\frac{k^4}{3}-\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\frac{k6}{5}-\cdots\right]$$

### ***Жаттығулар***

Келесі қатардың жинақтылық интервалдарын табу керек.

1. $1+\frac{2^5\cdot x^2}{3}+\frac{3^5x^4}{5}+\frac{4^5x^6}{7}+\frac{5^5x^8}{9}+\cdots$.

2. $\frac{sin\, x}{1}+\frac{sin3x}{3^2}+\frac{sin5x}{5^2}+\frac{sin7x}{7^2}+\frac{sin9x}{9^2}+\cdots$.

3. $1+\frac{x}{2}+\frac{1\cdot 2}{3^2}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{4^3}x^3+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{5^4}x^4+\cdots$.

4. $1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$.

Келесі функцияларды қатарларға жіктеу керек.

5. $f(x)=ln(1+\sin x)$.

6. $f(x)=sin(m\, arc\ \sin x)$.

7. $f(x)=(arc\ \sin x)^2$.

8. $f(x)=cos(m\, arc\ \sin x)$.

9. $f(x)=(x-tgx)cos\, x$.

9. $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

# XVI ТАРАУ
# ФУРЬЕ ҚАТАРЛАРЫ

## § 1. Тригонометриялық қатар ұғымы

Біз бұл тарауда жоғарыда қаралған қатарлардан айрықша функциялық қатарларды қараймыз.

Тригонометриялық қатар деп келесі функциялық қатарды

$$\frac{a_0}{2}+a_1cosx+b_1sinx+a_2cos2x+b_2sin2x+\cdots+$$

$$+a_ncos\, nx+b_nsin\, nx+\cdots=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_ncos\, nx+b_nsin\, nx)\quad(1)$$

айтады. Мұнда $a_0,\ a_1,a_2,b_1,b_2\cdots a_n,b_n\cdots$, тұрақты сандар, оларды тригонометриялық қатардың коэффициенттері дейді.

Тригонометриялық қатарды зерттеумен байланысты мынадай сұрақ туады: берілген $f(x)$ функцияға жинақты тригонометриялық қатарды табуға бола ма? Тригонометриялық қатар берілген $f(x)$ функцияға жинақты болу үшін бұл функция кейбір шарттарды қанағаттандыруы керек. Егер берілген функция $f(x)$ өзінің алдына қойылған тиісті талаптардың барлығын қанағаттандырса, онда бұл үшін белгілі заң бойынша тригонометриялық қатарды құруға болады. Бұл тригонометриялық қатар құрылғаннан кейінгі мақсат ол қатардың берілген функцияға жинақтылығын зерттеу, яғни берілген функция $f(x)$ құрылған тригонометриялық қатардың қосындысы бола ма, міне соны білу.

Міне осымен байланысты мәселелердің шешілуі, тригонометриялық қатар теориясының алуан түрлі қолданылуы бұл саладан кең байтақ және терең зерттеулер жүргізуді талап етті.

Бұл тарауда әрине біз тригонометриялық қатардың толық теориясын бере алмаймыз. Дегенмен келешекте керек болатын біраз мәліметтерге тоқтап кетеміз.

Егер (1) тригонометриялық қатардың қосындысы $f(x)$ болса, онда $f(x)$ – периодты (периодты $2\pi$-ге тең) функция болады, өйткені (1) қатардың әрбір мүшесі $cos\, n\, x, \sin n\, x$ периодты (периоды $2\pi$-ге тең) функциялар.

Шынында

$$f(x+2\pi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n(x+2\pi)+$$

$$+b_n\sin n(x+2\pi)]=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(an\cos nx+b_n sin\, nx=f(x).$$

Бұл арадан, тригонометриялық қатарға тек периодты функцияны ғана жіктеуге болады деп қортынды жасауға болмайды.

Мәселен $\varphi(x)$, $(a,b)$ аралығында анықталған периодсыз функция болсын да, ал $f(x)$ – периодты (периоды $2\pi$-ге тең) функция болсын, яғни $f(x+2\pi)=f(x)$. $f(x)$ – периодты функция болғандықтан оны $[-\pi,\pi]$ сегментінде қарауға болады.

Мына $\varphi(x)$ функцияны тригонометриялық қатар арқылы қалай өрнектеуге болады, мәселе сонда. $(a,b)$ аралығы $[-\pi,\pi]$ сегментінің ішінде жататын болсын, әуелі осы жағдайды қарайық. $f(x)$ функцияны төменгі шарттар анықтасын:

$$f(x)=\varphi(x),\ \text{егер}\ a\le x\le b\ \text{болса},$$
$$f(-\pi)=f(\pi)=0.$$

Мұнда $f(x)$ – сызықты функция, егер $-\pi\le x\le a-$ болса $f(x+2\pi)=f(x)$ орындалатындай етіп аламыз.

$f(x)$ функцияны тригонометриялық қатар арқылы әбден кескіндеуге болады. Ендеше $\varphi(x)$ функцияны да тригонометриялық қатар арқылы кескіндеуге болады. $f(x)$ функцияға жинақты тригонометриялық қатар $(a,b)$ аралығында жатқан барлық

$x$-тер үшін $\varphi(x)$ функцияға да жинақты болады, $(a, b)$ аралығы бойында жатқан нүктелерде $f(x)$ пен $\varphi(x)$ өзара тең.

Енді келесі тригонометриялық функцияларды қарайық:

$1, cos\ x, \sin x, \cos 2x, sin2x, \cdots, cos\ nx, sin\ nx, \cdots.$

Бұл функцияларды тригонометриялық система деп атайды. Мына формулаларды еске түсірейік:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} cos\ mx\, dx = 0, \text{егер}\ m \neq 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\ cos\ nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{cos\ (m-n)x + \cos\ (m+n)x}{2} dx = 0,$$

$$\text{егер}\ m \neq n.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2mx}{2} dx = \pi,\ \text{егер}\ m \neq 0. \qquad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin\ mx\ sin\ nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(m-n)\ x - \cos\ (m+n)x}{2} dx = 0,$$

$$\text{егер}\ m \neq n.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin^2\ mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2mx}{2} dx = \pi,\ \text{егер}\ m \neq 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin\ mx \cos nx\, dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(m+n)\ x + \sin(m-n)\ x}{2} dx = 0,$$

$$\text{егер}\ m \neq n.$$

Осы формулалардағы $m, n$ – оң бүтін сандар. $sin\ mx, cos\ mx$-периоды $2\pi$-ге тең периодты функциялар болғандықтан (2) формулалар ұзындығы $2\pi$-ге тең мына $[a, a + 2\pi]$ сегмент ішінде дұрыс болады.

## § 2. Фурье қатары

1. Периоды $2\pi$-ге тең периодты $f(x)$ функцияны қарайық. Бұл функцияны қалыпты түрде тригонометриялық қатарға жіктеу деген мәселе тригонометриялық қатардағы белгісіз $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ коэффициенттерді табу деген сөз.

Берілген функция $f(x)$, $[-\pi,\pi]$, сегментінде интегралданатын функция болсын және бұл сегментте функция $f(x)$ тригонометриялық қатармен кескінделетін болсын, яғни

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\, nx+b_n sin\, nx) \qquad (3)$$

(3) қатар мүшеленіп интегралданатын деп ұйғарайық та, (3) теңдіктің екі жағын $[-\pi,\pi]$ сегментінде интегралдайық. Сонда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi} cos\, nx\, dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi} sin\, nx\, dx).$$

(2) формулалардағы бірінші теңдіктерді еске алсақ, сонда

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (4)$$

(3) теңдіктің екі жағын $cos\, mx$-ке көбейтіп және бұдан шыққан нәтижені $[-\pi,\pi]$ сегментінде интегралдайық. Сонда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos\, mx\, dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\, dx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(\,a_n\int_{-\pi}^{\pi} cos\, mx\, cos\, nx\, dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\, sin\, nx\, dx).$$

(2) формулаларды еске алып табамыз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos\, mx\, dx=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\, dx=a_n\pi,$$

бұл арадан

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx. \qquad (5)$$

$$(n=1,2,\dots)$$

Енді (3) теңдіктің екі жағын $sin\, mx$-ке көбейтіп, сонан соң бұдан шыққан нәтижені $-\ \pi$-ден $+\pi$-ге дейін интегралдап табамыз:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sin\, nx\, dx. \qquad (6)$$

$$(n = 1,2, \dots)$$

Тригонометриялық қатардың (4), (5), (6) формулалармен анықталатын коэффициенттерін *Фурье коэффициенттері* дейді. Ал коэффициенттері осы формулалармен анықталатын тригонометриялық қатарды Фурье қатары деп атайды.

Берілген $f(x)$ функцияны қалыпты түрде Фурье қатарына жіктеу үшін алдымен (4), (5), (6) формулалар бойынша оның коэффициенттерін табамыз да, сонан кейін қатардың өзін құрамыз. Сөйтіп $f(x)$ функциясы үшін Фурье қатарын құрамыз:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (7)$$

Осы табылған қатардың $f(x)$ функцияға жинақтылығын тексеру екінші мәселе.

$f(x)$ функциясы үшін құрылған Фурье қатарының бұл функцияға жинақтылығы бірден мәлімсіз болғандықтан теңдік белгісін қоймай, мындай "~„ белгіні қоямыз. Бұл белгі $f(x)$ функцияның Фурье қатарына жіктелгенін ғана көрсетеді, қатардың оған жинақтылығын көрсетпейді. $f(x)$ функциясы үшін құрылған Фурье қатарының бұл функцияға жинақты болатындығына көз жеткізгеннен кейін ғана теңдік белгісін қоюға болады.

Тағы бір ескертіп кететін мәселе мынау: қаралып отырған функцияның периоды $2^{\pi}$-ге тең болғандықтан $[-\pi, \pi]$ сегментінің орнына ұзындығы $2^{\pi}$-ге тең кез келген сегментті алуға болады. Сондықтан Фурье коэффициенттерін мына келесі формулалармен де анықтауға болады:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{a}^{a+2\pi} f(x) \, cos\, nx \, dx$$

$$(n = 0,1,2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{a}^{a+2\pi} f(x) \, sin\, nx \, dx \qquad (8)$$

$$(n = 1,2, \dots)$$

**Теорема.** *Егер периоды* $2^{\pi}$*-ге тең* $f(x)$ *функциясы үшін құрылған тригонометриялық қатар бүкіл OX осінде бірқалыпты жинақты болса, онда бұл қатар* $f(x)$ *функция үшін Фурье қатары болып табылады.*

$f(x)$ – периодты функция болғандықтан, теоремадағы «бүкіл OX осінде қатар бірқалыпты жинақты болса» деген сөйлемнің орнына «бүкіл $[-\pi, \pi]$ сегментінде бірқалыпты жинақты болса» деген сөйлемді алуға болады.

Айталық (3) қатар $[-\pi, \pi]$ сегментінде $f(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты болсын. Онда алдын ала берілген оң $\varepsilon$ санына сәйкес $N = N(\varepsilon)$ саны табылып, осы $N$-нен артық $m$-дерден $(m > N)$ бастап төмендегі теңсіздік.

$$|f(x) - S_m(x)| < \varepsilon, \tag{9}$$

$[-\pi, \pi]$ сегментінің барлық нүктелері үшін орындалады, мұнда

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n cos\, nx + b_n sin\, nx).$$

Енді (3) теңдіктің екі жағын $cos\ mx$-ке көбейтейік. Сонда

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos mx \cos nx + b_n cos\ mx \sin nx). \tag{10}$$

(10) қатардың бірқалыпты жинақтылығын дәлелдейік. Бұл қатардың дербес қосындысы болады: $S_m(x) cos\ mx$. Сондықтан

$$|f(x)\cos mx - s_m(x)\cos mx| = |f(x) - s_m(x)||\cos mx| \leq$$
$$\leq |f(x) - s_m(x)|.$$

(9) теңсіздікті еске алсақ, онда

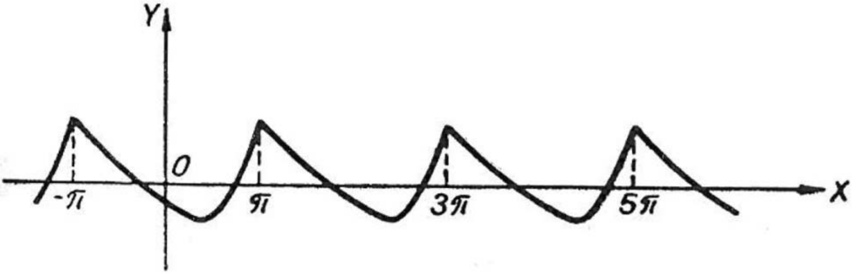
$$|f(x)\cos mx - s_m(x)\cos mx| < \varepsilon.$$

Осы кейінгі теңсіздіктің орындалуы (10) қатардың бірқалыпты жинақтылығын дәлелдейді. (10) қатар бірқалыпты жинақты болғандықтан, оны $[-\pi, \pi]$ сегментінде мүшелеп интегралдауға болады. (10) теңдіктің екі жағын – $\pi$-ден $+\pi$-ге дейін интегралдасақ, онда (5) теңдіктер келіп шығады. Осы жолмен (6) теңдіктерге келуге болады. Ендеше (3) қатар $f(x)$ функциясы үшін Фурье қатары болып табылады.

2. Көбінесе $[-\pi, \pi]$ сегментінде берілген периодсыз $f(x)$ функцияны Фурье қатарына жіктеуге тура келеді. Периодсыз болса да, мұндай функцияны Фурье қатарына жіктеуге болатынын біз жоғарыда айттық.

Егер $f(x)$ функцияны $[-\pi, \pi]$ сегменттен әрі қарай бүкіл $OX$ осі бойынша периодты етіп жалғасақ, онда периоды $2^{\pi}$-ге тең

$f(x)$ функция пайда болады (100-чертеж). Бұл периодты функция $[-\pi,\pi]$ сегментінде бастапқы берілген $f(x)$ функциямен тең болады. Периодты етіліп жалғасқан функция үшін Фурье қатарын құрамыз. Егер бұл қатар жинақты болса, онда $[-\pi,\pi]$ сегментінде оның қосындысы сегментте берілген бастапқы $f(x)$ функцияны кескіндейді.



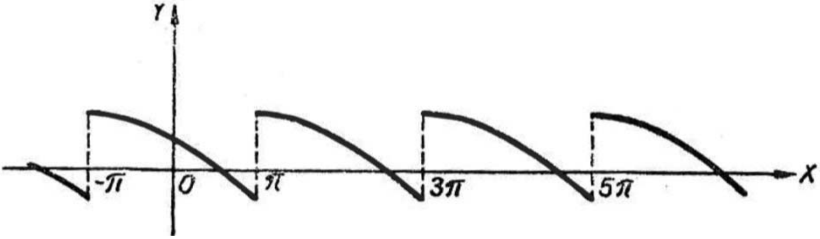
100-чертеж

Сонымен, $[-\pi,\pi]$ сегментінде берілген $f(x)$ функцияның Фурье қатары туралы айту – бәрібір бүкіл $OX$ осі бойынша периодты етіліп жалғасқан функция үшін Фурье қатары туралы айту. Сондықтан, Фурье қатарының жинақтылық белгілерін тек периодты функциялар үшін ғана тұжырымдауға болады. $[-\pi,\pi]$ сегментінде берілген $f(x)$ функцияны периодты етіп жалғастырумен байланысты келесі ескертпелерге тоқтап кетуге тура келеді.

Егер $f(-\pi)=f(\pi)$ болса, онда периодты етіп жалғастыру тіпті қиын емес (100-чертежді қараңыз) және мұнда былай: егер функция $f(x), [-\pi,\pi)$ сегментінде үздіксіз болса, онда оның периодтық жалғасы бүкіл $OX$ осінде үздіксіз болады.

Егер де $f(-\pi)\neq f(\pi)$ онда мына $f(-\pi)$ және $f(\pi)$ мәндерді өзгертпей керекті жалғастыруды іс жүзінде жүзеге асыруға болмайды, өйткені периодтылықтың түпкі мағынасы бойынша $f(\pi)$ және $f(-\pi)$ бір-бірімен тең болу керек. Бұл қиындықтан құтылудың екі жолы бар. Оның біреуі мынау: $x=-\pi, x=\pi$ нүктелердегі функцияның мәндерін анықтамау. Ендеше мына $x=(2k+1)^{\pi}$, $(k=0,\pm1,\pm2,\dots)$ нүктелердегі $f(x)$ функцияның периодтық жалғасы анықталмаған болып қалады.

Екінші жол: $x=-\pi, x=\pi$ нүктелердегі $f(x)$ функцияның мәндерін бір-біріне тең болатындай етіп қолайлы түрде өзгерту.



101-чертеж

Егер $f(-\pi) \neq f(\pi)$ және $f(x)[-\pi,\pi]$ сегментінде үздіксіз болса, онда $x = -\pi, x = \pi$ нүктелерінде $f(x)$ функцияның мәндерін қалай өзгертсек те бәрібір оның бүкіл $OX$ осі бойындағы периодтық жалғасы $x = (2k+1)^{\pi}$, $(k = 0, 1, 2, \dots)$ нүктелерде үзілісті болады (101-чертеж).

## § 3. Функцияны тек косинустар және тек синустар бойынша Фурье қатарына жіктеу

1. Алдымен біз келесі лемманы дәлелдейік:

**Лемма.** *Егер* $f(x)$ *– мына* $(-a,a)$ *аралығында жұп функция болса, онда*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{o}^{a} f(x)dx;$$

егер $f(x)$ – тақ функция болса, онда

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = o.$$

Бұл лемманы дәлелдеу үшін мына

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,d\,x$$

интегралды екіге ажыратып жазамыз:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{o} f(x)dx + \int_{o}^{a} f(x)dx\,.$$

Енді осы кейінгі теңдіктің оң жағындағы бірінші интегралдағы $x$-тің орнына $-\ t$ қояйық. Сонда $f(x)=f(-t)=f(t)$, өйткені $f(x)$ – жұп функция және $dx=-dt$. Бұдан кейін

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=-\int_{a}^{o} f(t)\,dt+\int_{o}^{a} f(x)dx=2\int_{o}^{a} f(x)dx\,.$$

Егер, $f(x)$ – тақ функция болса, онда $f(x)=f(-t)=-f(t)$ және

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=+\int_{a}^{o} f(t)\,dt+\int_{o}^{a} f(x)\,dx=o\,.$$

Айталық $f(x),[-\pi,\pi]$ сегментінде анықталған жұп функция болсын. Онда көбейтінді $f(x)\cos nx$ да жұп болады, ал көбейтінді $f(x)\,sin\,nx$ тақ болады. Сондықтан, лемма бойынша бұл функция үшін Фурье коэффициенттері төмендегі теңдіктермен анықталады:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,cos\,nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{o}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$(n=0,1,2,\dots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,sin\,nx\,dx=o \tag{10}$$

$$(n=1,2,\dots)$$

Сонымен, жұп функция үшін Фурье қатары мына түрде болады:

$$f(x)\sim\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\,nx, \tag{11}$$

бұл қатардың коэффициенттері (10) формулалармен анықталады.

Енді $f(x)$, $[-\pi,\pi]$ сегментінде анықталған тақ функция болсын. Онда $f(x)\cos nx$ тақ функция болады да, ал $f(x)\,sin\,nx$ жұп функция болады. Ендеше бұл функция үшін лемма бойынша Фурье коэффициенттері келесі формулалармен анықталады:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,sin\,nx\,dx=o$$

$$(n = 0,1,2, \dots) \qquad (12)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sin\, nx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{o}^{\pi} f(x) \sin n\, x\, dx$$

$$(n = 1,2, \dots).$$

Сонымен, тақ функция үшін Фурье қатары мына түрде болады.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\, nx, \qquad (13)$$

мұндағы коэффициенттер (12) формулалармен анықталады.

**2.** Кейбір мәселелерде $[0, \pi]$ сегментінде берілген және бұл сегментте интегралданатын $f(x)$ функцияны Фурье қатарына не тек косинустар не тек синустар бойынша жіктеуге болады. Мұнда $f(x)$ жұп па немесе тақ па бәрібір.

Егер $f(x)$ функцияны $[0, \pi]$ сегментінде Фурье қатарына тек косинустар бойынша жіктесек, яғни

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\, nx, \qquad (11')$$

онда бұл қатардың коэффициенттері келесі формулалармен анықталады:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\, cos\, nx\, dx$$

$$(n = 0,1,2, \dots) \qquad (14)$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1,2,3, \dots)$$

Егер $f(x)$ функцияны $[0, \pi]$ сегментінде Фурье қатарына тек синустар бойынша жіктесек, яғни

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n sin\, nx, \qquad (13')$$

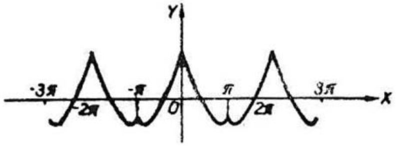
онда бұл қатардың коэффициенттері мына формулалармен анықталады:

$$a_n = 0, \quad (n = 0,1,2, \dots) \qquad (15)$$

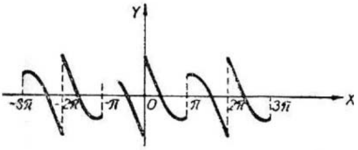
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\, sin\, nx\, dx$$

$$(n = 1,2, \dots)$$

Сонымен $[0, \pi]$ сегментінде берілген $f(x)$ функцияны не тек косинустардан, не тек синустардан тұратын Фурье қатарына жіктеуге болатын болды. $[0, \pi]$ сегментінде бұл екі қатардың қосындысы $f(x)$ функцияға тең. Ал $[0, \pi]$ сегментінің сыртындағы нүктелерде бұл (11′) және (13′) екі қатар әр түрлі функцияларды кескіндейді. $[0, \pi]$ сегментінің сыртында жатқан нүктелердегі (11′) қатардың кескіндейтін функциясын табу үшін берілген $f(x)$ функцияны тетелес жатқан $[-\pi, 0]$ сегментінде жұп етіп жалғастырамыз да $[-\pi, \pi]$ сегментінің сыртындағы барлық нүктелер үшін периодты (периоды $2^{\pi}$-ге тең) етіп жалғастырамыз (102-чертеж). $[0, \pi]$ сегментінің сыртында жатқан нүктелердегі (13′) қатардың кескіндейтін функциясын табу үшін берілген $f(x)$ функцияны тетелес жатқан $[-\pi, 0]$ сегментінде тақ етіп жалғастырамыз да $[-\pi, \pi]$ сегментінің сыртындағы барлық нүктелер үшін периодты етіп (периоды $2^{\pi}$-ге тең) жалғастырамыз (103-чертеж). Косинустар бойынша жіктегенде $f(-0) = f(+0)$, $f(-\pi + 0) = (\pi - 0)$, синустар бойынша жіктегенде $f(-0) = -f(0)$, $f(-\pi + 0) = -f(\pi - 0)$.



102-чертеж



103-чертеж

Мысалдар келтірейік.

а) Мына $f(x) = x^2$ функцияны $[-\pi, \pi]$ сегментінде Фурье қатарына жіктеу керек. Бұл функция жұп, сондықтан ол тек косинустар бойынша жіктелінеді және бұл функция үшін Фурье коэффициенттерін (10) формулалар негізінде анықтаймыз:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_o^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_o^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \frac{4}{n^2} cos\, nx = (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1,2, \dots)$$

сонымен, берілген $f(x) = x^2$ функция үшін Фурье қатары мына түрде болады:

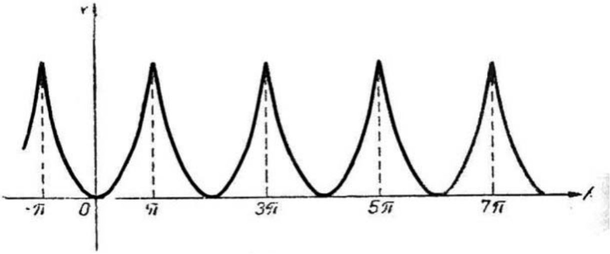
$$x^2 = \frac{2\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos nx =$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4\left( cos\; x - \frac{cos2x}{2^2} + \frac{cos3x}{3^2} - \cdots + (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + \cdots \right).$$

Осы табылған қатардың әрбір мүшесі екінші орыннан бастап өзінің абсолют шамасы жөнінде мүшелері оң және жинақты төмендегі қатардың

$$4\,(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots)$$

әрбір сәйкес мүшесінен кіші, олай болса құрылған қатар абсолют және бірқалыпты жинақты. Берілген $f(x) = x^2$ функцияның және оның жалғасының графигі 104-чертежде көрсетілген.



104-чертеж

б) Мына $f(x) = \cos zx$ функцияны $[-\pi, \pi]$ сегментінде Фурье қатарына жіктеу керек, мұнда $z$ – кез келген сан. Бұл функция жұп болғандықтан

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_o^{\pi} \cos zx\;\, dx = \frac{2sin\, \pi z}{\pi z},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_o^{\pi} \cos \mathrm{z}\;\, x \cos nx\, dx = (-1)^n \frac{2z \sin nz}{\pi(z^2 - n^2)}, (n = 1,2, \dots)$$

Демек, функция $f(x) = \cos zx$, $[-\pi, \pi]$ сегментінде Фурье қатарына мына түрде жіктеледі:

$$\cos zx = \frac{2z \sin \pi z}{\pi} \left[ \frac{1}{2z^2} + \frac{\cos x}{1^2 - z^2} - \frac{\cos 2x}{2^2 - z^2} + \frac{\cos 3x}{3^2 - z^2} - \cdots \right].$$

осы табылған қатардағы $x$-тің орнына $\pi$-ді қойсақ, сонда

$$ctg\pi z = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{n^2 - z^2} \right], \qquad (16)$$

(16) формуланы $ctgxz$-ті жабайы бөлшектерге жіктеу формуласы деп атайды. (16) теңдіктің екі жағын $z$ бойынша дифференциалдап, онан кейін мұның нәтижесінде шыққан теңдіктің екі жағын $\pi$-ге бөліп және таңбаларын керіге өзгертсек,

$$\frac{1}{\sin^2 \pi z} = \frac{1}{\pi^2} \left[ \frac{1}{z^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\bar{2}} + z^{\bar{2}}}{(n^{\bar{2}} - z^{\bar{2}})^{\bar{2}}} \right].$$

Егер мына теңбе-теңдікті

$$2 \frac{n^2 + z^2}{(n^2 - z^2)^2} = \frac{1}{(z + n)^2} + \frac{1}{(z - n)^2},$$

еске алсақ, онда

$$\frac{1}{sin^2 \pi z} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n)^2}, \qquad (17)$$

(16) теңдіктің екі жағын $\pi z$-ке көбейтіп, соған кейін $\pi z$-тің орнына $z$-ті алып табамыз

$$z\, ctg\, z = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{n^2 \pi^2 - z^2}. \qquad (18)$$

Мына теңбе-теңдікті

$$\frac{2z^2}{n^2 \pi^2 - z^2} = \frac{2z^2}{n^2 \pi^2 (1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2})} =$$

$$= 2 \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \left( 1 + \frac{z^2}{n^2 \pi^2} + \frac{z^4}{n^4 \pi^4} + \cdots + \frac{z^{2m}}{n^{2m} \pi^{2m}} + \cdots \right) (|z| < \pi)$$

еске алсақ, онда

$$z\, ctg\, z = 1 - 2 \frac{z^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \frac{z^4}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \cdots -$$

$$2\frac{z^{2m}}{\pi^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}-\cdots$$

$z$-тің орнына $\frac{z}{2}$-ті қойсақ, онда

$$\frac{z}{2}\,ctg\,\frac{z}{2}=1-\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}\right]z^{2m}.$$

Егер былай

$$2\frac{(2m)!}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}=B_m$$

ұйғарсақ, онда

$$\frac{z}{2}\,ctg\frac{z}{2}=1-\frac{B_1}{2!}z^2-\frac{B^2}{4!}z^4-\cdots-\frac{Bm}{(2m)!}z^2m-\cdots,$$

сөйтіп $\frac{z}{2}ctg\frac{z}{2}$ функцияны дәрежелік қатарға жіктедік, мұндағы $B_1, B_2, \dots, Bm, \dots$ сандарды *Бернулли сандары* деп атайды.

## § 4. Периоды 2 *l* функцияны Фурье қатарына жіктеу

Периоды $2l$-ге тең, $[-\ l,\ l]$ сегментінде анықталған $f(x)$ функцияны Фурье қатарына жіктеу керек. Ол үшін мынадай ауыстыру

$$x=\frac{lt}{\pi},\quad t=\frac{\pi x}{l},$$

жүргіземіз. Онда айнымалы $x, [-\ l,\ l]$ сегментінде өзгергенде, айнымалы $t, [-\ \pi,\ \pi]$ сегментінде өзгереді. Бұдан кейін

$$f(x)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=\varphi(t).$$

Мұнда $\varphi(t)-[-\pi,\pi]$ сегментінде анықталған функция. Сондықтан оны $[-\pi,\pi]$ сегментінде Фурье қатарына жіктейміз. Сонда

$$\varphi(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin n\,t) \qquad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt,\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,sin\,nt\,dt.\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

(19) өрнектегі және (20) формулалардағы $t$-ның орнына қайтадан $\frac{\pi x}{l}$-ді қойып, $f(x)$ функцияның $[- l,\ l]$ сегментіндегі Фурье қатарына жіктеуін табамыз:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n sin\frac{n\pi}{l}x), \qquad (21)$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,d\,x, \\ &\qquad (n=0{,}1{,}2\,...) \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,sin\frac{n\pi}{l}x\,d\,x \\ &\qquad (n=1{,}2,...) \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Егер функция $f(x)$ мына $(0, l)$ интервалында анықталған болса, онда бұл функцияны не тек косинустар, не тек синустар бойынша жіктеуге болады:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n\|1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x. \qquad (23)$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_{o}^{l}f(x)dx, a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\ dx \qquad (24)$$
$$(n=1{,}2,...),$$

немесе

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad (25)$$

бұл қатардың коэффициенттері төмендегі формулалармен анықталады:

$$b_n=\frac{2}{}\int_{0}^{l}f(x)sin\frac{n\pi}{l}x\,dx. \qquad (26)$$
$$(n=1{,}2,...)$$

Мына функцияны

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{егер } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ l - x, \text{егер} \frac{l}{2} < x \leq l. \end{cases},$$

Фурье қатарына синустар бойынша жіктеу керек. Бұл функция $[0, l]$ сегментінде анықталған. Әуелі қатардың коэффициенттерін табамыз:

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) sin\frac{n\pi}{l} x\, d\, x = \frac{2}{l}\int_0^{l/2} x\, sin\frac{n\pi}{l} x\, d\, x +$$

$$+ \int_{1/2}^{l} (l - x) sin\frac{n\pi}{l} x\, d\, x = \frac{4l}{\pi^2 n^2} sin\frac{n\pi}{2}$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

бұдан кейін

$$\frac{4l}{\pi^2}\left( sin\frac{\pi}{l} x - \frac{sin\frac{3\pi}{l} x}{3^2} + \frac{sin\frac{5\pi}{l} x}{5^2} - \cdots + \right.$$

$$\left. +(-1)^n \frac{sin\frac{(2n+1)\pi}{l} x}{(2n+1)^2} + \cdots \right) = \begin{cases} x, \text{егер о} \leq x \leq \frac{l}{2}; \\ l - x, \text{егер} \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}$$

## § 5. Комплекс түрдегі Фурье қатары

$f(x)$ – мына $[-\pi, \pi]$ сегментінде интегралданатын функция болсын. Бұл функцияны Фурье қатарына жіктейік:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \\ &\qquad (n = 0,1,2, \dots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sin\, nx\, dx, \\ &\qquad (n = 1,2, \dots) \end{aligned} \right\} \qquad (28)$$

Эйлер формулалары бойынша

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \;;$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = i \;\cdot \frac{-e^{inx} + e^{-inx}}{2}.$$

Егер осы формулаларды (27) өрнекке апарып қойсақ, онда

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right).$$

Енді былай белгілейік

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}; \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$(n = 1,2, \dots)$. Сонда

$$f(x) \sim \mathrm{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{c}_n \, e^{inx} + c_{-n} \, e^{-inx})$$

немесе

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{c}_n \, e^{inx}. \tag{29}$$

(28) формулалардан табамыз

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \, sin \, nx) dx$$

немесе Эйлер формуласы бойынша

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \tag{30}$$

Сол (28) формулалардан табамыз:

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \, sin \, nx) dx.$$

Немесе Эйлер формуласы бойынша

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, e^{inx} dx. \tag{31}$$

## § 6. Дирихле интегралы

Егер берілген $f(x)$ функциясының $(a, b)$ аралығындағы үзіліс нүктелерінің саны шектеулі болып

$$\int_a^b f(x)dx$$

интегралы бар болып, шамасы бір белгілі тұрақты санынан аспаса, яғни

$$\int_a^b |f(x)|dx < K,$$

онда $f(x)$ функциясын $(a, b)$ аралығында абсолют интегралданатын функция деп атайды.

Енді $[-\pi, +\pi]$ аралығында абсолют интегралданатын $f(x)$ функцияны Фурье қатарына жіктейік. Сонда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\, cos\, kx + b_k sin\, kx), \tag{32}$$

мұнда

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt, \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\, dt, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, sin\, kt\, dx. (k = 1,2, \dots) \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

(32) Фурье қатарының $f(x)$ функцияға жинақтылығын зерттеу үшін оның дербес қосындысын интеграл арқылы өрнектейміз. (32) Фурье қатарының дербес қосындысы

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Осы теңдіктің оң жағындағы коэффициенттердің орнына олардың (33) өрнектерін қоямыз. Сонда

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}f(t) + \sum_{k=1}^{n} f(t)\,(\cos kt \cos kx + sin\, kt\; sin\, kx\right] dt$$

немесе

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right] dt. \qquad (34)$$

(34) теңдіктің оң жағындағы $t-x$ айырманың орнына $z$-ті қойсақ (яғни $t-x=z$), онда

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(x+z)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kz\right) dz.$$

$f(x)$ – периодты функция болғандықтан

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kz\right) dz. \qquad (35)$$

(35) теңдіктің оң жағындағы интеграл таңбасы ішіндегі қосындыны жеке алайық

$$\delta(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos\; kz = \frac{1}{2} + \cos\;\; z + cos\; 2z + \cdots + \cos nz.$$

Бұл теңбе-теңдіктің екі жағын $2sin\frac{z}{2}$-ке көбейтейік. Сонда

$$2sin\;\frac{z}{2}\delta(z) = sin\frac{z}{2} + 2sin\frac{z}{2}cos\; z + 2\; sin\frac{z}{2}\; cos\; 2z +$$

$$+\ldots+2\; sin\frac{z}{2}\; cos\; nz.$$

Немесе мына теңбе-теңдікті

$$2sin\;\frac{z}{2}\cos kz = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)z - \sin\;\left(k-\frac{1}{2}\right)z$$

еске алсақ сонда

$$2sin\;\frac{z}{2}\cdot\delta(z) = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z,$$

бұл арадан

$$\delta(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos\; kz = \frac{\sin\;(n+\frac{1}{2})z}{2sin\frac{z}{2}}, \qquad (36)$$

Енді, бұдан кейін (35) теңдік мына түрге көшеді:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin{(n+\frac{1}{2})z}}{sin\frac{z}{2}} dz. \qquad (37)$$

(37) теңдіктің оң жағындағы интегралды Дирихле интегралы деп атайды.

Дирихле интегралын біраз түрлендірейік:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x+z) \cdot \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{sin\frac{z}{2}} dz +$$

$$+\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{sin\frac{z}{2}} dz.$$

Бұл теңдіктің оң жағындағы бірінші интеграл таңбасы ішіндегі $z$-тің орнына – $z$-ті қойсақ, сонда

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} [f(x+z) + f(x-z)] \cdot \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{sin\frac{z}{2}}. \qquad (38)$$

(36) теңдіктің екі жағын z бойынша 0-ден $\pi$-ге дейін интегралдайық. Сонда

$$\frac{\pi}{2} = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{z}{2}} dz$$

немесе

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} 2 \cdot \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}} dz.$$

Осы кейінгі теңдіктің екі жағын $f(x)$-ке көбейтіп табамыз:

$$(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} 2f(x) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}} dz. \qquad (39)$$

## § 7. Риман-Лебег теоремасы

**Теорема.** *Егер* $f(x)$, $[a,b]$ *сегментінде абсолют интегралданатын функция болса, онда*

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b f(x)\,sin\,mx\,dx = 0, \qquad \lim_{m\to\infty}\int_a^b f(x)\,cos\,mx\,dx = 0.$$

Бұл теореманы дәлелдеу үшін екі жағдайды қараймыз. Бірінші жағдай: $f(x)$ – $[a,b]$ сегментінде үздіксіз болсын. Онда $f(x) -$ $[a,b]$ сегментінде бірқалыпты үздіксіз болады. Олай болса еркімізше сайлап алған оң $\varepsilon$ санына сәйкес және тек $\varepsilon$ ғана тәуелді $\delta = \delta(\varepsilon)$ саны табылып, мына $|x' - x''| < \delta$ теңсіздіктің орындалуынан келесі теңсіздік

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \tag{40}$$

орындалады. Мұнда $x'$ және $x'', -$ $[a,b]$ сегментінің кез келген нүктелері.

$[a,b]$ сегментін ұзындықтары $\delta$ санынан кіші болатындай $k$ бөлшек сегменттерге бөлеміз ($k$ саны $\delta$-ға тәуелді, демек $\varepsilon$ санына тәуелді болады, яғни $k = k(\varepsilon)$, өйткені $\varepsilon$ саны $\delta$ санына тәуелді). Бөлу нүктелері мынадай тәртіппен орналассын:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{k-1} < x_k = b.$$

Онда

$$\int_a^b f(x) sin\,mx\,dx = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\sin mx\,dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)]\sin mx\,dx +$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}\int_{x_i}^{x^{i+1}} f(x_i)\sin mx\,dx.$$

Функция $f(x)$, $[a,b]$ сегментінде үздіксіз болғандықтан, ол бұл сегментте шектелген болып табылады, яғни бір тұрақты $M$ саны табылып, $[a,b]$ сегментіндегі барлық $x$-тер үшін төмендегі теңсіздік

$$|f(x)| < M \tag{41}$$

орындалуға тиіс.

(40) және (41) теңсіздіктерді еске алып табамыз: біріншіден

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)]\sin mx\,dx\right| < \varepsilon\,(x_{i+1} - x_i) \tag{42}$$

екіншіден

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)\sin mx\,dx\right| \leq M\left[-\frac{\cos mx}{m}\right]_{x_i}^{x_{i+1}} \leq \frac{2M}{m} \qquad (43)$$

(42), (43) теңсіздіктер орындалу себепті келесі теңсіздік орындалады:

$$\left|\int_a^b f(x)\sin mx\,dx\right| < \varepsilon(b-a) + \frac{2kM}{m}. \qquad (44)$$

Берілген $\varepsilon$ саны бойынша $N = N(\varepsilon)$ санын мына $\frac{2kM}{m} < \varepsilon(b-a)$ теңсіздік осы $N$ санынан артық $m$ сандары үшін орындалатындай етіп сайлап аламыз $(m > N)$.

Ендеше (44) теңсіздік $N$ санынан артық барлық $m$ сандары $(m > N)$ үшін мына түрге көшеді:

$$\left|\int_a^b f(x)\sin mx\,dx\right| < \varepsilon(b-a) + \varepsilon(b-a) = 2\varepsilon(b-a).$$

Осы кейінгі теңсіздіктің орындалуы теореманы дәлелдейді.

Екінші жағдай: $f(x), -[a,b]$ сегментінде анықталған кез келген абсолют интегралданатын функция болсын. Мына $\text{c}_1, \text{c}_2, \ldots \text{c}_\text{p}$ $[a,b]$ сегментінің бойында жатқан, $f(x)$ – функцияның үзілісті нүктелері болсын. Онда

$$\int_a^b f(x) sin\, mx\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\, sin\, mx\,dx +$$

$$+\int_{c_1}^{c_2} f(x)\, sin\, mx\,dx + \ldots + \int_{c_p}^{b} f(x)\, sin\, mx\,dx. \qquad (45)$$

Айталық $[a,b]$ сегментінің ұштары $f(x)$ функция үшін үзілісті нүктелер болсын. Алдын ала берілген оң мейлінше құнарсыз аз $\varepsilon$ саны бойынша $\delta$ санын төмендегі теңсіздіктер

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \int_{b-\delta}^{b} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (46)$$

орындалатындай етіп алайық. (45) теңдік бойынша

$$\int_{a}^{b} f(x)\sin mx\,dx = \int_{a}^{a+b} f(x)\sin mx\,dx + \tag{47}$$

$$+\int_{a+b}^{b-\delta} f(x)\sin mx\,dx + \int_{b-\delta}^{b} f(x)\sin mx\,dx$$

$[a+\delta, b-\delta]$ сегментінде $f(x)$ үздіксіз. Сондықтан осының алдында ғана дәлелденген жағдай бойынша $\varepsilon$ санына сәйкес $N = N(\varepsilon)$ саны табылып, осы $N$ санынан артық барлық $m$-дер $(m > N$ үшін төмендегі теңсіздік

$$\left|\int_{a+\delta}^{b-\delta} f(x)\sin mx\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{48}$$

орындалуға тиіс.

Енді (47) теңдіктен табамыз:

$$\left|\int_{a}^{b} f(x)\sin mx\,dx\right| \leq \int_{a}^{a+b} f(x)\sin mx\,dx| +$$

$$|+\int_{a+\delta}^{b-\delta} f(x)\sin mx\,dx| + |\int_{b-\delta}^{b} f(x)\sin mx\,dx|.$$

(46), (48) теңсіздіктерді еске алсақ, онда $N$ санынан артық барлық $m$-дер $(m > N)$ үшін

$$|+\int_{a}^{b} f(x)\sin mx\,dx| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Бұл теңсіздіктің орындалуы теореманы дәлелдейді.

Мына теңдік те

$$\lim_{m\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\cos mx\,dx = 0$$

дәл осылай дәлелденеді.

Осы дәлелденген теоремадан мынадай қорытындыға келеміз: $[-\pi, \pi]$ сегментінде абсолют интегралданатын $f(x)$ функция үшін

Фурье коэффициенттері $n$ шексіздікке ұмтылғанда нольге ұмтылады, өйткені

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos\, nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sin\, nx\, dx.$$

Дәлелденген теорема мына шексіз $[a,\infty]$ аралық үшін де дұрыс болады, егер бұл аралықта $f(x)$ абсолют интегралданатын болса, яғни

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b f(x)\sin mx\, dx = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b f(x)\cos mx\, dx = 0.$$

**Риман теоремасы.** *Егер $f(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ аралығында екі абсолют интегралданатын функция $f(x)$ және $g(x)$ бір-біріне балама болса, онда бұл функциялардың Фурье қатарлары $x$ нүктесінде екеуі бірдей не жинақты, не жинақсыз болады. Басқаша айтқанда $x$ нүктесіндегі Фурье қатарының жинақтылығы осы нүктенің $f(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ аймағындағы $f(x)$ функцияның мәндеріне байланысты.*

Берілген екі функцияны Фурье қатарына жіктейік:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n sin\, nx),$$

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + \beta_n sin\, nx).$$

Бірінші қатардың дербес қосындысын $s_n(x)$ арқылы, ал екінші қатардың қосындысын $\sigma_n(x)$ арқылы белгілейік. Сонда (38) формула бойынша

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x+z) + f(x-z)]\frac{\sin\,(n+\frac{1}{2})z}{sin\frac{z}{2}}dz,$$

оң мейлінше құнарсыз аз $\varepsilon$ санын алайық та, кейінгі интегралды екіге айырып жазайық:

$$s_n(x) = \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\pi}$$

$[0,\pi]$ сегментінде функция $\frac{1}{sin\frac{z}{2}}$ үздіксіз, сондықтан бұл сегментте мына функция $\frac{f(x+z)+f(x-z)}{sin\frac{z}{2}}$ абсолют интегралданатын болады. Ендеше Риман-Лебег теоремасы бойынша

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{f(x+z)+f(x-z)}{sin\frac{z}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z\,dz=0.$$

Олай болса

$$s_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\varepsilon}\frac{f(x+z)+f(x-z)}{sin\frac{z}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z\,dz+\gamma_1 \qquad (49)$$

мұнда $\gamma_1$ – шексіз аз шама.
Дәл сол сияқты

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\varepsilon}\frac{g(x+z)+g(x-z)}{sin\frac{z}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})\,z\,dz+\gamma_2 \qquad (50)$$

Теореманың шарты бойынша (49) және (50) теңдіктердің оң жағында тұрған интегралдар өзара тең болуы керек. Сондықтан $S_n(x)-\sigma_n(x)=\gamma_1-\gamma_2$ – шексіз аз шама.

Егер $S_n(x),\sigma_n(x)$ екі қосындының біреуі тиянақты шекке ұмтылса, онда екіншісі де сол шекке ұмтылады.

## § 8. Фурье қатарының жинақтылығы

$[-\pi,\pi]$ сегментінде берілген $f(x)$ функцияны Фурье қатарына жіктейік:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (51)$$

Бұл қатардың дербес қосындысын $s_n(x)$ арқылы белгілесек, онда ол (38) арқылы өрнектеледі.

(51) Фурье қатары $f(x)$ функцияға жинақты болу үшін, $n$ шексіздікке ұмтылғанда мына $s_n(x)-f(x)$ айырманың нольге ұмтылуы қажетті және жеткілікті. Бұл қағида бізге функциялық қатар теориясынан белгілі.

Берілген $f(x)$ функцияны (39) формула арқылы өрнектейміз де (38) теңдіктен аламыз. Сонда

$$s_n(x)-f(x)=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+z)+f(x-z)-2f(x)}{sin\frac{z}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) zdz \qquad (52)$$

Егер мына қатынас $\frac{f(x+z)+f(x-z)-2f(x)}{sin\frac{z}{2}}$ айнымалы $z$ жөнінде $[0,\pi]$ сегментінде абсолют интегралданатын болса, онда (51) қатар $f(x)$ функцияға жинақты болады, яғни бұл қатардың қосындысы функция $f(x)$ болады.

Шынында, егер қатынас $\frac{f(x+z)+f(x-z)-2f(x)}{sin\frac{z}{2}}$ айнымалы $z$ бойынша абсолют интегралданатын болса, онда (52) теңдіктің оң жағында тұрған интегралға Риман-Лебег теоремасын әбден қолдануға болады. Егер еркімізше бір оң $\varepsilon$ санын сайлап алып, осы айтылып отырған қатынасты $[\varepsilon,\pi]$ сегментінде қарайтын болсақ, онда бұл қатынас $[\varepsilon,\pi]$ сегментінде абсолют интегралданатын функция болады. Сондықтан, осы айтылып отырған $\frac{f(x+z)+f(x-z)-2f(x)}{sin\frac{z}{2}}$ қатынастың $[0,\varepsilon]$ сегментінде интегралданатынын талап етуіміз керек.

**Дини теоремасы.** *Егер алдын ала берілген оң $\varepsilon$ саны қандай болса да функция $\Psi(z) = \frac{f(x+z)+f(x-z)-2f(x)}{z}, [0,\varepsilon]$ сегментінде абсолют интегралданатын болса, онда (51) Фурье қатары жинақты және оның қосындысы функция $f(x)$ болады.*

Егер функция $\psi(z), [0,\varepsilon]$ сегментінде абсолют интегралданатын болса, онда мына $\frac{f(x+z)+f(x-z)-2f(x)}{sin\frac{z}{2}}$ функция да бұл сегментте абсолют интегралданатын болады.

(52) теңдіктің он жағын екіге ажыратып жазамыз:

$$s_n(x) - f(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \frac{f(x+z)+f(x-z)-2f(x)}{sin\frac{z}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) z\,dz +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+z)+f(x-z)-2f(x)}{sin\frac{z}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) z\,dz. \qquad (53)$$

Интегралдар таңбасы ішіндегі бірінші көбейткіш функциялар $[0,\varepsilon]$ және $[\varepsilon,\pi]$ сегменттерінде абсолют интегралданатын болғандықтан, (53) теңдіктің оң жағында тұрған интегралдарға Риман-Лебег теоремасын қолдануға әбден болады. Ендеше

$$\lim_{n\to\infty}[S_n(x)-f(x)]=0 \text{ немесе } \lim_{n\to\infty}S_n(x)=f(x).$$

Сонымен, теорема дәлелденді.

Енді Дини теоремасының дербес түрлерін қарайық.

а) Айталық $x$ – берілген $f(x)$ функцияның бірінші тектес үзіліс нүктесі болсын. Егер мына функциялар $\frac{f(x+z)-f(x-0)}{z}$, $\frac{f(x-z)-f(x-0)}{z}$ $[0,\varepsilon]$ сегментінде айнымалы $z$ бойынша абсолют интегралданатын болса, онда Фурье қатары жинақты болады және оның қосындысы $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ -ге тең.

Егер былай $f(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, ұйғарсақ, онда

$$\left|\frac{f(x+z)+f(x-z)-2f(x)}{z}\right|\leq\frac{|f(x+z)-f(x+0)|}{z}+$$
$$+\frac{|f(x-z)-f(x-0)|}{z}.$$

Бұл теңсіздіктің орындалуынан мынадай қорытындыға келеміз: функция $\frac{f(x+z)+f(x-z)-2\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}}{z}$ мына $[0,\varepsilon]$ сегментінде абсолют интегралданатын функция. Олай болса бұл функцияға Дини теоремасын қолдануға болады. Сонда Фурье қатарының қосындысы тең $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

б) Егер функция $f(x)$, $x$ нүктесінде үздіксіз болса және мына функциялар $\frac{f(x+z)-f(x)}{z}$, $\frac{f(x-z)-f(x)}{z}$, $[0,\varepsilon]$ сегментінде айнымалы $z$ бойынша интегралданатын болса, онда Фурье қатары жинақты болады және оның қосындысы $f(x)$-ке тең.

Бұл пікірдің дұрыстығын мынадан байқауға болады:

$$\left|\frac{f(x+z)+f(x-z)-2f(x)}{z}\right|\leq\frac{|f(x+z)-f(x)|}{z}+$$
$$+\frac{|f(x-z)-f(x)|}{z}.$$

в) Егер функция $f(x)$, $x$ нүктесінде дифференциалданатын болса, онда Фурье қатары жинақты болады және оның қосындысы $f(x)$-ке тең.

Функция $f(x)$, $x$ нүктесінде дифференциалданатын болғандықтан мына шек

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}=f'(x)$$

бар болады. Сондықтан $z$-тің тым аз мәндері үшін функция $\frac{f(x+z)-f(x)}{z}$ шектелген болып табылады. Демек, функция $\frac{f(x+z)-f(x)}{z}$ айнымалы $z$ бойынша $[0,\varepsilon]$ сегментінде абсолют интегралданатын болып табылады. Ендеше б) ескертпе бойынша Фурье қатары жинақты және оның қосындысы $f(x)$.

г) Егер функция $f(x)$, $[-\pi,\pi]$ сегментінің барлық нүктелерінде дифференциалданатын болса, онда бұл функция үшін құрылған Фурье қатары жаңағы сегменттің ұштарында жинақты және оның қосындысы тең $\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$. $[-\pi,\pi]$ сегменттің бір жақ ұшын қарайық, мәселен $x=\pi, f(\pi-0)=f(\pi)$ және

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(\pi-z)-f(\pi)}{z}=-f'(\pi)$$

Демек, айнымалы $z$-тің тым аз мәндері үшін функция $\frac{f(\pi-z)+f(\pi)}{z}$ абсолют интегралданатын функция.

Дәл осы сияқты

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(-\pi+z)-f(-\pi)}{z}=f'(\pi).$$

Ендеше $\frac{f(-\pi+z)-f(-\pi)}{z}$ абсолют интегралданатын функция. Сондықтан ескертпе а) бойынша Фурье қатары жинақты және оның қосындысы тең $\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$

## § 9. Тригонометриялық көпмүшенің берілген функциядан орта квадраттық ауытқуы

**1.** Егер берілген функция $f(x)$ үздіксіз болғанымен бірақ оның туындысы болмаса, онда бұл функция үшін құрылған Фурье қатарының жинақты болмауы мүмкін. Үздіксіз функция үшін құрылған Фурье қатарының шексіз көп нүктелерде (мәселен барлық рационал нүктелерде) жинақсыз болуын мысал жүзінде көрсетуге болады.

Егер функция $f(x)$ үздіксіз болса және мұнымен қатар оның абсолют интегралданатын туындысы болса, онда Фурье қатары жай ғана жинақты болып қоймайды, бірқалыпты жинақты болады. Бұл мәселеге кейін ерекше тоқтаймыз.

Сонымен, берілген функция $f(x)$ үзілісті болмағанымен оның $[-\pi,\pi]$ сегментінде абсолют интегралданатын туындысы болмаса, онда бұл функция үшін құрылған Фурье қатарының жинақсыз болуы мүмкін де және жинақсыздық нүктелер жиыны $[-\pi, \pi]$ сегментінің ішінде жатқан бүтін интервалды құруы мүмкін[1].

Егер үздіксіз функция үшін құрылған Фурье қатары жинақты болмаса, онда бұл қатардың дербес қосындысы берілген функцияның жуық кескіні бола алмайды деген қорытындыға келуге бола ма? Осы қойылған сұраққа жауап беру «жуық» деген сөзді қай мағынада түсінеміз, міне соған байланысты. Бұл мәселеге түсінік беру үшін ықтималдықтар теориясында кездесетін «орта квадраттық қате» турасындағы ұғымға біраз ғана тоқтайық.

Айталық, біз бір шаманы бірнеше рет өлшейтін болайық. Бұл шаманы өлшеуден шыққан нәтижелер: $z_1, z_2, \dots, z_N$ , болсын. Бұл өлшеудегі кететін қателер болады: $z - z_1,\ z - z_{2\dots,}\ z - z_N$. Қателер оң да, теріс те болуы мүмкін, сондықтан қателердің квадратын алған қолайлы болады, өйткені бұл бір жағынан оң, екінші жағынан аз болады, әрине егер қатенің өзі тым аз болса.

Орта квадраттық қате келесі формуламен анықталады:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(z - z_k)^2. \tag{54}$$

(54) теңдіктің оң жағындағы өрнек, – қателер квадраттарының арифметикалық ортасын береді.

Енді тұрақты шаманың орнына $y = f(x)$ функцияны қарайық. Осы функция кескіндейтін қисықтың орнына басқа бір $y = \varphi(x)$ қисықты алатын болсақ, онда бұдан сөзсіз қате кетеді. Міне осы қатені бағалау керек. Мына $|f(x) - \varphi(x)|$ абсолют шаманы $x$ нүктесіндегі бір қисықтың екінші қисықтан ауытқуы деп қараймыз.

Сөйтіп, $(a, b)$ аралығында анықталған $y = f(x)$ функцияларды қарайық.

$(a, b)$ аралығын төмендегі тәртіппен $a = x_0 < x_1 < x_2 <\dots< x_{n-1} - < x = b$ орналасқан нүктелермен бірдей $n$ бөлшек $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \dots [x_{n-1}, x_i]$ сегменттерге бөлейік. Егер $f(x_i) - \varphi(x_i)$ айырманы мына $f(x_i)$-ті $\varphi(x_i)$ арқылы ауыстырғанда кететін қате деп қарайтын болсақ, онда былай

---

[1] Осы айтылып отырған жағдайды қанағаттандыратын үздіксіз функциялардың мысалдарын құрған совет академигі А.Н. Колмогоров.

$$\Delta^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) - \varphi(x_i)]^2 \tag{55}$$

ұйғарып орта квадраттық $\Delta$ қатені табамыз. Бұл қате тек $f(x)$ және $\varphi(x)$ функцияларға ғана тәуелді болып қоймайды, $x$ нүктелеріне де тәуелді болады. Бірақ бөлу нүктелері не неғұрлым көп болған сайын, соғұрлым $\varphi(x)$ функцияның $f(x)$ функциядан «орта квадраттық» ауытқуы аз болады.

$(a, b)$ аралығын бөлшек сегменттерге бөлу нүктелерінің саны шексіздікке, әрбір бөлшек сегментінің ұзындығы нольге ұмтылғанда $\Delta$ бір тияқнақты шекке ұмтылса, онда осы шекті $\varphi(x)$ функцияның $f(x)$ функциядан орта квадраттық ауытқуы деп атайды.

Сонымен, берілген анықтама бойынша $\varphi(x)$ функцияның $f(x)$ функциядан орта квадраттық ауытқуын табу үшін $n$-ді шексіздікке ал, барлық $x_{i+1} - x_i$ айырмаларды нольге ұмтылтып, (55) қосындыдан шек аламыз. $(a, b)$ аралығы бірдей бөлікке бөліну себепті $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$, бұл арадан

$\frac{1}{\pi} = \frac{x_{i+1} - x_i}{b-a}$ $(i = 0; 1,2, \dots, n-1)$. Ендеше

$$\Delta^2 = \frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) - \varphi(x_i)]^2(x_{i+1} - x_i)$$

және

$$lim\,\Delta^2 = \frac{1}{b-a}\ lim\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) - \varphi(x_i)]^2(x_{i+1} - x_i)$$

барлық $(x_{i+1} - x_i) \to 0$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx$$

$lim\,\Delta^2$-ты $\delta_n^2$ арқылы белгілеп табамыз:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx. \tag{56}$$

$\varepsilon$ – алдын ала берілген оң құнарсыз аз сан болсын. Егер $f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ болса, онда $\delta^2 < \frac{\varepsilon^2}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon^2$ немесе $|\delta| < \varepsilon$.

Бұл арадан мынадай қорытындыға келеміз: егер $\varphi(x)$ функцияның $f(x)$ функциядан әдеттегі мағынадағы ауытқуы тым аз болса, онда оның орта квадраттық ауытқуы да тым аз болады екен. Керісінше қорытынды дұрыс емес.

Енді орта квадраттық ауытқуды осындай жалпы қараудан ресми мәселеге көшеміз, атап айтқанда тригонометриялық көпмүшенің берілген функциядан орта квадраттық ауытқуын іздейміз.

$n$-інші ретті тригонометриялық көпмүше деп төмендегі өрнекті.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k cos\ kx+\beta_k sin\ kx) \qquad (57)$$

айтады, мұнда $a_0, a_1, \beta_1, a_2, \beta_2, \dots, a_n, \beta_n$ тұрақты сандар (коэффициенттер).

$f(x)-[-\pi,\pi]$ сегментінде берілген функция болсын.

Бұл жерде алдымызға мынадай мәселені қоямыз: $n$-інші ретті бүкіл тригонометриялық көпмүшелердің ішінен берілген $f(x)$ функцияға орта квадраттық жуықтауы тым жақын, немесе $f(x)$ функциядан орта квадраттық ауытқуы мейлінше аз тригонометриялық көпмүшені табу керек.

Тригонометриялық көпмүшенің берілген $f(x)$ функциядан орта квадраттық ауытқуы (56) формула бойынша былай өрнектеледі:

$$\delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}\ a_n cos\ kx+\beta_n sin\ kx]^2dx. \qquad (58)$$

Енді мәселе мынада: (57) тригонометриялық көпмүшенің берілген функциядан орта квадраттық ауытқуы ең аз болу үшін оның $a_0, a_1, \beta_1, a_2, \beta_2, \dots, a_n, \beta_n$ коэффициенттерін қалай сайлап алу керек. Осы қойылған мәселені шешу үшін, (58) теңдіктің оң жағындағы интеграл таңбасы ішіндегі өрнекті жеке алып квадратқа дәрежелейміз, яғни

$$[f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k cos\ kx+\beta_k sin\ kx)]^2=f^2(x)-a_0 f(x)-$$

$$-2\sum_{k=1}^{n}(a_k cos\ kx+\beta_k sin\ k)\,f(x)+\frac{a_0^2}{4}+\sum_{k=1}^{n}\big(a_k^2 cos^2kx+$$

$$+\beta_k^2 sin^2kx)+\sigma_n,$$

мұнда

$$\sigma_n = 2\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_k\alpha_i \cdot \cos kx \;\; cos\ ix +$$

$$+2\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}a_k\beta_i \cdot \cos kx \;\; sin\ ix + 2\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}\beta_k\beta i\ sin\ kx\ sin\ ix.$$

Бұдан кейін

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{a_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}[a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ cos\ xdx +$$

$$+\beta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ sin\ kx\ dx + \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + \beta_k^2\right), \qquad (59)$$

$\sigma_n$-нен алынған интегралдар нольге айналады.

Егер $f(x)$ функция үшін құрылған Фурье қатарының коэффициенттерін $a_k, b_k$ арқылы белгілесек, яғни

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

онда

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{\alpha_0 a_0}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k + \beta_k b_k) + \frac{a_0^2}{4} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + \beta_k^2\right), \qquad (60)$$

(60) теңдіктің оң жағына мына

$$\frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$$

өрнекті қосамыз және оны аламыз. Сонда

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{\alpha_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^2 + b_k^2\right) + \frac{1}{4}(\alpha_0 - a_0)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k - a_k)^2 - (\beta_k - b_k)^2]. \qquad (61)$$

Бізге $\delta_n$-нің ең аз мәнін табу керек. (61) теңдіктен біз мынадай қорытындыға келеміз: $\delta_n$-нің ең аз мәні егер (61) теңдіктің оң жағындағы оң қосылғыштар нольге тең болса, яғни

$$\frac{1}{4}(\alpha_0 - a_0)^2 = 0, (\alpha_k - a_k)2 + (\beta_k - b_k)^2 = 0,$$

болса ғана болады.

Бұл арадан $\alpha_0 = a_0, \alpha_k = a_k, \beta_k = b_k \ (k = 1,2, \dots, n)$.

Сонда

$$min\, \delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx - \frac{\alpha_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k^2 - b_k^2\right). \qquad (62)$$

Сөйтіп, жоғарыда алдымызға қойылған мәселенің шешуін бердік. Осы шешуден мынадай қорытынды жасаймыз: $n$-інші ретті тригонометриялық көпмүшелердің қайсысының коэффициенттері функция $f(x)$ үшін құрылған Фурье қатарының коэффициенттеріне тең, сонысының $f(x)$ функциядан орта квадраттық ауытқуы ең аз болады. Сондықтан Фурье қатары $f(x)$ функцияға әдеттегі мағынада жинақты болмағанымен оның бірінші *n* мүшелері қосындысының (дербес қосындысы) басқа тригонометриялық көпмүшеге қарағанда $f(x)$ функциядан орта квадраттық ауытқуы аз болады, яғни орта квадраттық жуықтау мағынасында Фурье қатарының дербес қосындысы $f(x)$ функцияға жақсы жуықтайды.

2. (62) теңдіктің сол жағы әрқашан да теріс емес, сондықтан

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \geq 0$$

немесе бұл арадан

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \qquad (63)$$

(63) теңсіздікті *Бессель теңсіздігі* деп атайды. Осы Бессель теңсіздігінен мынадай қорытындыға келеміз: $f(x)$ функциясы үшін Фурье коэффициенттерінің квадраттарынан құрылған сандық қатар

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \qquad (64)$$

жинақты, өйткені Бессель теңсіздігінің сол жағында тұрған өрнек (64) қатардың дербес қосындысы.

Егер $n$-ді шексіздікке ұмтылып Бессель теңсіздігінен шекке көшетін болсақ, онда

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx. \tag{65}$$

Егер $n$ шексіздікке ұмтылса, $min\,\delta_n$ нольге ұмтыла ма? Бұл – негізгі мәселердің бірі. (62) теңдіктен табамыз:

$$2\lim_{n\to\infty}min\,\delta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right). \tag{66}$$

Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\,min\,\delta_n^2$ болса, онда

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right). \tag{67}$$

(67) теңдікті А.М. Ляпунов түріндегі тұйықтық теңдеуі деп атайды.

## § 10. Фурье қатарының орта жинақтылығы

Мүшелері (*a, b*) аралығында анықталған келесі функциялық қатарды қарайық:

$$f_1(x)+f_2(x)+\,.\,.\,.+f_n(x)+\,.\,. \tag{68}$$

$$\text{Егер}\quad\lim_{n\to\infty}\int_a^b[f(x)-S_n(x)]^2dx=0\quad\textit{болса} \tag{69}$$

(68) функциялық қатарды (*a, b*) аралығында $f(x)$ функцияға орта жинақты деп атаймыз.

Мұнда $S_n(x)$ – (68) қатардың бірінші $n$ мүшелерінің қосындысы.

Фурье қатары үшін келесі теореманың дәлелдеуге болады.

**Теорема.** *Егер* $f(x)$ *функциясы үшін Ляпунов түріндегі тұйықтық теңдеуі орындалатын болса, онда оның Фурье қатары оған орта жинақты болады, және керісінше, егер Фурье қатары* $f(x)$ *функцияға орта жинақты болса, онда бұл функция үшін Ляпунов теңдеуі орындалады.*

Шынында

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)-\Big[\frac{a_0}{2}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(a_k cos\, kx + b_k sin\, kx)]\}^2 dx.$$

Немесе интеграл таңбасы ішіндегі квадрат жақшаларды ықшамдасақ, онда

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx - \frac{{a_0}^2}{4} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left({a_k}^2+{b_k}^2\right). \qquad (70)$$

Егер Фурье қатары $f(x)$ функцияға орта жинақты болса, онда анықтама бойынша (70) теңдіктің сол жағы нольге ұмтылады. Демек, Ляпунов теңдеуі орындалады. Егер Ляпунов теңдеуі орындалса, онда (70) теңдіктің сол жағы $n$ шексіздікке ұмтылғанда нольге ұмтылады. Демек, Фурье қатары $f(x)$ функцияға орта жинақты болады.

Ляпунов теңдеуі әрбір абсолют интегралданатын функция үшін орындалатын болады. Олай болса, әрбір абсолют интегралданатын функция үшін Фурье қатары орта жинақты болады.

Сонымен, егер $f(x)$ – абсолют интегралданатын функция болса, онда бұл функциядан коэффициенттері Фурье коэффициенттеріне тең $n$-інші ретті тригонометриялық көпмүшенің ауытқуы $n$ шексіздікке ұмтылғанда нольге ұмтылады.

## § 11. Дифференциалданатын функция үшін Фурье қатарының жинақтылығы

**Теорема.** *Егер бүкіл OX осі бойындағы үздіксіз* $f(x)$ *функцияның абсолют интегралданатын* $f'(x)$ *туындысы болса, онда бұл функция үшін құрылған Фурье қатары оған бүкіл OX осі бойында бірқалыпты жинақты болады.*

$a_n, b_n - f(x)$ функциясы үшін, ал $\alpha_n, \beta_n$ оның $f'(x)$ туындысы үшін Фурье қатарының коэффициенттері болсын. Сонда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n\, x\, dx, \;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos n\,x\,d\,x,\;\; \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin n\,x\,d\,x.$$

Бұл коэффициенттердің арасындағы байланысты табу үшін, бірінші екі интегралды бөлімшелеп интегралдаймыз.

Сонда

$$a_n = \frac{1}{\pi} f(x)\frac{sin\,n\,x}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f^{'}(x)\,sin\,n\,x\,d\,x = -\frac{1}{n}\beta_n,$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi} f(x)\frac{cos\,n\,x}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f^{'}(x)\cos n\,x\,d\,x = \frac{1}{n}a_n,$$

өйткені $f(x)$ периодты және х-тің барлық мәндері үшін үздіксіз болғандықтан, $f(\pi) = f(-\pi)$.

$f'(x)$ туынды үшін Бессель теңсіздігін жазып мынадай қорытындыға келеміз: сандық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left({\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2\right)$$

жинақты.

Мынадай $(A - B)^2 \geq 0$ теңсіздікті қарайық. Бұл теңсіздікті былай жазуға болады:

$A^2 - 2AB + B^2 \geq 0$ немесе $2AB \leq A^2 + B^2$, бұл арадан

$$AB \leq \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$$

Ендеше

$$AB \leq (A^2 + B^2). \qquad (71)$$

(71) теңсіздікке сүйеніп табамыз:

$$\left|\frac{1}{2}\beta_n\right| \leq \frac{1}{n^2} + {\beta_n}^2, \quad \left|\frac{1}{n}a_n\right| \leq \frac{1}{n^2} + {a_n}^2,$$

немесе

$$|a_n| \leq \frac{1}{n^2} + {\beta_n}^2, \quad |b_n| \leq \frac{1}{n^2} + {\alpha_n}^2$$

Енді $f(x)$ функциясы үшін құралған Фурье қатарын қаралық.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\,x + b_n\sin n\,x), \qquad (72)$$

$$|a_n\cos n\,x + b_n\sin n\,x| \leq \frac{2}{n^2} + \left({\alpha_n}^2 + {\beta_n}^2\right). \qquad (73)$$

(73) теңсіздіктен мынадай қорытынды жасауға болады:

(72) Фурье қатарының әрбір мүшесі өзінің абсолют шамасы жөніндегі мүшелері оң келесі

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2}+\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2\right)$$

жинақты қатардың әрбір сәйкес мүшесінен кіші. Ендеше Вейерштрасс белгісі бойынша (72) Фурье қатары бүкіл OX осінде бірқалыпты жинақты болады. $f(x)$ функцияның абсолют интегралданатын $f'(x)$ туындысы болғандықтан (72) Фурье қатары атап айтқанда $f(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты болады.

## § 12. Ортогональ системалар

[a, b] сегментінде анықталған төмендегі үздіксіз функциялар

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ .\ .\ .\ .\ ,\ \varphi_n(x),\ .\ .\ . \qquad (74)$$

системасын қарайық.

Егер төмендегі теңдіктер

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \qquad (75)$$

$$(m \neq n, n = 1, 2,\ \ .\ .\ .\ \ , m = 1, 2,\ .\ .\ .)$$

$$\int_a^b \varphi_n{}^2(x)dx \neq 0\ (n = 1, 2,\ .\ .\ .) \qquad (76)$$

орындалатын болса, (74) системаны [a, b] сегментінде ортогональ система деп атайды. Мысалы тригонометриялық функциялар 1, *Cos x, Sin x, Cos 2x, Sin 2x, ..., Cos nx, Sin nx, ...* системасы ұзындығы 2π-ге тең кез келген сегментте ортогональ, өйткені

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{1\pi} 1\cdot\sin n\,x\,d\,x = 0\ ;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos m\,x\,d\,x = 0$$

$$m \neq n.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin n\,x \sin m\,x\,dx = 0; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\,x \sin m\,x\,dx = 0.$$

$$m \neq n \qquad\qquad n \neq m$$

Егер мына теңдіктер

$$\int_a^b {\varphi_n}^2(x)d\,x = 1 \tag{77}$$

$$n = 1, 2,\ \ .\ .\ .$$

орындалса (74) системаны [a, b] сегментінде нормалданған система деп атайды.

Әрбір ортогональ системаны нормалауға болады. Ол үшін (74) системаны тұрақты $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n, \dots$ сандарға көбейтеміз. Бұл сандар мына шарттарды

$${\mu_n}^2 \int_a^b {\varphi_n}^2(x)dx = 1 \tag{77}$$

$$(n = 1, 2,.\ .\ .)$$

қанағаттандыру керек. Бұл арадан

$${\mu_n}^2 = \frac{1}{\int_a^b {\varphi_n}^2(x)dx}; \quad \mu_n = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b {\varphi_n}^2(x)dx}}. \tag{78}$$

$$(n = 2, 1,.\ .\ .)$$

Мына

$$\sqrt{\int_a^b {\varphi_n}^2(x)dx}$$

өрнекті $\varphi_n(x)$ *функцияның нормасы* деп атайды және оны мынадай символмен $\|\varphi\|$ белгілейді. Сонымен

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\int_a^b {\varphi_n}^2(x)dx} \qquad (n = 1, 2,.\ .\ .)$$

Мәселен тригонометриялық функциялар системасын нормалайық, ол үшін $\|\varphi\|$ норманы іздейміз.

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} cos^2\, n\, x\, d\, x} \; = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} sin^2\, n\, x\, d\, x} \; = \sqrt{\pi}$$

және

$$\|\varphi_1\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 d\, x} \; = \sqrt{2\pi.}$$

Ендеше

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \mu_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad (n = 1, 2).$$

Енді тригонометриялық системаны осы сандарға көбейтеміз. Сонда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ .\ .\ .\ .\ , \frac{\cos n\, x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin n\, x}{\sqrt{\pi}}, \ .\ .\ ..$$

Осы кейінгі тригонометриялық система ортогональ және нормаланған система.

## § 13. Ортогональ система бойынша Фурье қатарын құру

[a, b] сегментінде ортогональ функциялар системасы берілсін:

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ .\ .\ .\ , \varphi_n(x). \qquad (75)$$

Мұнымен бірге осы [a, b] сегментінде анықталған $f(x)$ функцияны қарайық.

Енді мәселе осы берілген $f(x)$ функцияны жоғарыдағы келтірілген ортогональ система бойынша қатарға жіктеу, яғни

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x) + .\ .\ . + c_n\varphi_n(x) + .\ .\ . , (78)$$

мұнда $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$ – тұрақты сандар. Осы тұрақты сандарды табуға тура келеді. Ол үшін (78) теңдіктің екі жағын $\varphi_n(x)$-ке көбейтеміз. Сонда

$$f(x)\ \varphi_n(x) = c_1\varphi_1(x)\ \varphi_n(x) + c_2\varphi_2(x)\ \varphi_n(x) +\ .\ .\ . +$$
$$+ c_{n-1}\ \varphi_{n-1}(x)\varphi_n(x) + c_n{\varphi_n}^2(x) +$$
$$+ c_{n+1}\ \varphi_{n+1}(x)\ \varphi_n(x) +\ .\ .\ . \qquad (79)$$

(79) қатар [a, b] сегментінде мүшелеп интегралданатын болсын деп ұйғарып, (79) теңдіктің екі жағын $a$-дан $b$-ге дейін интегралдайық. Сонда, система $\{\varphi_n(x)\}$ ортогональ болғандықтан

$$\int_a^b f(x)\ \varphi_n(x)dx = c_n \int_a^b \varphi_n{}^2(x)dx, \quad (n = 1, 2, . . .)$$

бұл арадан

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n{}^2(x)dx} = \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)dx}{\|\varphi_n\|^2} \qquad (80)$$

$$(n = 1, 2, . . .)$$

(80) формулалармен анықталатын коэффициенттерді $f(x)$ функциясы үшін (75) ортогональ функциялар системасы бойынша құрылған (79) Фурье қатарының коэффициенттері дейді.

Егер қаралып отырған система $\{\varphi_n(x)\}$ ортогональ және нормаланған болса, онда

$$c_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)dx \qquad (n = 1, 2, . . .) \qquad (81)$$

(80) немесе (81) формулалармен анықталатын коэффициенттердің орнына қойғаннан кейін шығатын қатар ($a$, $b$) аралығында жинақты бола ма, егер болса, онда оның қосындысы $f(x)$ функцияға тең бола ма? Міне (78) қатарды зерттеу мәселесі осылай қойылады.

Орта квадраттық ауытқу формуласы былай

$$\delta_n{}^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \varphi_k(x)\right]^2 dx$$

немесе бұл арадан квадрат жақшаларды ашып жіберіп, сонан кейін интегралдап табамыз:

$$(b-a)\ \delta_n{}^2 = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n} c_k{}^2 + \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k - c_k)^2.$$

Егер $(\gamma_k - c_k)^2 = 0$ болса, $\delta^2$-тың ең аз мәні болады. Немесе $\gamma_k = c_k (k = 1, 2, \dots, n)$. Ендеше

$$(b-a) min\ \delta_n{}^2 = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n} c_k{}^2.$$

Бұл теңдіктің сол жағы оң, сондықтан

$$\sum_{k=1}^{n} {c_k}^2 \leq \int_a^b f^2(x) d\, x.$$

Кейінгі теңсіздіктің орындалуы

$$\sum_{k=1}^{\infty} {c_k}^2$$

сандық қатардың жинақтылығын көрсетеді және бұл қатардың қосындысы төмендегі теңсіздікті қанағаттандырады:

$$\sum_{k=1}^{n} {c_k}^2 \leq \int_a^b f^2(x) d\, x.$$

Бұл жерде негізгі мәселелердің біреуі мынау: $n$ шексіздікке ұмтылғанда $min\, {\delta_n}^2$ нольге ұмтыла ма, жоқ па. Егер

$$\lim_{n\to\infty} min\, {\delta_n}^2 = 0, \qquad \text{онда}$$

$$\int_a^b f^2(x) d\, x = \sum_{k=1}^{\infty} {c_k}^2. \tag{82}$$

(82) теңдікті В.А. Стеклов түріндегі $f(x)$ функциясы үшін *тұйықтық теңдеуі* деп атайды.

Егер система $\{\varphi_n(x)\}$ нормаланған болмай, тек ортогональ ғана болса, онда В.А. Стеклов теңдеуі мына түрде болады:

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} {c_k}^2 \|\varphi_k\|^2. \tag{83}$$

Егер (83) теңдік орындалса, онда $\{\varphi_n(x)\}$ системасын *толық система* деп атайды.

## § 14. Фурье интегралы

1. Егер функция $f(x)$ $[-l, l]$ сегментінде берілсе және Фурье қатарының жинақтылық шарттарын қанағаттандыратын болса, онда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n cos \frac{n\pi}{l} x + b_n sin \frac{n\pi}{l} x \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\frac{\pi}{l}x}$$

$$a_n = \frac{1}{e}\int_{-l}^{l} f(t)cos\frac{n\pi}{l}tdt\ (n = 0, 1, 2, . . .)$$

$$b_n = \frac{1}{e}\int_{-l}^{l} f(t)sin\frac{n\pi}{l}tdt\ (n = 1, 2, . . .)$$

немесе

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-in\frac{\pi}{l}t}\,dt.$$

$f(x)$ функцияны периодты етіп жалғастырмай-ақ, *l*-ді шексіздікке ұмтылып $(l \to \infty)$ айнымалы *x*-тің барлық нақты мәндерінде анықталған периодсыз функция үшін аналитикалық өрнекті қалай табу керек?

Берілген $f(x)$ функцияның әрбір шектеулі аралықта абсолют интегралданатын туындысы болсын және $(-\infty, \infty)$ аралықта бұл функцияның өзі абсолют интегралданатын болсын, яғни

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = k,$$

мұнда *k* – тұрақты сан.

Егер *x* – үзіліс нүктелерін сипаттайтын болса, онда бұл нүктелердегі функцияның мәндерін былай анықтаймыз:

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Жоғарыда қойылған сұраққа келесі теорема жауап болып табылады.

**Теорема.** *Егер* $f(x)$ *функцияның әрбір шектеулі аралықта абсолют интегралданатын туындысы болса және* $(-\infty, +\infty)$ *аралықта бұл функцияның өзі абсолют интегралданатын болса, онда айнымалы x-тің барлық мәндері үшін төмендегі теңдік*

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha\,(t-x)dt = \frac{f(x+0) + f(x+0)}{2} \qquad (82)$$

*орындалады.*

Осы тұжырымдалған теореманы *Фурье теоремасы* деп, ал (82) теңдіктің сол жағындағы интегралды *Фурье интегралы* деп атайды.

(82) формуланың дұрыстығын дәлелдеу үшін, келесі теңдіктің

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\lambda} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha\,(t-x)dt = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

дұрыстығын дәлелдеу керек.

Кейінгі теңдіктің сол жағындағы интегралды $I(\lambda,x)$ арқылы белгілеп, интегралдау ретін ауыстырайық. Сонда

$$I(\lambda,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \int_{0}^{\lambda} \cos\alpha\,(t-x)dt \qquad (83)$$

функция $f(x)$ абсолют интегралданатын болғандықтан мына меншіксіз интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha\,(t-x)dt \qquad (84)$$

$\alpha$-ның барлық мәндерінде де бірқалыпты жинақты болады. Сондықтан, (84) интегралды параметр $\alpha$ бойынша интеграл таңбасы ішінде интегралдауға болады. Ендеше (83) формула дұрыс, яғни

$$I(\lambda,x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\lambda} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha\,(t-x)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \int_{0}^{\lambda} \cos\alpha\,(t-x)d\alpha.$$

Енді осы кейінгі теңдіктің оң жағындағы қайталама интегралдың ішкі интегралын $\alpha$ бойынша интегралдап табамыз:

$$I(\lambda,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{sin\lambda(t-x)}{t-x}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} f(t)\frac{sin\lambda(t-x)}{-x}dt + \frac{1}{\pi}\int_{x}^{\infty} f(t)\frac{sin\lambda(t-x)}{t-x}dt.$$

Бұл теңдіктің оң жағында тұрған бірінші интегралдағы $(t-x)$-тың орнына – *z*-ті екінші интегралдығы $t(x)$-тың орнына *z*-ті қойып табамыз:

$$I(\lambda,x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x-z)\frac{sin\lambda z}{z}dz + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+z)\frac{sin\lambda z}{z}dz. \qquad (85)$$

Енді біз мына теңдіктердің

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{\infty} f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}dz=\frac{1}{2}f(x-0) \qquad (86)$$

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{\infty} f(x+z)\frac{\sin\lambda z}{z}dz=\frac{1}{2}f(x+0)$$

дұрыстығын дәлелдейік.

$\varepsilon$ – алдын ала берілген оң құнарсыз аз сан болсын. Егер $z>1$ болса, онда $\lambda$ қандай болса да $\left|\frac{\sin\lambda z}{z}\right|<1$ болады, ал функция $f(x-z)$ теореманың шарты бойынша $(0_1+\infty)$ аралықта абсолют интегралданатын болғандықтан, бірден артық соншама үлкен $N$ саны $(N>1)$ табылып, $\lambda$ қандай болса да келесі теңсіздік орындалады:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{N}^{\infty} f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}dz\right|\leq\frac{1}{\pi}\int_{N}^{\infty}|f(x-z)|dt<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (87)$$

Енді төмендегі теңдікті

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{N} f(x+z)\frac{\sin\lambda z}{z}dz+\frac{f(x-0)}{2} \qquad (88)$$

пайдаланамыз. Екінші жағынан

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}dz=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}dz+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}dz. \qquad (89)$$

Енді $\lambda$-ны шексіздікке ұмтылтып, (89) теңдіктің екі жағынан шек алайық. Сонда

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\leftarrow\infty}\int_{0}^{\infty} f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}dz=\frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{N} f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}dz+$$

$$+\frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{N}^{\infty} f(x-z)\frac{\sin\lambda z}{z}dz.$$

(87) және (88) қатыстарды еске алып табамыз:

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{0}^{\infty} f(x-z)\frac{sin\,\lambda\,z}{z}dt=\frac{1}{2}f(x-0). \qquad (90)$$

Дәл осы сияқты

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_{0}^{\infty} f(x+z)\frac{sin\,\lambda\,z}{z}dz=\frac{1}{2}f(x+0) \qquad (91)$$

(85) теңдіктің екі жағынан шек алып табамыз:

$$\lim_{\pi\leftarrow\infty} I\,(\lambda,x)=\frac{f(x+0)f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\infty}^{0} d\alpha\int\limits_{\infty}^{\infty}(t)\cos\alpha(t-x)dt\,.$$

сонымен, теорема дәлелденді.

2. Функция $f(x)$ жұп болсын. Сонда

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} d\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha\,t\cos\alpha\,x\;d\,t+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} d\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha\,t\sin\alpha\,x\;d\,t.$$

ішкі интегралды жеке алайық:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha\,t\;d\,t=\int\limits_{-\infty}^{0} f(t)\cos\alpha\,t\;d\,t+\int\limits_{0}^{\infty} f(t)cos\;\alpha\,t\;d\,t.$$

Бұл теңдіктің оң жағында тұрған бірінші интегралдағы *t*-нің орнына – *t*-ні алсақ, онда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha\,t\;d\,t=2\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cos\alpha\,t\;d\,t.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha\,t\;d\,t=0.$$

Сонымен, жұп функция үшін

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\cos\alpha\,x\;d\,\alpha\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cos\alpha\,t\;d\,t.$$

Егер $f(x)$ – тақ болса, онда

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} sin\,\alpha\,x\;d\,x\int\limits_{0}^{\infty} f(t)\,sin\,\alpha\,t\;d\,t.$$

Егер функция $f(x)$ тек $(0,\infty)$ аралықта ғана анықталса, онда оны тетелес (көршілес) жатқан $(-\infty,0)$ интервалда жұп не тақ түрде жалғастырамыз. Сонда,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty cos\,\alpha\,x\,d\,x\int_0^\infty f\,(t) sin\,\alpha\,t\,d\,t,\ \ (x > 0)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty sin\,\alpha\,x\,d\,x\int_0^\infty f(t)\,sin\,\alpha\,t\,d\,t,\ \ (x > 0).$$

## § 15. Вейерштрасс теоремалары

1. Берілген $f(x)$ функцияны дәрежелік қатарға жіктеу үшін бір белгілі нүктеде оның барлық ретті туындылары болу керек. Егер бұл функцияның ешбір нүктеде тиянақты туындысы болмаса, онда оны Тейлор қатарына жіктеуге болмайды. Мұндай жағдайда функцияны дәрежелік қатарға жіктеуге болмағанымен, көпмүшелерден құрылған қатарға жіктеуге болады. Бұл жерде мәселені былай қоюға болады: еркімізше алынған үздіксіз $f(x)$ функцияны кез келген дәлдікпен көпмүше арқылы ауыстыруға бола ма? Осы қойылған сұраққа төмендегі теорема жауап береді.

**Теорема.** *Егер* $f(x)$ *функциясы [a, b] сегментінде үздіксіз болса, онда алдын ала берілген оң ε саны қандай болса да P(x) көпмүше табылып, келесі теңсіздік*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

*[a, b] сегментінің барлық x нүктелері үшін орындалады.*

Бұл теореманы Вейерштрасс теоремасы деп атайды. Осы тұжырымдалған теоремада *P(x)* көпмүшенің пішіні қандай екені айқындалмаған. Совет академигі С.Н. Бернштейн осы теоремада айтылып отырған көпмүшенің қандай екенін көрсетті.

Вейерштрасс теоремасын дәлелдеуден бұрын біз алдымен Бернштейн теоремасына тоқтап кетеміз. Мұның алдында мына екі

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k\ \alpha^k\ (1-x)^{n-k} = 1, \qquad (92)$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2\, C_n^k\ x^k\ (1-x)^{n-k} = nk(1-x) \qquad (93)$$

теңбе-теңдіктердің дұрыстығын дәлелдейік.

Ньютон биномының формуласы бойынша

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, \alpha^k \, b^{n-k}, \qquad (94)$$

егер осы теңбе-теңдіктегі $\alpha$-ның орнына $x$-ті $b$-нің орнына $1-x$-ті қойсақ, онда (92) теңбе-теңдік келіп шығады.

Енді (94) формуладағы $\alpha$-ның орнына $z$-ті $b$-нің орнына 1-ді қойсақ, сонда

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, z^k = (z+1)^n. \qquad (95)$$

(95) теңбе-теңдікті екі жағын $z$ бойынша дифференциалдап және бұдан шыққан нәтижені $z$-ке көбейтеміз. Сонда

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k \, z^k = n\, z(z+1)^{n-1}. \qquad (96)$$

Бұл теңбе-теңдікті тағы да $z$ бойынша дифференциалдап және бұдан шыққан нәтижені $z$-ке көбейтсек, сонда

$$\sum_{k-0}^{n} k^2 C_n^k \, z^k = n\, z(nz+1)(z+1)^{n-2}. \qquad (97)$$

(95), (96), (97) теңбе-теңдіктердегі $z$-тің орнына мына $\frac{x}{1-x}$ өрнекті қойып, содан кейін бұдан шыққан нәтижені $(1-x)^n$ өрнекке көбейтсек, сонда

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^k \, (1-x)^{n-k} = 1, \qquad (98)$$

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k \, x^k \, (1-x)^{n-k} = nx, \qquad (99)$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k \, x^k \, (1-x)^{n-k} = nx(nx+1-x). \qquad (100)$$

Енді (98) теңбе-теңдікті $n^2x^2$-қа, (99) теңбе-теңдікті – $2\pi x$-ке, ал (100) теңбе-теңдікті 1-ге көбейтіп оларды бір-бірімен қоссақ, (93) теңбе-теңдік келіп шығады.

(93) теңдіктің сол жағы келесі теңсіздікті

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \, \mathrm{C}_n^k \, x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{n}{4} \qquad (101)$$

қанағаттандырады. Мұны мынадан байқауға болады:

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 \geq 0$$

немесе бұл арадан

$$x(1 - x) \leq \frac{1}{4}.$$

Айталық $x$ мына $[0, 1]$ сегменттің кез келген нүктесін көрсететін болсын да, ал еркінше алынған оң сан болсын. Мына 0, 1, 2, ..., сандардың ішінде жатқан және төмендегі теңсіздікті

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta \qquad (102)$$

қанағаттандыратын натурал $k$ сандардың жиынын $\Delta_n(x)$ арқылы белгілейік. Сонда $\Delta_n(x)$ жиынына жататын $k$ наутрал сандар үшін (мұны қысқаша былай жазамыз: $k \epsilon \Delta_n(x)$ келесі теңсіздік

$$\sum_{k \epsilon \Delta_n(x)} C_n^k x^k \ (1 - x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2} \qquad (103)$$

орындалады.

Егер натурал сан $k, \Delta_n(x)$ жиынына жатса, онда (102) теңсіздік бойынша

$$1 \leq \frac{(k - nx)^2}{n^2\delta^2}.$$

Осы кейінгі теңсіздіктің екі жағын мына

$$\sum_{k \epsilon \Delta_n(x)} C_n^k x^k \ (1 - x)^{n-k}$$

өрнекке көбейтеміз. Сонда

$$\sum_{k \epsilon \Delta_n(x)} C_n^k \, x^k \ (1 - x)^{n-k} \leq \leq \frac{1}{n^2\delta^2} \qquad \sum_{k \epsilon \Delta_n(x)} (k - nx)^2 \ \ C_n^k \, x^k \ (1 - x)^{n-k}$$

Ал,

$$\sum_{k \epsilon \Delta_n(x)} (k - nx)^2 \ \ C_n^{\text{к}} x^{\text{к}} \ (1 - x)^{n-\text{к}} \leq \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 C_n^{\text{к}} x^{\text{к}} \ (1 - -x)^{n-\text{к}} \leq \frac{n}{4}.$$

Олай болса

$$\sum_{k \epsilon \Delta_n(x)} C_n^{\text{к}} x^{\text{к}} \ (1 - x)^{n-\text{к}} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Осы дәлелденген (103) теңсіздіктен мынадай қорытындыға келеміз: егер $n$ соншама үлкен болса, онда мына

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^{\text{к}} x^{\text{к}} \ (1 - x)^{n-\text{к}} \qquad (104)$$

қосынды құратын қосылғыштардың ішіндегі ең маңыздылары келесі теңсіздікті

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta \qquad (105)$$

қанағаттандыратын $k$ натурал санына сәйкес келетін қосылғыштар болады, ал басқалары (104) қосындының шамасына көп әсер етпейді.

$f(x)$ – мына $[0,1]$ сегментінде анықталған функция болсын. Төмендегі теңдікпен

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^{к} x^{к} \, (1-x)^{n-к}$$

анықталған көпмүшені *Бернштейн көпмүшесі* немесе *полиномы* деп атайды.

Егер функция $f(x)$ үздіксіз болса, онда $n$-нің аса үлкен мәндері үшін Бернштейн полиномымен бұл функцияның айырмасы мейлінше аз болуы мүмкін.

**С.Н. Бернштейн теоремасы.** *Егер функция* $f(x)$, $[0,1]$ *сегментінде үздіксіз болса, онда*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = f(x), \qquad (106)$$

*мұнда* $B_n(x)$ *көпмүшенің* $f(x)$ *функцияға ұмтылуы x бойынша бірқалыпты.*

*M* саны $f(x)$ функцияның абсолют шамасының ең үлкен мәні болсын. Функция $f(x)$, $[0,1]$ сегментінде үздіксіз болғандықтан, алдын ала берілген оң $\varepsilon$ санына $\delta$ саны табылып, мына

$$|x' - x''| < \delta$$

теңсіздіктің орындалуынан келесі теңсіздік

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

орындалады. Мұнда $x'$ пен $x''$ $[0,1]$ сегментінің кез келген нүктелері.

(92) теңбе-теңдіктің екі жағын $f(x)$-ке көбейтеміз. Сонда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k \, (1-x)^{n-k}.$$

Енді Бернштейн көпмүшесімен осы жазылған айырмасын қарайық:

$$B_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \qquad (107)$$

Мына *k=0, 1, 2, … n* наутрал сандардың біразы келесі

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta \qquad (105)$$

теңсіздікті, ал қалған біразы төмендегі

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta \qquad (102)$$

теңсіздікті қанағаттандырулары керек. (105) теңсіздікті қанағаттандыратын натурал $k$ сандардың жиынын $\Gamma_n(x)$ арқылы белгілесек, сонда (107) теңдіктің оң жағында тұрған қосынды екі қосындыға бөлінеді, яғни

$$B_n(x) + f(x) = \sum_{\Gamma}\left[\left(\frac{k}{n}\right) + f(x)\right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} +$$

$$+\sum_{\Delta}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) + f(x)\right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \qquad (108)$$

Бірінші қосындыдағы $f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)$ айырманың абсолют шамасы $\frac{\varepsilon}{2}$-ден кіші болады, өйткені $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta$. Ендеше

$$\left|\sum_{\text{г}}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\epsilon\mathit{\Gamma}_n(x)} C_n^k x^k\,(1-x)^{n-k}\,.$$

Ал екінші жағынан

$$\sum_{k\epsilon\mathit{\Gamma}_n(x)} C_n^k x^k\,\,(1-x)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{\Delta} C_n^k x^k\,\,(1-x)^{n-k} = 1.$$

Демек

$$\left|\sum_{\text{г}}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (109)$$

(108) теңдіктің оң жағында тұрған екінші қосындыдағы $f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)$ айырманың абсолют шамасы $2M$-нен артық емес, яғни

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq 2M.$$

Сондықтан да

$$\left|\sum_{\Delta}\right| \leq 2M \sum_{k\epsilon\Delta n(x)} C_n^{к}\, x^{к}(1-x)^{n-к}$$

(103) теңсіздікті еске алсақ, сонда

$$\left|\sum_{\Delta}\right| \leq \frac{M}{2n\delta^2}. \qquad (110)$$

Сөйтіп, (109) және (110) теңсіздіктер бойынша (108) теңдік келесі теңсіздікке

$$|B_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2}$$

айналады.

Енді $n$ санын мына $\frac{M}{n\delta^2} < \varepsilon$ теңсіздік орындалатындай етіп сайлап алайық. Сонда

$$|B_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

$n$ санын сайлап алу $x$-тің ешбір мәніне тәуелді емес. Олай болса алдымыздағы теңсіздік $[0, 1]$ сегментіндегі барлық $x$-тер үшін орындалады.

Енді жоғарыда тұжырымдалған Вейерштрасс теоремасын дәлелдейік.

Ол үшін келесі $f(t) = f[a + t(b - a)]$ функцияны қарайық. Бұл функция $[0, 1]$ сегментінде анықталған және онда үздіксіз. Сондықтан да Бернштейн теоремасы бойынша алдын ала берілген оң $\varepsilon$ саны қаншама аз болса да

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, t^k$$

көпмүше табылып, $[0, 1]$ сегменттің барлық $t$ нүктелері үшін келесі теңсіздік

$$\left| f[a + t(b - a)] - \sum_{k=0}^{n} C_k t^k \right| < \varepsilon$$

орындалады. Мұнда $t = \frac{x-a}{b-a}$; олай болса

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} C_k \left(\frac{x - a}{b - a}\right)^k \right| < \varepsilon.$$

Осы кейінгі теңсіздіктің орындалуы берілген $f(x)$ функцияға тілеген дәлдікпен жуықтайтын

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \left(\frac{x - a}{b - a}\right)^k$$

көпмүшенің болатындығын дәлелдейді. Сонымен, Вейерштрасс теоремасы дәлелденді.

Вейерштрасс теоремасының басқаша түрдегі тұжырымдауларын да келтіруге болады.

*$[a, b]$ сегментінде берілген әрбір үздіксіз фукнция $f(x)$ осы сегментте бірқалыпты жинақты көпмүшелер тізбегінің шектік функциясы болып табылады.*

*$[a, b]$ сегментінде берілген әрбір үздіксіз функция $f(x)$ көпмүшелерден тұратын және айтылып отырған сегментте бірқалыпты жинақты болатын қатарға жіктеледі.*

**2. Вейерштрастың екінші теоремасы.** *Егер $f(x)$ – үздіксіз, периодты (периоды 2π-ге тең) функция болса, онда әрбір алдын ала берілген оң  ε саны қандай болса да барлық х-тер үшін келесі теңсіздікті*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \tag{111}$$

*Қанағаттандыратын*

$$T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k coskx + \beta_k sinkx)$$

*тригонометриялық көпмүшені табуға болады.*

Бұл теореманы екінші түрде былай тұжырымдауға болады: *әрбір периодты бүкіл ОХ осінде үздіксіз фукнция $f(x)$ тригонометриялық көпмүшелерден тұратын бірқалыпты жинақты тізбектің шектік функциясы болып табылады.*

Бұл теореманың дәлелдемесін келтірмесек те болады.

### *Жаттығулар*

1. $f(x) = Ax^2 + Bx + C, 0 < x < 2\pi.$
2. $f(x) = \sin px, 0 < x < \pi.$ ($p$ – бүтін сан)
3. $f(x) = e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}$ косинустар бойынша.
4. $f(x) = kx(l - x), 0 \leq x \leq l.$
5. $f(x) = x, 0 \leq x \leq 2\pi.$
6. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{егер} - \pi < x < 0 \text{ болса;} \\ x, \text{егер } 0 \leq x < \pi \text{ болса.} \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{l}x, \text{ егер } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 0, \text{егер} \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$ косинустар бойынша.
8. $f(x) = \begin{cases} x, \text{ егер } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ l - x, \text{егер} \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}$ синустар бойынша.
9. $f(x) = chax, -\pi < x < \pi.$
10. $f(x) = shax, -\pi < x < \pi.$

# *Бесінші бөлім.*

# КӨП АЙНЫМАЛЫЛАР ФУНКЦИЯЛАРЫНЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУІ

## XVII ТАРАУ

## КӨП АЙНЫМАЛЫЛАР ФУНКЦИЯЛАРЫ ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ

### § 1. Көп айнымалылар функциясының ұғымы

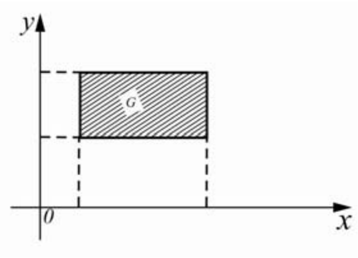
1. Біздің осы уақытқа дейін қарастырып келгеніміз бір айнымалының функциялары. Енді бұл тарауда қарайтынымыз көп айнымалылардың функциялары. Көп айнымалылар функцияларының теориясымен шұғылдануға негізгі себеп математикалық анализдің тәжірибелік мәселелерге жиі қолданылуы.

Табиғат құбылыстарын сипаттайтын шамалардың көпшілігі бір ғана айнымалыға тәуелді болып қоймайды, екі, үш, т.б. айнымалыларға тәуелді болады. Мәселен идеал газдың көлемі температура тұрақты болса ғана бір айнымалының функциясы болып табылады. Шынын айтқанда, температура мүлдем тұрақты болмайды. Ендеше айтылып отырған газдың көлемі қысым мен температураның, яғни екі айнымалының функциясы болатын болды.

Таза математикалық көзқараспен қарағанда да көп айнымалылар функцияларының теориясымен шұғылданудың қажеттігі бар.

Екі, үш айнымалының функцияларын қарастыру да жеткілікті, өйткені бұлар үшін дұрыс теория, көп айнымалылардың функциялары үшін де дұрыс болып шығады.

Алдымен біз екі $x$ пен $y$ айнымалыларды қарайық. Егер осы екі айнымалыны бір-бірінен бөлмей біріктіріп қарасақ, онда бір пар $(x, y)$ санға жазықтықтың белгілі бір тиянақты нүктесі сәйкес келетінін аналитикалық геометриядан білеміз. Мұнда $x$ айтылып отырған нүктенің абциссасын, ал $y$ – ординатасын сипаттайды. Бұл айнымалылардың өзгеруі алуан түрлі, яғни олар үзілісті және үздіксіз болып өзгереді.



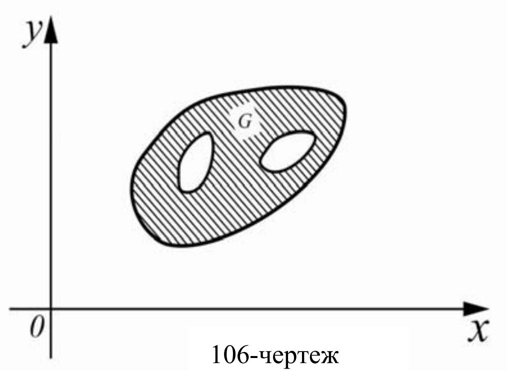
105-чертеж

Айталық айнымалылар x, y үздіксіз өзгеріп келесі теңсіздіктерді $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ қанағаттандыратын болсын. Жазықтықтың осы теңсіздіктерді қанағаттандыратын нүктелерінің жиыны тік төртбұрышты құрады (105-чертеж). Осы тік төртбұрышты *x,y* айнымалылардың өзгеру облысы дейді.

Егер айнымалылар *x, y* үздіксіз өзгеріп төмендегі теңдіктерді:

$$x_0 - \delta_1 \leq x \leq x_0 + \delta_1, \qquad y_0 - \delta_2 \leq y \leq y_0 + \delta_2$$

қанағаттандырса, онда жазықтықтың бұл айнымалыларға сәйкес нүктелерінің жиыны – центрі $(x_0, y_0)$ нүктесінде жатқан радиусы $\delta$-ға тең дөңгелекті кескіндейді. Бұл дөңгелекті *x, y* айнымалылардың өзгеру облысы дейді.



106-чертеж

Осы айтылып отырған екі облыс жиі кездесетін облыстар *x, y* айнымалылардың өзегеру облыстары тек тік төртбұрышпен дөңгелек қана болады деген ой болмау керек. Олардың өзгеру облысы бүкіл жазықтықтың өзі болуы да мүмкін. Онда мұндай өзгеру облысты былай жазып көрсетеміз:

$$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty.$$

Айтылып отырған *x, y* екі айнымалының өзгеру облысы жазықтықтың бір тұйық сызықпен қоршалынған бөлігі болуы мүмкін. Осы облысты қоршап тұрған сызықты, облыстың шекарасы дейді.

Егер облысты қоршап тұрған тұйық сызық біреу ғана болса және өз-өзімен қиылыспаса, онда мұндай облысты біржүйелі (бір байланысты) облыс дейді.

Егер облысты қоршап тұрған тұйық сызық біреу болмай бірнешеу болса, онда мұндай облысты көп жүйелі (байланысты) облыс дейді (106-чертеж) $(x_0, y_0)$ – жазықтықта жатқан нүкте болсын.

$(x_0, y_0)$ нүктенің аймағы деп центрі осы нүктенің өзінде жатқан тік төртбұрышты: $x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1,\ y_0 - \delta_2 < y < y_0 + \delta_2,$ немесе центрі $(x_0, y_0)$ нүктенің өзінде жатқан, радиусы $\delta$-ға тең $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ дөңгелекті айтады.

2. Енді *x, y, z* үш айнымалыны қарайық. Бұл үш айнымалыға кеңістіктің нүктесі сәйкес келеді.

Егер айнымалылар *x, y, z* үздіксіз өзгеріп төмендегі теңсіздіктерді $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq k$ қанағаттандырса, онда бұл айнымалылардың өзгеру облысы параллелепипед болады.

Егер айнымалылар *x, y, z* үздіксіз өзгеріп келесі теңсіздікті

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq \delta^2$$

қанағаттандырса, онда кеңістіктің бұл айнымалыларға сәйкес келетін нүктелерінің жиыны центрі $(x_0, y_0, z_0)$ нүктеде жатқан, радиусы $\delta$-ға тең шарды кескіндейді.

*x, y, z* үш айнымалы өзгеру облысы тек параллелепипед пен шар ғана болады деп ойламау керек. Кеңістіктің тұйық бетпен қоршалған бөлігі немесе әрбір дене үш айнымалының анықталу облысы бола алады. Осы денені немесе бәрі бір облысты қоршап тұрған бетті оның шекарасы дейді.

Шекараның бойында жатқан нүктелерді облысқа жатқызуға да, жатқызбауға да болады. Егер ол нүктелерді облысқа жатқызсақ, онда мұндай облысты тұйық облыс дейді; егер шекарада жатқан нүктелерді облыстың өзіне жатқызбасақ, онда мұндай облысты ашық облыс дейді. Мысалы мына теңсіздіктер

$$a < x < b, \qquad c < y < d, \qquad e < z < k$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2$$

сипатталатын облыстар ашық облыстар болады.

Егер айнымалылардың саны үштен артық болса, онда бұл айнымалылардың өзгеру облысын геометрия жүзінде көзге елестету қиын болады, өйткені реал кеңістік үш өлшеуішті ғана. Дегенмен, анализ мәселелеріне геометриялық мән беру мақсатымен *n* өлшеуішті кеңістік ұғымын енгізіп *n* сандардан тұратын $x_1,\ x_2 \dots, x_n$ системаны *n*-өлшеуішті кеңістіктің нүктесі деп атайды. Мысалы айнымалылар $x_1,\ x_2,\ x_3 \dots, x_n$ мына теңсіздіктерді

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, \qquad a_2 \leq x_2 \leq b_2,\ \ .\ .\ .\ , a_n \leq x_n \leq b_n$$

қанағаттандырса, онда бұл теңсіздіктерге сәйкес келетін геометриялық бейнені «$n$ – өлшеуішті параллелепипед» дейміз. Сол сияқты, егер айнымалылар $x_1, x_2, \ . \ . \ ., x_n$ төмендегі теңсіздікті

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ . \ . \ . + (x_n - x_n^0)^2 \leq \delta^2$$

қанағаттандырса, онда бұл теңсіздікке сәйкес келетін геометриялық бейне «n – өлшеуішті шар» болады.

3. Енді көп айнымалылар функциясының ұғымына келейік. Айнымалы *x, y, z, G* облысында өзгеретін болсын.

Егер *G* облысының әрбір (*x, y, z*) нүктесіне белгілі бір ереже немесе бір заң бойынша айнымалы *u*-дың тиісті мәні сәйкес келсе, онда осы айнымалы *u*-ды үздіксіз өзгертетін *x, y, z* тәуелсіз айнымалылардың функциясы деп атайды және оны былай белгілейді $u = \mathfrak{f}(x, y, z)$.

*G* облысын $u = \mathfrak{f}(x, y, z)$ функцияның анықталу немесе берілу облысы деп атайды.

Егер *G* облысының әрбір $(x, y, z)$ нүктесіне айнымалы *u*-дың тек бір ғана мәні сәйкес келсе, онда *u*-ды бірмәнді функция деп атайды.

Мысал үшін келесі функцияны қарайық: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Осы функцияның анықталу облысын табайық. Функция *z* тек нақты мәндерді ғана қабылдау үшін түбір ішіндегі өрнек теріс болмауы керек, яғни $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ немесе $x^2 + y^2 \leq 1$. Жазықтықтың осы теңсіздікті қанағаттандыратын x, y нүктелерінің жиыны центрі координаталардың бас нүктесінде жатқан радиусы бірге тең дөңгелек болып табылады. Сөйтіп, мысалға алынып отырған $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ функцияның анықталу облысы центрі координаталардың бас нүктесінде жатқан, радиусы бірге тең дөңгелек болатын болды.

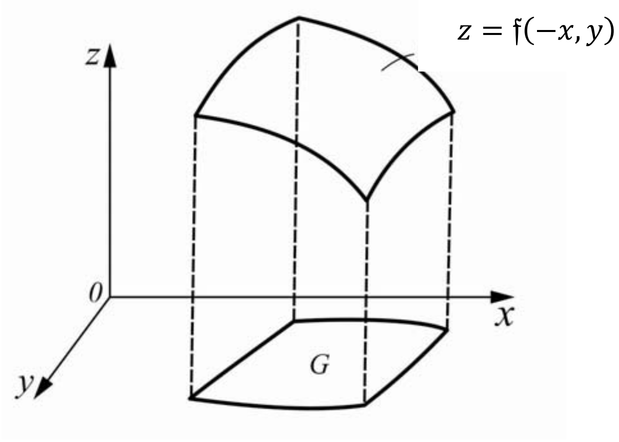
Енді мына үш айнымалының функциясын қарайық: $u = = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$. Бұл функция тек нақты мәндерді ғана қабылдау үшін, түбір ішіндегі өрнек теріс болмауы керек, яғни

$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \geq 0$ немесе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$. Кеңістіктің осы теңсіздікті қанағаттандыратын нүктелерінің жиыны эллипсоидтты кескіндейді. Ендеше мысал үшін алынып отырған

$u = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$ функцияның анықталу облысы эллипсоид болады.

4. Енді екі айнымалының функциясының геометриялық мағынасына тоқтайық. Бір айнымалының функциясының геометриялық кескіні қисық сызық болатыны бізге белгілі.

Жазықтықтың *G* облысында анықталған бірмәнді $z = \mathfrak{f}(x, y)$ функцияны қарайық. Бұл функцияға геометриялық мағына беру үшін кеңістіктегі тік бұрышты декарттық координаталардың *xoyz* системасын қарауға тура келеді. Облыс *G xoy* жазықтығында жатсын. Осы *G* облысынан бір тиянақты *(x, y)* нүктені сайлап алсақ, онда бұл нүктеге кеңістіктегі, апликатасы $z = \mathfrak{f}(x, y)$ болатын нүкте сәйкес келеді. Егер нүкте *(x, y)* бүкіл *G* облысын жасайтын болса, онда кеңістіктің, апликатасы $z = \mathfrak{f}(x, y)$ нүктесі болатын бір геометриялық бейнені кескіндейді. Әрине, бұл геометриялық бейне бет болып табылады.



107-чертеж

Сонымен, екі айнымалының функциясының геометриялық кескіні бет болып табылатын болды. Мына теңдікті $z = \mathfrak{f}(x, y)$ беттің теңдеуі деп атайды (107-чертеж).

Мәселен, функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ центрі координат бас нүктесінде жатқан радиусы бірге тең сфераны кескіндейді; функция $z = x^2 + y^2$ айналу параболоидты кескіндейді; ал функциялар $z = x^2 - y^2$, $z = x\,y$ гиперболалық параболоидты кескіндейді; сызықты функция $z = ax + by$ кеңістіктегі жазықтықты кескіндейді.

Егер беттің теңдеуінде тәуелсіз айнымалылардың біреуі болмаса (мысалы $z = g(x)$), онда бұл бет цилиндрлік бет болады.

## § 2. Көп айнымалылар функциясының шегі туралы ұғым

ХОУ жазықтығында жатқан $G$ облысында анықталған $z = \mathfrak{f}(x, y)$ функцияны қарайық. $(x_0, y_0)$ осы $G$ облысының бір тиянақты нүктесі болсын.

Егер алдын ала берілген оң құнарсыз $\varepsilon$ санына сәйкес $\delta = \delta(\varepsilon)$ саны табылып келесі теңсіздіктердің

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta \tag{1}$$

орындалуынан мына теңсіздік

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon \tag{2}$$

орындалатын болса, онда тұрақты $A$ санын айнымалы $x$, $x_0$-ге, айнымалы $y$, $y_0$-ге ұмтылғандағы $\mathfrak{f}(x, y)$ функцияның шегі деп атайды және мұны былай жазып көрсетеді:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

(1) және (2) теңсіздіктердің орнына мына теңсіздіктерді

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_1$$

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

қарастырса да болады.

Осы анықталған шекті $f(x, y)$ функцияның қос шегі деп атайды. Бұл шектен басқа $f(x, y)$ функцияның қайталанған шектері болу мүмкін. Алдымен $x$ өзінің $x_o$ шегіне, сонан кейін айнымалы $y$ өзінің $y_0$ шегіне ұмтылуы мүмкін, немесе керісінше болу мүмкін. Міне осы жағдайдағы $f(x, y)$ функцияның ұмтылатын шектерін қайталанған шектер деп атайды және олар былай белгіленеді:

$$\lim_{x \to x_0} [\lim_{y \to y_0} f(x, y)], \qquad \lim_{y \to y_0} [\lim_{x \to x_0} f(x, y)$$

Қос шекпен, қайталанған шектердің арасындағы байланыстылықты тағайындайтын келесі теореманы дәлелдейік.

**Теорема.** Егер $x_0$-ден айрықша барлық $x$-тер үшін

$$\mathit{lim}_{y \to y_0} \; f(x, y) = \psi(x)$$

ал $y_0$-ден айрықша барлық $y$-тер үшін

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$$

және қос шек

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$$

бар болатын болса, яғни

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A,$$

онда

$$\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right] = \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right] = A.$$

$\varepsilon$ – алдын ала берілген оң мейлінше құнарсыз аз сан болсын. Қос шектің анықтамасы бойынша $\varepsilon$ санына $\delta$ саны табылып, мына теңсіздіктердің $|x - x_0| < \delta,\ |y - y_0| < \delta$ орындалуынан, келесі теңсіздік

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$

орындалады. Мына теңсіздік $|y - y_0| < \delta$ орындалатындай етіп $y$-ті бекітеміз де, айнымалы $x$-ті $x_0$-ге ұмтыламыз. Сонда теореманың шарты бойынша

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y).$$

Олай болса $|y - y_0| < \delta$ болғанда (2) теңсіздік мынадай теңсіздікке айналады:

$$|\varphi(y) - A| < \varepsilon$$

немесе бәрібір

$$A = \lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]$$

Дәл осы сияқты етіп мына теңдіктің

$$A = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]$$

дұрыстығын дәлелдеуге болады. Сонымен, теорема дәлелденді.

Бір мысал келтірейік: $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ $x$-ті нольден айрықша деп қарап $y$-ті нольге ұмтылтып берілген функциядан шек алсақ, онда

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = -1 + y;$$

бұдан кейін $y$-ті нольге ұмтылып табамыз:

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right] = -1.$$

Ал, егер шек алу ретін өзгертсек, онда

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right] = \lim_{x\to 0}(1+x) = 1.$$

Сөйтіп, мысалға алынып отырған функцияда қайталанған шектер бір-біріне тең болмады. Мұның бұлай болу себебі қаралып отырған функцияның қос шегі жоқ.

## § 3. Көп айнымалылар функциясының үздіксіздігі

*ХОУ* жазықтығының *G* облысында анықталған $z = f(x,y)$ функцияны қарайық. ($x_0$, $y_0$) – *G* облысының бір тиянақты нүктесі болсын.

Егер де

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \mathfrak{f}(x_0,y_0) \tag{3}$$

теңдігі орындалатын болса, $z = f(x,y)$ функцияны ($x_0$, $y_0$) нүктесінде үздіксіз деп атайды.

Функция шегінің анықтамасын еске алып функцияның ($x_0$, $y_0$) нүктесіндегі үздіксіздігін былай анықтауға болады:

Егер алдын ала берілген оң мейлінше аз $\varepsilon$ санына сәйкес $\delta = \delta(\varepsilon, x_0, y_0)$ саны табылып, мына теңсіздіктің

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta \tag{4}$$

орындалуынан келесі теңсіздік

$$|f(x,y)(-\mathfrak{f}(x_0,y_0)| < \varepsilon \tag{5}$$

орындалса, онда $z = f(x,y)$ функцияны *G* облысының *($x_0$, $y_0$)* нүктесінде үздіксіз деп атайды,

Тәуелсіз айнымалы $x$-ке $x_0$ нүктесінде $\Delta x$ өсімшені, $y$-ке $y_0$ нүктесінде $\Delta y$ өсімшені берейік. Сонда $x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y,$

$$f(x,y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y);$$

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0).$$

Бұл айырманы $z = f(x,y)$ функцияның $(x_0,y_0)$ нүктесіндегі толық өсімшесі деп атайды және оны былай белгілейді:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0).$$

Енді жоғарыдағы (5) және (4) теңсіздіктердің орнына мына теңсіздіктер пайда болады:

$$|\Delta z| = \left|f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f\left(x_{0,}, y_0\right)\right| < \varepsilon$$

егер $|\Delta x| < \delta, |\Delta y| < \delta$ болса. Бұл арадан мынадай анықтамаға келеміз: егер тәуелсіз айнымалылардың *($x_0$, $y_0$)* нүктесіндегі шексіз аз өсімшесіне функцияның да шексіз аз өсімшесі сәйкес келсе, онда $z = f(x, y)$ функцияны $(x_0, y_0)$ нүктесінде үздіксіз деп атайды.

Егер функция $z = f\ (x, y)$, $G$ облысының әрбір нүктесінде үздіксіз болса, онда бұл функцияны $G$ облысында үздіксіз дейді.

Егер функция $z = f\ (x, y)$, $(x_0, y_0)$ нүктесінде үздіксіз болса, онда бұл функция осы $(x_0, y_0)$ нүктесінде жеке $x$ және $y$ бойынша да үздіксіз болады. Ал, функция $z = f(x, y)$ жеке $x$ және $y$ бойынша үздіксіз болғанымен, $(x_0, y_0)$ нүктесінде $x,y$ бойынша бірдей үздіксіз болмауы мүмкін.

Егер (4) теңсіздіктердің әрбір жағын квадраттап қоссақ, онда $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < 2^{\delta^2}$.

Мұндай теңсіздікті немесе бәрі бір (4) теңсіздіктерді қанағаттандыратын $(x, y)$ нүктелерінің жиынын $(x_0, y_0)$ нүктесінің аймағы деп атайтыны туралы біз жоғарыда айттық. Міне осыны еске алып $(x_0, y_0)$ нүктесіндегі функцияның үздіксіздігін былай анықтауға болады. Егер $(x_0, y_0)$ нүктесінің кішкентай аймағының ішінде жатқан барлық $(x, y)$ нүктелер үшін (5) теңсіздік орындалса, $z = f(x, y)$ функцияны $(x_0, y_0)$ нүктесінде үздіксіз деп атайды.

Функция $z = f(x, y)$, $G$ облысында үздіксіз болсын. Онда жоғарыда берілген анықтама бойынша алдын ала сайлап алған $\varepsilon$ санына сәйкес $G$ облысының әрбір $(x_0, y_0)$ нүктесі үшін $\delta$ саны табылып (4) теңсіздіктердің орындалуынан (5) теңсіздік орындалуға тиіс. Мұнда $\delta$ саны жалғыз $\varepsilon$-ге ғана емес, үздіксіздік анықталып отырған $(x_0, y_0)$ нүктесіне де тәуелді болады. Былайша айтқанда облыстың әрбір нүктесі үшін әр түрлі тиісті $\delta$ саны табылады. Бұл арадан мынадай сұрақ туады: берілген оң $\varepsilon$ санына сәйкес, облыстың барлық нүктелеріне жарарлық $\delta$ саны табыла ма, жоқ па? Егер мұндай $\delta$ саны табылса, онда $f(x, y)$ функцияны $G$ облысында бірқалыпты үздіксіз деп атайды. Бұл ұғымның дәл анықтамасын берейік.

Егер алдын ала берілген оң мейлінше аз $\varepsilon$ санына сәйкес тек $\varepsilon$-ге ғана тәуелді $\delta = \delta(\varepsilon)$ саны табылып, $G$ облысының келесі теңсіздіктерді $|x' - x''| < \delta$, $|y' - y''| < \delta$ қанағаттандыратын әрбір $(x', y'), (x'', y'')$ екі нүктесі үшін төмендегі теңсіздік $|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$ орындалса, онда $z = f(x, y)$ функцияны $G$ облысында бірқалыпты үздіксіз дейді.

Жоғарыда берілген үздіксіздік анықтамасы тек екі айнымалының ғана емес, үш, төрт, т.б. айнымалылар функциялары үшін де әбден дұрыс болады.

Бір айнымалының үздіксіз функцияларына тән қасиеттер көп айнымалылардың үздіксіз функцияларына да тән. Сондықтан бұл қасиеттерге ерекше тоқталамыз.

1) Саны шектеулі үздіксіз функциялардың қосындысы, айырмасы, көбейтіндісі және екі үздіксіз функциялардың бөліндісі (бөлгіш функция қарастырылып отырған облыстың барлық нүктелерінде нольге тең емес) үздіксіз болады. Бұл қасиет бір айнымалының функциялары үшін қалай дәлелденсе, мұнда да солай дәлелденеді.

2) $(D)$ облысының әрбір нүктесінде барлық айнымалылар бойынша үздіксіз $F\ (x,\ y,\ z)$ функцияны қарайық. Айталық осы функцияның аргументтері $x,\ y,\ z$ мына $u,\ v$ айнымалылардың функциялары болсын және бұл функциялар $(\Delta)$ облысында үздіксіз болсын. Және мұнда былай: $u,\ v$ айнымалылар $(\Delta)$ облысында өзгергенде нүкте $(x,\ y,\ z)$ мына $(D)$ облысының сыртына шықпауы керек. Міне осы айтылған шарттар орындалғанда мына $F[\varphi_1(u,v)], \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v)$ күрделі функция $(\Delta)$ облысында үздіксіз болады.

Бұл қасиет те бір айнымалының функциясы үшін қалай дәлелденсе, мұнда да солай дәлелденеді. Сондықтан оның дәлелденуіне тоқтамаймыз.

Енді қалған қасиеттерді екі айнымалының функциялары үшін қарастырамыз. Өйткені бұл қасиеттер бәрібір екіден артық көп айнымалылар функциялары үшін де дұрыс болып табылады.

**3. Коши теоремасы.** *Егер функция $f(x,y)$ біржүйелі (байланысты) (D) облысында үздіксіз болса және осы облыстың $(x_0,\ y_0)$, $(x_1,\ y_1)$ нүктелерінде A, B мәндерді қабылдаса, яғни $f(x_0,y_0) = A,\ f(x_1,y_1) = B$ онда функция $f(x,y)$ мына A мен B-нің арасында жатқан барлық мәндерді қабылдайды.*

Бұл теореманы былай дәлелдеуге болады. Айталық $A$ саны $B$ санынан кіші болсын ($A< B$) және $C$ – осы $A$ мен $B$-нің арасында жатқан кез келген сан болсын, яғни $A< C< B$. Облыс $(D)$ біржүйелі (бірбайланысты) болғандықтан, оның кез келген $(x_0,\ y_0)$, $(x_1,\ y_1)$ екі нүктесін облыстың ішінде жататын үздіксіз қисықпен қосуға болады. Бұл қисықтың теңдеулері мынадай болсын:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

мұнда параметр *t* мына *($t_0$, $t_1$)* аралығында өзгеретін болсын да, ал $x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0)$ және $x_1 = \varphi(t_1),\ y_1 = \psi(t_1)$ болсын.

Егер нүкте $(x, y)$ мына $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ қисықтың бойында өзгеретін болса, онда бастапқы берілген функция $f(x,y)$ айнымалы $t$-нің күрделі функциясына айналады, атап айтқанда: $F(t) = f[\varphi(t),\ \psi(t)]$, (мұнда $t_0 \leq t \leq t_1$). Жоғарыда айтылып (кеткен 2) қасиет бойынша күрделі функция $F(t) = f[\varphi(t),\ \psi(t)]$ *($t_0$, $t_1$)* аралығындағы үздіксіз. Мына теңдіктердің:

$$F = (t_0) = f[\psi(t_0), \psi(t_0)] = f(x_0, y_0) = A,$$
$$f = (t_1) = f[\psi(t_1), \psi(t_1)] = f(x_1, y_1) = B$$

орындалатындығы өзінен-өзі айқын. Сонымен, функция $F = (t\,) = f[\varphi(t),\ \psi(t)]$ бір айнымалының функциясына арналған Кошидің екінші теоремасының барлық шарттарын қанағаттандыратын болды. Ендеше $t_0$ мен $t_1$-дің арасында жатқан $t'$ нүктесі табылып, осы $t'$ нүктесіндегі $F(t)$ функцияның мәні *C* санына тең болады, яғни

$$F = (t') = f[\psi(t'), \psi(t')] = C.$$

Ал $\varphi(t') = x', \psi(t') = y'$ олай болса $f(x'), y') = C$.

Сөйтіп (*D*) облысының бойында жатқан $(x',\ y')$ нүктесі табылып, осы нүктедегі $f(x,\ y)$ функцияның мәні С санына тең болатын болды. Міне осыны дәлелдеу керек еді.

**4. Вейерштрасс теоремасы.** *Егер функция $f(x,\ y)$ XOY жазықтығының тұйық (D) облысында үздіксіз болса, онда ол өзінің дәл жоғарғы немесе дәл төменгі шекаралығын қабылдайды. Былайша айтқанда егер M – үздіксіз $f(x,\ y)$ функцияның (D) облысындағы дәл жоғарғы шекаралығы болса, онда осы облыстың бойында жатқан бір ($x_0$, $y_0$) нүктесі табылып, осы нүктедегі функцияның мәні $f(x_0, y_0)$ мына M санына тең болады, яғни $f(x_0, y_0) = M$.*

Теореманың шартында айтылып отырған *($x_0$, $y_0$)* нүктені қарайық. Бұл нүктеде функция $f(x,\ y)$ үздіксіз. Сондықтан, кез келген оң $\varepsilon$ санына сәйкес $\delta$ саны табылып, мына теңсіздіктердің:

$$|x - x_0| \leq \delta, \quad |y - y_0| \leq \delta \qquad \text{(A)}$$

орындалуынан келесі теңсіздік:

$$|f(x,y) - \mathfrak{f}(x_0, y_0)| < \varepsilon, \qquad \text{(B)}$$

немесе

$$f(x_0, y_0) - \varepsilon < \ f(x,y) < f(x_0, y_0) + \varepsilon$$

орындалады.

Кейінгі теңсіздіктен мынадай қорытындыға келуге болады: $f(x_0, y_0) + \varepsilon$ саны $f(x, y)$ функцияның $(\overline{D})$ облысында қабылдайтын мәндерінен тұратын жиынның жоғарғы шекаралықтарының бірі болып табылады. Олай болса

$$M \leq f(x_0, y_0) + \varepsilon.$$

Екінші жағынан

$$f(x_0, y_0) \leq M.$$

Ендеше

$$0 \leq M - f(x_0, y_0) \leq \varepsilon.$$

$\varepsilon$ кез келген мейлінше аз оң сан, сондықтан да

$$f(x_0, y_0) = M.$$

5. Егер функция $f(x, y)$ $XOY$ жазықтығының тұйық $(\overline{D})$ облысында үздіксіз болса, онда ол бұл облыста шекараланған (шектелген) болады, басқаша айтқанда облыстың ешбір нүктесінде шексіздікке айналып кетпейді.

Бұл теореманың дәлелдеуін оқушылардың өздеріне қалдырамыз.

**6. Кантор теоремасы.** *Егер функция* $f(x, y)$ *тұйық* $(\overline{D})$ *облысында үздіксіз болса, онда бұл облыста бірқалыпты үздіксіз болады.*

Осы тұжырымдалған теореманы дәлелдеу үшін, берілген $\varepsilon > 0$ бойынша $(\overline{D})$ облысының барлық нүктелеріне жарайтындай $\delta > 0$ санын табуға болмайды деп қарсы жориық. Енді $(\overline{D})$ облысын $[a, b; c, d]$ тікбұрышты төртбұрышпен қоршайық та, осы тік төртбұрышты осьтерге параллель екі түзумен тең тік төртбұрышқа бөлейік. Сонда $(\overline{D})$ облысы да төрт бөлікке бөлінеді және осы бөліктердің ең болмағанда біреуі үшін санын табуға болмайды. Бұл бөлікті $(\overline{D_1})$ арқылы ал оны қоршап тұрған тік төртбұрышты $[a_1, b_1; c_1, d_1]$ арқылы белгілейік.

Сонда $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$, $d_1 - c_1 = \frac{d-c}{2}$.

Енді$[a_1, b_1; c_1, d_1]$ тік төртбұрышты тағы да жаңағыдай етіп тең төрт тік төртбұрышқа бөлеміз. Сонда $(\overline{D_1})$ облысында төрт бөлікке бөлінеді. Бұл бөліктердің ең болмағанда біреуі үшін $\delta$ санын табуға болмайды. Міне осы бөлікті $(\overline{D_2})$ арқылы белгілейік, ал оны қоршап тұрған тік төртбұрышты $[a_2, b_2; c_2, d_2]$ арқылы белгілейік.

Сонда

$$b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}, \qquad d_2 - c_2 = \frac{d-c}{2^2}.$$

Міне осы процесті соза берсек, сонда келесі тікбұрышты төртбұрыштар тізбегі келіп шығады:

$$[a_3,\ b_3;\ c_3, d_3];\ \ b_3 - a_3 = \frac{b-a}{2^3},\ \ d_3 - c_3 = \frac{d-c}{2^3},$$

$$[a_4,\ b_4;\ c_4, d_4];\ \ b_4 - c_4 = \frac{b-a}{2^4}, \qquad d_4 - c_4 = \frac{d-c}{2^4},$$

$$[a_n,\ b_n;\ c_n,\ d_n];\ \ b_n - c_n = \frac{b-a}{2^n}, \qquad d_n - c_n = \frac{d-c}{2^n},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Бұл тік төртбұрыштардың әрқайсысының ішінде жатқан $(\overline{D})$ облысының бөліктері үшін $\delta$ санын табуға болмайды. Ал

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0 \ \text{ және } \ \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} d_n = y_0.$$

Онымен бірге

$$a_n \leq x_0 \leq b_n,\ \ c_n \leq y_0 \leq d_n \qquad (n = 1, 2,\ .\ .\ .).$$

Ендеше нүкте *(x₀, y₀)* мына $(\overline{D})$ облысына жатады. Бұл нүктеде функция $f(x,y)$ үздіксіз. Сондықтан $\varepsilon > 0$ бойынша $\delta_0 > 0$ саны табылып, мына теңсіздіктердің $x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0$, $y_0 - \delta_0 < y < y_0 < \delta_0$ орындалуынан келесі теңсіздік

$$|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (6)$$

орындалады.

$(\overline{D})$ облысының төмендегі теңсіздіктерді $|\bar{x} - x_0| < \delta_0$, $|\bar{y} - y_0| < \delta_0$ қанағаттандыратын $(\bar{x},\ \bar{y})$ нүктесін алайық. Сонда бұл нүкте үшін

$$|f(\bar{x},\ \bar{y}) - \mathfrak{f}(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (7)$$

Келесі теңбе-теңдікті құрайық:

$$f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y}) = f(x,y) - f(x_0,y_0) + f(x_0,y_0) - f(\bar{x},\bar{y}).$$

Бұл арадан

$$|f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y})| \leq |\ f(x,y) - f(x_0,y_0)| + |f(x_0,y_0) - f(\bar{x},\bar{y})|.$$

(6) және (7) теңсіздіктерді еске алсақ, сонда

$$|f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y})| < \varepsilon.$$

Енді $\delta$ санын $\delta_0$ санының жартысына теңеп алайық, яғни $\delta = \frac{\delta_0}{2}$.

Сонда $\delta$ саны жоғарыда айтылған мағынада $[x_0 - \delta, x_0 + \delta, y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ кішкентай квадраттың ішкі бойында жатқан $(\bar{x}, \bar{y})$ нүктелердің барлығына да жарайды. Оны мынадан байқауға болады: егер нүкте $(\bar{x}, \bar{y})$ осы айтылып отырған кішкентай квадраттың ішінде жатса, ал $x$, $y$ сандарының мына $\bar{x}, \bar{y}$ сандардан айырмаларының абсолют шамалары $\delta$-дан кіші болса, онда нүкте $(x,\ y)$ даусыз мына $[x_0 - \delta_0,\ y_0 + \delta_0;\ y_0 - \delta_0,\ y_0 + \delta_0]$ үлкен квадраттың ішінде жатады. Ал сонда $\mathfrak{f}(x, y)$ функцияның осы нүктелердегі мәндерінің бір-бірінен айырмасының абсолют шамасы $\varepsilon$-нен кіші болады.

$n$-нің аса үлкен мәні үшін тік төртбұрышты төртбұрыш $[a_n, b_n;\ c_n, d_n]$ кішкентай $[x_0 - \delta_0,\ x_0 + \delta;\ y_0 - \delta,\ y_0 + \delta]$ квадраттың ішінде жатады, сондықтан осы квадрат үшін құрылған $\delta$ саны жоғарыда айтылған мағынада жаңағы тік төртбұрыштың барлық нүктелеріне де жарайды. Бұл жағдай $[a_n,\ b_n;\ c_n, d_n]$ тік төртбұрыштың қасиеттеріне қайшы келеді. Міне бұл қайшылық теореманы дәлелдейді.

# XVIII ТАРАУ
# КӨП АЙНЫМАЛЫЛАР ФУНКЦИЯЛАРЫН ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ

## § 1. Дербес туындылар

1. Кеңістіктің $D$ облысында анықталған үздіксіз $u = f(x, y, z)$ функцияны қарайық.

$y$ пен $z$-ті тұрақты деп қарап айнымалы $x$-ке $\Delta x$ өсімшені берейік. Сонда функция $u = f(x, y, z)$ бұған сәйкес $\Delta u$ өсімшені алады және $u + \Delta u_x = f(x + \Delta x, y, z)$ бұл арадан $\Delta u_x = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)$.

Осы кейінгі айырманы $u = f(x, y, z)$ функцияның айнымалы $x$ бойынша өсімшесі деп атайды.

Енді келесі $\frac{\Delta u_2}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$ қатынасты қарайық. Бұл қатынас $\Delta x$ өсімшенің функциясы болып табылады. Өсімше $\Delta x$-ті нольге ұмтылтып, осы қатынастан шек алайық; егер осы шек бар болса, онда оны $u = f(x, y, z)$ функцияның $(x, y, z)$ нүктесіндегі айнымалы $x$ бойынша алынған дербес туындысы деп атайды және оны былай белгілейді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x, y, z).$$

Дәл осы сияқты етіп $u = f(x, y, z)$ функцияның $(x, y, z)$ нүктесіндегі $y$ және $z$ бойынша алынған дербес туындыларын анықтауға болады:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u_y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, x, z) - f(x, y, z)}{\Delta y} = \frac{\partial u}{dy} = \frac{\partial f}{dy} == f'_y(x, y, z).$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u_z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} == f'_z(x, y, z).$$

Берілген $u = f(x, y, z)$ функцияның айнымалы $x$ бойынша дербес туындысын табу үшін бұл функциядағы $y$ пен $z$-ті тұрақты деп қарау керек; ал у бойынша оның дербес туындысын табу үшін $x$ пен $z$-ті тұрақты деп қарау керек; $z$ бойынша оның дербес туындысын табу үшін $x$ пен $y$-ті тұрақты деп қарау керек.

2. Енді дербес туындының геометриялық мағынасына тоқтайық. Ол үшін біз екі айнымалының үздіксіз функциясын қарастырамыз: $z = f(x, y)$. Екі айнымалының функциясы бетті кескіндейтіні туралы біз жоғарыда айттық. Егер х-ке тұрақты $x_0$ мәнін, у-ке тұрақты $y_0$ мәнін берсек, онда жаңағы беттің бойында жатқан $N(x_0, y_0, z = f(x_0, y_0))$ нүктесін табамыз. Мына $\frac{\partial z}{\partial x}$ дербес туындыны тапқанда у-ке тұрақты у мән беріп, х-ті ғана айнымалы деп қараймыз. Өстіп екі айнымалының $z = \mathfrak{f}(x, y)$ функциясын бір айнымалы х-тің функциясына айналдырамыз, яғни $z = f(x, y) = f_1(x)$.

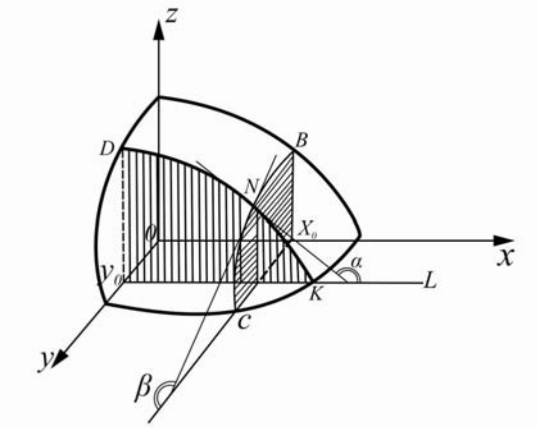
Бұл арадан

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = f'_x(x_0 y_0) = f'_1(x_0).$$

Теңдеу $y = y_0$ геометрия тілімен айтқанда XOZ координаталық жазықтыққа параллель жазықтықты кескіндейді. Ендеше функция $z = f(x, y) = f_1(x)$ жаңағы айтылып отырған $y = y_0$ жазықтық пен бастапқы берілген $z = f(x, y)$ функцияны кескіндейтін беттің қиылысу DNK сызығымен кескінделеді. Бір айнымалы функциясы туындысының геометриялық мағынасын еске алып мынадай қорытындыға келеміз: берілген $z = f(x, y)$ функцияның (x0, y0) нүктесінде айнымалы х бойынша алынған дербес туындысы $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f'_x(x_0 y_0)$ OX осімен DNK сызығына бастапқы берілген $z = f(x, y)$ функцияны кескіндейтін бетпен XOZ жазықтығына параллель $y = y_0$ жазықтықтың қиылысу сызығына $N(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)$ нүктесінде жүргізілген жанаманың арасындағы $\alpha$ бұрыштың тангенсін береді, яғни

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = f'_x(x_0, y_0) = tg\,\alpha.$$

Сол сияқты $z = f(x, y)$, функцияның айнымалы у бойынша алынған дербес туындысы $\left(\frac{dz}{dx}\right) = f'_y(x_0, y_0)$ ОУ осімен BNC сызығына (бастапқы берілген $z = f(x, y)$ функцияны кескіндейтін беттен YOZ жазықтығына параллель $x = x_0$ жазықтықтың қиылысу сызығына) $N(x_0, y_0 = f(x_0, y_0))$ нүктесінде жүргізілген жанаманың арасындағы $\beta$ бұрыштың тангенсін сипаттайды (108-чертеж) яғни



108-чертеж

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = f'_y(x_0, y_0) = tg\,\beta.$$

3. Бірінші ретті $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ туындылардың өздерін қайтадан *x* пен *y*-тің функциялары деп қарап оларды тағы да айнымалы *x* немесе *y* бойынша біртіндеп дифференциалдап $z = f(x, y)$ функцияның жоғарғы ретті дербес туындыларын табамыз. Сонда $z = f(x, y)$ функцияның екінші ретті дербес туындылар:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f''_{x^2}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} f''{}_{yx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''{}_{y^2}(x, y)$$

болады.

Дәл осылай етіп үшінші ретті дербес туындыларды табамыз:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} f'''{}_{x^3}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} f'''{}_{x^2 y}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} f'''{}_{x^2 y}(x, y).$$

$n$-інші ретті туындылар болады:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right) = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} f^{(n)}{}_{x^n}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right) = \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} = \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} f^{(n)}{}_{x^{n-1}}(x, y).$$

тағы сол сияқты.

Мына екінші ретті $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ дербес туындыларды аралас туындылар деп атайды.

Бір-екі мысал келтірейік.

а) $z = \sin(x + y^2) + \sqrt{x}$.

Бұл функцияның бірінші ретті дербес туындылары:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x + y^2) + \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{x}}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cos\,(x + y^2).$$

Оның екінші ретті дербес туындылары:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin(x + y^2) - \frac{1}{4\sqrt{\mathrm{x}^3}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2y \sin(x + y^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\cos(x + y^2) - 4y^2 \sin\,(x + y^2)$$

болады.

$$\text{б)}\ u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{r},$$

бұл функцияны *кеңістіктегі радиус – вектор* деп атайды.

Қарастырылып отырған функцияның бірінші ретті дербес туындылары

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{(x^3 + y^2 + z^2)^3}} = -\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = -\frac{y}{r^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{r}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = -\frac{z}{z^3}.$$

Ол екінші ретті дербес туындылары:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{3xy}{r^5}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \frac{3yz}{r^5}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{3xz}{r^5}$$

болады.

Бұл арадан

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

(1) теңдеуді Лаплас теңдеуі дейді, оның сол жағын *Лаплас операторы* деп атайды және былай белгілейді:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

(1) теңдеудің физика мәселелерінде атқаратын ролі өте зор. Сонымен, мысалға алынып отырған функция $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ Лаплас теңдеуін қанағаттандыратын болды.

## § 2. Дербес туындылардың бар болуымен байланысты функцияның үздіксіздігі. Дифференциалдау ретінің тәуелсіздігі

1. Бір айнымалының функциясы белгілі бір нүктеде дифференциалданатын болса, онда бұл функция сол нүктеде үздіксіз болады. Бір айнымалы функцияның мұндай қасиеті бізге

белгілі (IV тарау). Көп айнымалылардың функциялары үшін келесі қасиет орын алады.

**Теорема.** *Егер G облысында* $z = f(x,y)$ *функцияның дербес туындылары* $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x{}'(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y{}'(x,y)$ *бар болатын болса және бұл туындылар айтылып отырған облыста шектелген болса, яғни бір тұрақты M саны табылып облыстың барлық* $(x,y)$ *нүктелері үшін төмендегі теңсіздіктер*

$$|f'_x(x,y)| < M,\ \left|f'_y(x,y)\right| < M \qquad (2)$$

*орындалса, онда функция* $z = f(x,y)$ *G облысында үздіксіз болады.*

Бұл теореманы дәлелдеу үшін *G* облысының ішінде жатқан, координаттар *x, y* және *x+h, y+k* екі нүктені аламыз да келесі айырманы құрамыз:

$$f(x+h,y+k) - f(x,y) = [f(x+h,y+k,)$$
$$-f(x+h,y)] + [f(x+h,y) - f(x,y)] \qquad (3)$$

(3) теңдіктің оң жағында тұрған бірінші квадрат жақшалардың ішіндегі айырманы $f(x,y)$ функцияның *y* бойынша алынған өсімшесі деп, ал екінші квадрат жақшалардың ішіндегі айырманы оның *x* бойынша алынған өсімшесі деп қарауға болады. Теореманың шарттарына сүйеніп жаңағы айырмалардың әрқайсысына шектеулі өсімше жөніндегі Лагранж теоремасын қолдануға болады. Сонда

$$f(x+h,y+k) - f(x,y) = kf'_y(x+h,y+\theta_1 k) +$$
$$+hf'_x(x+h\theta_2,y),$$

мұнда $0 < \theta_1 < 1;\ \ 0 < \theta_2 < 1.$

Теореманың шарттарында айтылған (2) теңсіздіктерді пайдалансақ, онда

$$|f(x+h,y+k) - f(x,y)| < M(|h| + |k|) \qquad (4)$$

*h* пен *k* еркімізше алынған өсімшелер болғандықтан, оларды қалай сайлап алу өзіміздің қолымыздағы іс. $\varepsilon -$ алдын ала берілген оң мейлінше аз сан болсын. Мына *h, k* өсімшелерді келесі теңсіздіктер $|h| < \frac{\varepsilon}{2M}$, $|k| < \frac{\varepsilon}{2M}$ орындалатындай етіп сайлап алайық. Сонда

$$|f(x+h,y+k) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Осы кейінгі теңсіздіктің орындалуы теореманың дұрыстығын дәлелдейді.

2. Екінші параграфта келтірілген мысалдарда мына $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ және $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$ аралас туындылардың өзара тең болғанын байқадық. Ол функцияларды қай ретпен дифференциалдасақ та бәрі бір болатын болды. Әрине бұл кездейсоқ мәселе емес, оның тамыры мына теоремада жатыр.

**Теорема.** *Егер $z = f(x,y)$ функцияның $f_{xy}{}''(x,y)$, $f_{yx}{}''(x,y)$ аралас туындылары G облысында үздіксіз болса, онда бұл облыстың ішкі нүктелерінде мына теңдік орындалады:*

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y),$$

*яғни x және y бойынша дифференциалдау ретін өзгертуге болады.*

Бұл теореманы дәлелдеу үшін облысының ішінде жатқан, координаттар $x, y; x+h, y; x, y+k; x+h, y+k$ төрт нүктені аламыз, мұнда $h \neq 0, k \neq 0$. Келесі өрнекті құрайық

$$A = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x,y).$$

Егер бір айнымалы x-тің төмендегі теңдікпен:

$$\varphi(x) = f(x, y+k) - f(x,y) \qquad (5)$$

анықталған $\varphi(x)$ функциясын енгізсек, онда $A = \varphi(x+h) - \varphi(x)$.

Бұл теңдіктің оң жағындағы айырмаға шектеулі өсімше жөніндегі Лагранж теоремасын қолдансақ, сонда

$$A = h\varphi'(x + \theta h), \qquad (6)$$

мұнда $0 < \theta < 1$.

Екінші жағынан (5) теңдік бойынша дифференциалдасақ:

$$\varphi'(x) = f'_x(x, y+k) - f'_x(x,y).$$

Бұдан кейін (6) теңдік мына түрге көшеді:

$$A = h\left[f'_x(x+\theta h, y+k) - f'_x(x+\theta h, y)\right] \qquad (7)$$

(7) теңдіктің оң жағындағы квадрат жақшалардың ішіндегі айырманы $f'_x(x,y)$ дербес туындының айнымалы бойынша алынған өсімше деп қарауға болады. Теореманың шарты бойынша $f(x,y)$ функцияның үздіксіз екінші ретті аралас туындысы болғандықтан (7) теңдіктің оң жағындағы айырмаға шектеулі өсімше жөніндегі Лагранж теоремасын қолдануға болады. Сонда

$$A = hkf''_{xy}(x+\theta h, y+\theta_1 k), \qquad (8)$$

мұнда $0 < \theta_1 < 1$.

Егер бір айнымалы $y$-тің мына теңдікпен:

$$\psi(y) = f(x+h, y) - f(x,y) \qquad (9)$$

анықталған $\psi(y)$ функциясын алсақ, онда

$$A = \psi(y + k) - \psi(y).$$

Осы кейінгі теңдіктің оң жағындағы айырмаға тағы да Лагранж теоремасын қолдансақ, сонда

$$A = k\psi'(y + \theta_2 k),$$

мұнда $0 < \theta_2 < 1$.

Енді (9) теңдіктің екі жағын $y$ бойынша дифференциалдаймыз. Сонда

$$\psi'(y) = f'_y(x + h, y) - f'_y(x, y),$$

$$\psi'(y + \theta_2 k) = f'_y(x + h, y + \theta_2 k) - f'_y(x, y + \theta_2 k).$$

Бұдан кейін (10) теңдік мына түрге көшеді:

$$A = k\left[f'_y(x + h, y + \theta_2 k) - f'_{\bar{y}}(x, y + \theta_2 k)\right] \qquad (11)$$

(11) теңдіктің оң жағында тұрған квадрат жақшалардың ішіндегі айырманы $f_y{}'(x, y)$ дербес туындының айнымалы x бойынша алынған өсімшесі деп қарауға болады. Олай болса теореманың шартына сүйеніп айтылып отырған айырмаға тағы да Лагранж теоремасын қолдаймыз. Сонда

$$A = k\,h\,f''_{yx}(x + \theta_3 h,\ y + \theta_2 k), \qquad (12)$$

мұнда $0 < \theta_3 < 1$.

(8) және (12) теңдіктерді бір-бірімен салыстырсақ, онда

$$f''_{xy}(x + \theta h,\ y + \theta_1 k) = f''_{yx}(x + \theta_3 h,\ y + \theta_2 k).$$

$h$ пен $k$-ны нольге ұмтылып және $f_{xy}{}''(x, y), f_{yx}{}''(x, y)$ аралас туындылардың үздіксіздігін еске алсақ, сонда:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Теорема осымен дәлелденеді.

$z = f(x, y)$ функцияны дифференциалдау процесінде пайда болған туындылар отырған облыста үздіксіз функциялар болсын деп ұйғарайық. Егер $z = f(x, y)$ функция үшін жоғарыда дәлелденген теореманы мына $f_x{}'(x, y), f_y{}'(x, y), f_{xy}{}''(x, y)$ т.т. функцияларға қолдансақ, онда

$$f'''_{x^2y}(x, y) = f'''_{xyx}(x, y) = f'''_{yx^2}(x, y),$$

$$f'''_{xy^2}(x, y) = f'''_{yxy}(x, y) = f'''_{y^2x}(x, y),$$

$$f^{IV}_{x^2y^2}(x, y) = f^{IV}_{xyxy}(x, y) = f^{IV}_{xy^2x}(x, y) =$$

$$= f^{IV}_{yx^2y}(x, y) = f^{IV}_{yx\,yx}(x, y) = f^{IV}_{y^2x^2}(x, y).$$

Бұл арадан мынадай қорытындыға келеміз: егер екі айнымалының функциясын көп қайтара дифференциалдаудан пайда болған дербес туындылар үздіксіз функциялар болып табылады, онда дифференциалдау ретін қалай өзгертсе де болады.

Бір мысал келтірейік:

$$f = (x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \text{ егер } x \neq 0, \qquad y \neq 0$$

$$f(0, 0) = 0,$$

Осы функцияның дербес туындысын *x*=0 нүктесінде есептейік.

$$f'_x(0, y) = \lim_{x\to0}\frac{f(x, y) - f(0, y)}{x - 0} = \lim_{x\to0} y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -y$$

$$f'_y(x, 0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y - 0} = \lim_{x\to0} x\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = x$$

бұл арадан

$$f''_{xy}(0, 0) = -1, \ f''(0, 0) = 1.$$

Сонымен $f_{xy}''(0, 0) \neq (f_{yx}''(0, 0)$. Мұның бұлай болу себебі $f_{xy}''(x, y)$ аралас туындының (0, 0) нүктесінде үзілісті болуы.

## § 3. Көп айнымалылар функциясының толық дифференциалы

1. Кеңістіктің (D) облысында анықталған $n = f(x, y)$ үздіксіз функцияны қарайық.

*x, y, z* айнымалыларға еркімізше тиісті Δ*x*, Δ*y*, Δ*z* өсімшелерді берейік. Сонда функция $u = f(x, y, z)$ сәйкес Δ*n* өсімшені қабылдайды және бұл өсімше:

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

болады.

Бұл өсімшені $u = f(x, y, z)$ функцияның толық өсімшесі деп атайды.

Көп айнымалылардың функциялары үшін келесі теореманы дәлелдейік.

**Теорема.** *Егер (x, y, z) нүктенің аймағында* $u = f(x, y, z)$ *функцияның үздіксіз бірінші ретті* $f_x'(x, y, z)$, $f_y'(x, y, z)$, $f_z'(x, y, z)$ *дербес туындылары бар болатын болса, онда оның толық өсімшесін мына түрде жазуға болады.*

$$\Delta u = f(x + \Delta x, \qquad y + \Delta y, \qquad z + \Delta z) - f(x, y, z) =$$
$$= f'_x(x, y, z)\Delta x + f'_y(x, y, z)\Delta y + f'_z(x, y, z)\Delta z + \alpha\Delta x +$$

$$+\beta\Delta y+\gamma\Delta z, \qquad (13)$$

мұнда $\alpha, \beta, \gamma$ – мына $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ өсімшелерге тәуелді шексіз аздар, яғни олар $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ өсімшелермен бірге нольге ұмтылады.

Теореманы дәлелдеу үшін толық өсімшені мына түрде жазайық:

$$\Delta u=f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)=$$
$$=[f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y+\Delta y,z+\Delta z)]+$$
$$+[f(x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z+\Delta z)]+$$
$$+[f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)].$$

Квадрат жақшалардың ішіндегі айырмалардың әрқайсысы $u=f(x,y,z)$ функцияның сәйкес айнымалы бойынша дербес өсімшесі болып табылады. Теореманың шарттары бойынша $(x,y,z)$ нүктенің аймағында $u=f(x,y,z)$ функцияның үздіксіз $f_x{}', f_{\bar{y}}{}', f_z{}'$ дербес туындылары бар. Сондықтан жаңағы айтылып отырған айырмалардың әрқайсысына шектеулі өсімшелер жөніндегі Лагранж теоремасын қолданамыз. Сонда

$$\Delta u=f'_x(x+\theta\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)\Delta x+$$
$$+f'_y(x,y+\theta_2\Delta y,z+\Delta z)\Delta y+f'_z(x,y,z+\theta_3\Delta z)\Delta z=$$
$$=f'_x(x,y,z)\Delta x+f'_y(x,y,z)\Delta y+f'_z(x,y,z)\Delta z+$$
$$+\left[f'_x(x+\theta\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f'_x(x,y,z)\right]\Delta x+$$
$$+\left[f'_y(x,y+\theta_1\Delta y,z+\Delta z)-f'_y(x,y,z)\right]\Delta y+$$
$$+\left[f'_z(x,y,z+\Delta z)-f'_z(x,y,z)\right]\Delta z, \qquad (14)$$

мұнда $0<\theta<1,\ 0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1.$

Егер (14) теңдіктің оң жағындағы квадрат жақшалардың ішіндегі айырмаларды $\alpha, \beta, \gamma$ арқылы белгілесек, онда

$$\Delta u=f'_x(x,y,z)\Delta x+f'_y(x,y,z)\Delta y+f'_z(x,y,z)\Delta z+$$
$$+\alpha\Delta x+\beta\Delta y+\gamma\Delta z, \qquad (13)$$

мұнда мына $\alpha, \beta, \gamma$ шамалардың $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ өсімшелерге тәуелділігі және бұл өсімшелер бірдей нольге ұмтылғанда олардың нольге ұмтылатыны бұл арадан бірден көрініп тұр, өйткені дербес туындылар $f\,_x{}'(x,y,z)$, $f_{\bar{y}}{}'(x,y,z)$, $f_z{}'(x,y,z)$ теореманың шарттары бойынша $(x,y,z)$ нүктесінде үздіксіз. Сондықтан да өсімшелер $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ бірдей нольге ұмтылғанда мына

$$\alpha=f'_x(x+\theta\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f'_x(x,y,z).$$
$$\beta=f'_y(x,y+\theta_1\Delta y,z+\Delta z)-f'_y(x,y,z),$$

$$\gamma = f'_z(x, y, z + \theta_2\Delta z) - f'_z(x, y, z).$$

айырмалар да нольге ұмтылады.

(13) формуланы кішкене ықшамдап жазу үшін төмендегі өрнекті қараймыз:

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Осы белгілеуді пайдаланып (13) теңдіктің оң жағындағы мына $\alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z$ өрнекті былай жазуға болады:

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z = \left(\alpha\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\frac{\Delta y}{\rho} + \gamma\frac{\Delta z}{\rho}\right)\rho. \qquad (14)$$

(14) теңдіктің оң жағында тұрған дөңгелек жақшалардың ішіндегі өрнекті $\varepsilon$ арқылы белгілесек, онда

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z = \varepsilon\rho.$$

Бұдан кейін (13) теңдік мына түрге көшеді:

$$\Delta u = f'_x(x, y, z)\Delta x + f'_y(x, y, z)\Delta y + f'_z(x, y, z)\Delta z + \varepsilon\rho \qquad (15)$$

немесе

$$\Delta u = u\big(u'_x\Delta x + u'_y\Delta y + u'_z\Delta z + \varepsilon\rho\big). \qquad (15')$$

Кейде бұл теңдікті мына түрде жазады:

$$\Delta u = u'_x\Delta x + u'_y\Delta y + u'_z\Delta z + 0(\rho). \qquad (16)$$

Символ $0(\rho)$ функцияның толық өсімшесі $\Delta u$ мен $u_x{}'\Delta x + u_y{}'\Delta y + u_z{}'\Delta z$ өрнектің айырмасы $\rho$-ға қарағанда жоғарғы ретті шексіз аз шама екенін көрсетеді. Ал $\rho$ мына $(x, y, z)$ нүктеден $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ нүктеге дейінгі арақашықтықты көрсетеді. Осы $u_x{}'\Delta x + u_y{}'\Delta y + u_z{}'\Delta z$ өрнекті функцияның шексіз аз өсімшесінің бас бөлігі немесе $(x, y, z)$ нүктесіндегі функцияның толық дифференциалы деп атайды және оны былай белгілейді:

$$\alpha u = u'_x\Delta x + u'_y\Delta y + u'_z\Delta z$$

Тәуелсіз айнымалылардың дифференциалдары деп олардың өсімшелерін атайды, яғни $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y,\ dz = \Delta z.$

Ендеше

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz =$$
$$= f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz. \qquad (17)$$

$u = f(x, y, z)$ функцияны $(x, y, z)$ нүктесінде дифференциалданатын функция деп атайды, егер оның толық өсімшесін мына түрде

$$\Delta u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) - f(x, y, z) =$$
$$= A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \varepsilon\rho \qquad (18)$$

жазуға болатын болса, мұнда *A, B, C* – шектеулі сандар, нольге ұмтылады $\varepsilon$-де нольге ұмтылады.

Дифференциалданатын функцияның дербес туындыларының болатындарын және *A, B, C* сандардың оларға тең болатындығын дәлелдеу қиын емес.

Айталық $\Delta x \neq 0$, ал $\Delta y = \Delta z = 0$ болсын. Онда теңдіктен

$$\Delta u = A\Delta x + \varepsilon\rho, \qquad (18)$$

мұнда $\rho = |\Delta x|$. Осы кейінгі теңдіктің екі жағын $\Delta x$-ке бөліп, одан кейін $\Delta x$-ті нольге ұмтылтып шекке көшсек, сонда

$$A = f'_x(x, y, z).$$

Дәл осы сияқты етіп мына теңдіктердің

$$B = f'_y(x, y, z), \quad C = f'_z(x, y, z)$$

дұрыстығын дәлелдеуге болады.

Егер біз мына $f_x{}'(x, y, z), f_y{}'(x, y, z), f_z{}'(x, y, z)$ дербес туындылардың бар болатындығын ғана ұйғарып, олардың үздіксіздігін ұйғармасақ, онда $u = f(x, y, z)$ дифференциалданатын функция болмай қалуы мүмкін.

Үздіксіз бірінші ретті дербес туындылары бар функцияны үздіксіз дифференциалданатын функция деп атаймыз. Егер қарастырылып отырған функцияның барлық екінші ретті туындылары үздіксіз болса, онда бұл функцияны үздіксіз екі рет дифференциалданатын функция деп атаймыз.

Төмендегі мысалды қарайық:

$$f = (x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2y^2}, & \text{егер } x^2 + y^2 > 0\text{, болса,} \\ 0, & \text{егер } x = 0,\ y = 0 \text{ болса.} \end{cases}$$

Бұл функция бүкіл жазықтықта үздіксіз және жазықтықтың барлық нүктелерінде оның дербес туындылары бар. Мәселен, координат бас нүктесіндегі оның дербес туындылары болады:

$$f'_x(0, 0) = 0, \qquad f'_y(0, 0) = 0.$$

Координат олардың бас нүктесіндегі берілген функцияның өсімшесі болады:

$$\Delta u = \frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2.}$$

Бұл теңдік $\Delta x$ пен $\Delta y$ қандай болса да орындалуға тиіс. Сондықтан, былай ұйғарайық: $\Delta x = \Delta y$. Сонда

$$\frac{1}{2}\Delta x = \varepsilon\sqrt{2\Delta x}, \qquad \text{бұл арадан } \varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \text{яғни}$$

$\varepsilon$ нольге ұмтылмайды, бұлай болу тіпті мүмкін емес. Осындай қайшылықтың болу себебі – дербес туындылардың (0, 0) нүктесінде үзілісті болуы.

2. Екі айнымалы функцияның бірінші ретті толық дифференциалына геометриялық мағына беруге болады.

Айталық $z = f(x, y)$, $x_0y$ жазықтығының G облысында анықталған бірмәнді үздіксіз функция болсын, ал $(x_0, y_0)$ – осы облыстың бір белгілі нүктесі болсын. Геометрия жүзінде бұл функцияның бетті кескіндейтінін біз жоғарыда айттық. Нүкте $P_0(x_0, y_0, z_0 = f(x_0y_0))$ осы беттің нүктесі болып табылады. OZ осіне параллель емес $P_0$ нүктесі арқылы өтетін жазықтықтарды қарайық; бұл жазықтықтардың теңдеулері мына түрде:

$$z = z_0 + \alpha(x - x_0) + b(y - y_0)$$

болады.

Енді осы жазықтар нүктелерінің аппликаталары мен бет нүктелерінің аппликаталарының айырмасын қарайық.

$$z - z = f(x, y) - z_0 - \alpha(x - x_0) - b(y - y_0).$$

Функция $f(x, y)$ үздіксіз болғандықтан мына шама $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ нольге ұмтылғанда мына $z - z$ айырма да нольге ұмтылады.

Егер айырма $z - z$ мына $\rho$ бойынша жоғарғы ретті шексіз аз шама болса, онда

$$z = z_0 + \alpha(x - x_0) + b(y - y_0)$$

жазықтықты, $z = f(x, y)$ бетке оның $P_0(x_0, y_0, z_0 = = f(x_0y_0))$ нүктесі арқылы жүргізілген жанама жазықтық деп атайды.

Сонымен, егер $z = f(x, y)$ беттің $P_0(x_0, y_0, z_0 = f(x_0y_0))$ нүктесінде жанама жазықтық бар болатын болса, онда

$$z - z = \varepsilon\rho,$$

мұнда $\varepsilon$ мына $\rho$-мен бірге нольге ұмтылады. Олай болса

$$f(x, y) - z_0 - \alpha(x - x_0) - b(y - y_0) = \varepsilon\rho$$

немесе

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \alpha\Delta x + b\Delta y + \varepsilon\rho,$$

Мұнда $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Демек $f(x, y)$ мына $(x_0, y_0)$ нүктесінде дифференциалданатын функция болып табылады және

$$a = f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

$$b = f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Керісінше, егер $f(x, y)$ мына $(x_0, y_0)$ нүктесінде дифференциалданатын функция болса, онда

$$z - z = f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(x - x_0) -$$

$$- \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) = \varepsilon\rho,$$

бұл арадан

$$z_0 - z = -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0),$$

өйткені $\varepsilon \to 0,\ \rho \to 0$. Ендеше мына

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

теңдеумен кескінделетін жазықтық $z = f(x, y)$ теңдеумен берілген беттің $P_0(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы оған жүргізілген жанама жазықтық болып табылады.

Сөйтіп, $z = f(x, y)$ теңдеумен берілген бетке жанама жазықтықтың бар болу шарты, $f(x, y)$ функцияның дифференциалдану шартымен балама болатын болды. Беттің берілген нүктесі арқылы оған жанама жазықтық жүргізуге болатын болса, ондай жазықтық тек біреу ғана болады және бұл жазықтық мынадай

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

теңдеумен кескінделеді.

Егер былай ұйғарсақ: $x - x_0 = dx,\ y - y_0 = dy$, онда

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy = dz.$$

Бұл арадан мынадай қорытындыға келеміз: екі айнымалы функцияның толық дифференциалы $dz$ жанама жазықтық аппликатасының өсімшесімен өрнектеледі.

3. Егер $u = f(x, y, z)$ функцияның үздіксіз жоғарғы ретті дербес туындылары болса, онда $du = df(x, y, z)$ толық дифференциалдан тағы да толық дифференциал туғызуға болады. Ол үшін оның $x, y, z$ бойынша алынған дербес туындыларын $\Delta x = dx$-ке, $\Delta y = dy$-ке, $\Delta z = dz$-ке көбейтіп, сонан кейін оларды қосу керек, яғни (17) формуланы қолдану керек. Сонда

$$d^2u = d^2f(x,y,z) = d(du) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right).$$

Толық дифференциалды осылай дифференциалдағанда біз $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ өсімшелерді тұрақты деп қараймыз. Сонда

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta y^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Delta z^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y +$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\Delta x \Delta z + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\Delta y \Delta z,$$

немесе

$$d^3u = \frac{\partial^2 u}{\partial u^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}dxdy +$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial uez}dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2 f(x,y,z).$$

Дәл осы сияқты

$$d^3u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^3 f(x,y,z)$$

сонан әрі қарай

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^n f(x,y,z).$$

Кейінгі символша теңдеулерді n-ге тең дәрежелеу керек те, сонан кейін $f(x,y,z)$-ке «көбейту» керек.

## § 4. Күрделі функциялар және оларды дифференциалдау

1. Кеңістікте жатқан (*D*) облысында анықталған $u = f(x,y,z)$ функцияны қарайық, $x, y, z$ үш айнымалының әрқайсысы екінші бір айнымалы *t*-нің функциясы болсын:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = Q(t).$$

Айнымалы *t* қалай өзгерсе де айнымалылар $x, y, z$ (*D*) облысының шенінен шықпауы керек. Сонда ғана мына күрделі функцияның

$$u = f[\varphi(t), \psi(t), Q(t)]$$

мағынасы болады.

$u$-дың $x, y, z$ бойынша үздіксіз $u'_x, u'_{\bar{y}}, u'_z$ дербес туындылары болсын және онымен бірге $x, y, z$ функциялардың $t$ бойынша алынған туындылары $\varphi'(t), \psi'(t), Q'(t)$ бар болатын болсын, онда $u = f[\varphi(t), \psi(t), Q(t)]$ күрделі функцияның айнымалы $t$ бойынша туындысы болады. Міне енді осы туындыны табайық.

(13) формула бойынша $u = f(x, y, z)$ функцияның толық өсімшесі болады:

$$\Delta u = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + u'_z \Delta z + \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \partial \Delta z.$$

Бұл теңдіктің екі жағын $\Delta t$-ге бөліп, онан кейін $\Delta t$-ні нольге ұмтылтып шекке көшейік. Сонда

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} u'_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + u'_y \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + u'_z \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

немесе

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}, \tag{19}$$

Өйткені $\Delta t$ мен бірге $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ өсімшелер де нольге ұмтылады, демек $\alpha, \beta, \gamma$ шамалар да нольге ұмтылады. Қойылған шарт бойынша $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dz}{dt}$ шектеулі туындылар бар, олай болса (19) теңдік орындалуға тиіс.

Біз мұнда тек бір айнымалының ғана күрделі функциясын қарадық. Енді көп айнымалының ғана күрделі функциясын қарайық.

$\xi, \eta, \zeta$ үш айнымалының $u = f(\xi, \eta, \zeta\ )$ функциясын қарайық. Бұл функция $\xi o \eta \zeta$ кеңістігінің (*P*) облысында анықталсын, ал айнымалылар $\xi, \eta, \zeta$ *XOY* жазықтығының (*C*) облысында анықталған, мына *x,y* екі айнымалының функциялары болсын $\xi = \varphi(x, y),\ \eta = \psi(x, y),\ \xi = Q(x, y)$. Сонда $u = f[\varphi(x, y),$ $\psi(x, y),\ \ Q(x, y)]$ *G* облысында анықталған күрделі функция болады.

Мәселен мына функциялар $u = e^{xy} \sin(x + y)$, $u = \frac{1}{x}\sqrt{1 - x^2 - y^2 x}\quad xlnsin(x - y)$ күрделі функциялар. Егер былай $xy = \xi, x + y = \eta$ деп ұйғарсақ, онда $u = l\xi sin\eta$ және былай ұйғарсақ:

$$\frac{1}{x}, \qquad 1 - x^2 - y^2 = \eta, \ \ \sin(x - y) = \xi$$

онда

$$u = \xi \eta^{\frac{1}{2}} \ln \xi.$$

Айнымалылар $x, y$ $G$ облысында өзгергенде айнымалылар $\xi, \eta, \zeta$ $(P)$ облысының шенінен шықпауы керек. Міне сонда ғана $u = f[\varphi(x,y), \psi(x,y), Q(x,y)]$ күрделі функцияның мағынасы болады.

Егер функциялар $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y), \xi = Q(x,y)$ $G$ облысында, ал функция $u = f(\xi, \eta, \zeta\,)$, $(P)$ облысында дифференциалданатын болсын, онда күрделі функция $u = f[\varphi(x,y),\ \psi(x,y), Q(x,y)]$ $G$ облысында дифференциалданатын болады.

Егер тәуелсіз айнымалылар $x, y$ мына $\Delta x, \Delta y$ өсімшелерді алатын болса, онда айнымалылар $\xi, \eta, \zeta$ мына түрде жазылған

$$\Delta\xi = \varphi'_x \Delta x + \varphi'_y \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \beta_1 \Delta y,$$
$$\Delta\eta = \psi'_y\, \Delta x + \psi'_y\, \Delta y + \alpha_2\, \Delta x + \beta_2\, \Delta y,$$
$$\Delta\mu = Q'_x\, \Delta x + Q'_y\ \Delta y \alpha_3\, \Delta x + \beta_3\, \Delta y; \qquad (20)$$

өсімшені қабылдайды, мұнда $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ шамалар $\Delta x$ және $\Delta y$ пен немесе $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ пен бірге нольге ұмтылады.

Егер айнымалылар $\xi, \eta, \zeta$ мына $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$ өсімшелерді алса, функция $u = f(\xi, \eta, \zeta\,)$ келесі түрде жазылған.

$$\Delta u = f'_\xi\, \Delta\xi + f'_\eta\, \Delta\eta + f'_\mu\, \Delta\, \xi + \gamma, \Delta\xi + \gamma_2 \Delta\, \eta + \gamma_3\, \Delta\, \xi \qquad (21)$$

өсімшені алады, мұнда $\gamma_1$, $\gamma_2, \gamma_3$ мына $\Delta\xi, \Delta\,\eta, \Delta\,\zeta$ өсімшелермен бірге шексіз аз шамалар.

Енді (21) теңдіктің оң жағындағы $\Delta\xi, \Delta\,\eta, \Delta\,\zeta$ өсімшелердің орнына (20) теңдіктер мен анықталған өрнектерді қоямыз. Сонда

$$\Delta\, u = \left(f'_\xi\, \varphi'_x + f'_\eta\, \Delta\, \psi'_x + f'_\xi\, Q'_x\right) \Delta x +$$
$$+ \left(f'_\xi\, \varphi'_y + f'_\eta\, \psi_y + f'_\xi\, Q'_y\right) \Delta y + \varepsilon \Delta x + \gamma \Delta y, \qquad (22)$$

мұнда

$$\varepsilon = f'_\xi\, \alpha_1 + f'_\eta\, \alpha_2 + f'_\xi\, \alpha_3 + \varphi'_x\, \gamma_1 + \psi'_x\, \gamma_2 + Q'_x\, \gamma_3 + \ .\ .\ .\ . +$$
$$+ \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \alpha_3 \gamma_3,$$
$$\gamma = f'_\xi\, \beta_1 + f'_\eta\, \beta_2 + f'_\xi\, \beta_3 + \varphi'_y\, \gamma_1 + \psi'_y\, \gamma_2 + Q'_y\, \gamma_3 + \ .\ .\ . +$$
$$+ \beta_1\, \gamma_1 + \beta_2\, \gamma_2 + \beta_3\, \gamma_3.$$

Осы кейінгі екі теңдіктен мынадай қорытындыға келеміз: $\varepsilon$ және $\gamma, \Delta x, \Delta y$ өсімшелермен бірге нольге ұмтылады. Екінші жағынан (22) теңдіктен мынадай қорытындыға келеміз: егер функциялар $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \varphi(x,y), \zeta = Q(x,y)$ $G$ облысында дифференциалданатын функциялар болса, ал функция $f(\xi, \eta, \zeta\,)$ $(P)$ облысында дифференциалданатын функция болса, онда күрделі функция $u = f[\,\varphi(x,y), \psi(x,y), Q(x,y)]$ $G$ облысында дифференциалданатын болады және оның $x, y$ бойынша алынған дербес туындылары келесі формулалармен анықталады:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_\xi \, \varphi'_x + f'_\eta \, \psi'_x + f'_\xi \, Q'_x = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_\xi \, \varphi'_y + f'_\eta \, \psi'_y + f'_\xi \, Q'_y = \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y}. \quad (23)$$

$$u = f[\varphi(x, y), \qquad \psi(x, y), \qquad Q(x, y)]$$

күрделі функцияның толық дифференциалы төмендегі формуламен анықталады:

$$du = \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi = \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta = \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy\right) + \frac{\partial f}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy\right) + \frac{\partial f}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx + (\frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y}) dy \qquad (24)$$

Күрделі функцияның жоғарғы ретті дербес туындыларын табу үшін (23) формулаларды тағы да $x, y$ бойынша дифференциалдау керек (мұнда біз $\frac{\partial f}{\partial \xi}, \frac{\partial f}{\partial \eta}, \frac{\partial f}{\partial \eta}$ дербес туындыларды күрделі функциялар деп қараймыз). Сонда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) +$$

$$+2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \, \partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \, \partial \xi}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} +\right)$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \, \partial \xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \, \partial y}.$$

## § 5. Біртектес функциялар

Анализдің өзінде болсын немесе оның қолданылуында болсын жиі кездесетін біртектес функциялар – олар екі, үш т.т. айнымалылардың біртектес бүтін рационал функциялар. Мәселен, мына $ax + by$, $ax^2 + bxy + cy^2$ сияқтанған функцияларды бірінші және екінші дәрежелі біртектес функциялар дейміз.

Егер аргументтерінің барлығын $t$-ге көбейткеннен функцияның мәні $t^m$ не көбейтілетін болса, яғни

$$f\ (xt,\ \ yt,\ zt) = t^m\ f\ (x,\ y,\ z)$$

теңдігі орындалатын болса, $f\ (x,\ y,\ z)$ – функциясын $m$-дәрежелі біртектес функция деп атаймыз. Мәселен мына функциялар

$$f\ (x,y,z) = \frac{x^3 + 3xy^2 + z^3}{xy + y^2 + xz},$$

$$f\ (x,y,z) = \frac{xy + 2y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$f\ (x,y,z) = x^2 sin\frac{x}{y} + y\sqrt{x^2 + y^2} ln\frac{x + y}{x}$$

біртектес (бірінші функция үшін $m=1$, екінші функция үшін $m=1,$ үшінші функция үшін $m=2$).

Егер дифференциалданатын функция $f\ (x,y,z)$ $m$ дәрежелі біртектес функция болса, онда бұл функция үшін келесі формула орындалады:

$$xf'_x(x,y,z) + yf'y\ (x,y,z) + zf'_z\ (x,y,z) = mf\ (x,y,z). \quad (26)$$

(26) формуланы Эйлер формуласы деп атайды.

Қойылған шарт бойынша яғни функция $f\ (x,y,z)$ біртектес болғандықтан мына теңдік орындалады:

$$f(tx,ty,tz)=t^m f(x,y,z).$$

Осы теңдіктің екі жағын $t$ бойынша дифференциалдайық. Сонда

$$xf'_x(tx,ty,tz) + yf'_y(tx,ty,tz) + zf'_z(tx,ty,tz) = mt^{m-1}f(x,y,z).$$

Егер $t$-нің орнына 1-ді қойсақ, онда

$$xf'_x(x,y,z) + yf'_y\ (x,y,z) + z\cdot f'_z(x,y,z) = mf(x,y,z). \quad (26)$$

(26) Эйлер формуласын қанағаттандыратын әрбір функция біртектес болады.

Айталық, үздіксіз бірінші ретті дербес туындылары бар функция $f\ (x,y,z)$ (26) Эйлер теңдігін қанағаттандырсын. Сонымен, біз (26) теңдік орындалады деп есептейміз.

*x,y,z* шамаларды тұрақты деп қарап айнымалы *t*-нің келесі функциясын құрайық:

$$\varphi(t)=\frac{f\ (tx,ty,tz)}{t^m}.$$

Бұл функция (0,∞) интервалында анықталған және үздіксіз. Осы құрылған функцияны *t* бойынша дифференциалдап табамыз:

$$(t)=\frac{\left[xf'_x(tx,ty,tz)+yf'_y(tx,ty,tz)+zf'_z(tx,ty,tz)\right]t-mf(tx,ty,tz)}{t^{m+1}}(27)$$

Егер (26) Эйлер теңдігіндегі *x*-тің, *y*-тің, *z*-тің орнына *tx*-ті, *ty*-ті, *tz*-ті қойсақ, онда (27) теңдіктің оң жағындағы бөлшектің алымы нольге айналады, яғни $\varphi'(t)=0$ бұл арадан *(t)=C,* мұнда $C-$ кез-келген тұрақты сан. Енді осы *C*-ні табайық. Ол үшін $\varphi(t)$ функцияны анықтайтын теңдіктегі *t*-нің орнына 1-ді қоямыз. Сонда $\varphi(1)=f(x,y,z)$; екінші жағынан (1) = С. Ендеше *C = f (x,y,z)* олай болса,

$$\varphi(t)=\frac{f(tx,ty,tz)}{t^m}=f(x,y,z),$$

бұл арадан

$$f\ (tx,ty,tz)=t^m f(x,y,z).$$

Міне бізге осы теңдікті дәлелдеу керек еді.

Дифференциалданатын функция *f (x, y, z)* біртектес болу үшін Эйлер теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

## § 6. Көп айнымалылар функциялары үшін Тейлор формуласы

Алдымен біз бір айнымалының функциясы үшін Тейлор формуласын еске түсірейік. Егер *F(t)* функцияның *n*-нші ретке дейін туындысы болса, онда бұл функция Тейлор формуласы бойынша былай жіктелетін еді:

$$F(t)=F(t_0)\ +\frac{F'(t_0)}{1!}(t-t_0)\ \ \frac{F''(t_0)}{2!}\ (t-t_0)^2+...+$$
$$+\frac{F^{n-1}(t_0)}{(n-1)!}\ (t-t_0)^{n-1}+\frac{F^{(n)}(t)}{n!}(t-t_0)^n.$$

Мұнда қалдық мүше $\frac{F\ (n)(\xi)}{n!}\ (t-t_0)^n$ Лагранж түрінде алынған. Егер $t-t_0$ айырманы $\Delta t$ арқылы, ал $F\ (t)-F(t_0)$ айырманы $\Delta F(t_0)$ арқылы белгілесек, яғни $\Delta t-t_0$, $\Delta F(t_0)=F(t)-F(t_0)$, онда жоғарыда жазылған формула мына түрге көшеді:

$$\Delta F(t_0) = F'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2!}F''(t_0)\Delta t^2 + \cdots +$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(t_0)\Delta t^{n-1} + \frac{F^{(n)(\xi)}}{n!}\Delta t^n,$$

немесе

$$\Delta F(t_0) = dF(t_0) + \frac{1}{2!}d^2F(t_0) + \cdots +$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}F(t_0) + \frac{1}{n!}d^nF(\xi), \qquad (28)$$

мұнда $\xi = t_0 + \Theta\Delta t, 0 < \Theta < 1$.

Екі айнымалының $z = f(x, y)$ функциясын қарайық. Бұл функцияның белгілі бір $(x_0, y_0)$ нүктенің аймағында $n$-нші ретке дейін үздіксіз дербес туындылары болатын болсын. $x_0$-ге $\Delta x$, $y_0$-ге $\Delta y$ өсімшені берейік. Бұл өсімшелердің аздығы сондай, нүкте $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta_y)$ мына $(x_0, y_0)$ нүктенің айтылып отырған аймағының ішінде жатады.

Енді мәселе берілген $z=f(x, y)$ функция үшін Тейлор формуласын құру. Ол үшін бір айнымалы $t$-нің келесі функциясын қараймыз.

$$F(t)=f(y_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y), \qquad o \le t \le 1$$

бұл арадан

$$F(0)=f(x_0, y_0), \; F(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$
$$\Delta f(x_0, y_0)=f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)=$$
$$=F(1)-F(0)=\Delta F(0).$$

(28) формула бойынша

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0)=dF(0)+\frac{1}{2!}d^2F(0) + \frac{1}{3!}d^3F(0) +$$
$$+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}F(0) + \frac{1}{n!}d^nF(\theta). \qquad (29)$$

Екінші жағынан

$$dF(0)= df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy,$$

өйткені

$$dx=dt\Delta x = \Delta t\Delta x, \text{ал } \Delta t = 1-0 = 1,$$

демек $dx = \Delta x$.

Сол сияқты

$$d^2F(0) = d^2f(x_0, y_0), \ldots, d^{n-1}F(0) = d^{n-1}f(x_0, y_0),$$
$$d^nF(0)=d^nf(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y.$$

Егер осы табылған өрнектердің барлығын (29) теңдікке апарып қойсақ, онда

$$\Delta f(x_{0,}y_0) = df(x_{0,}y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_{0,}y_0) + \frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f(x_{0,}y_0) +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{u!}d^n f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), 0 < \theta < 1 \qquad (30)$$

немесе

$$\Delta f(x_{0,}y_0) = f(x_0 + \Delta_{x,}\, y_0 + \Delta_y) - f(x_{0,}y_0) =$$

$$= f'_x(x_{0,}y_0)\Delta x + f'_y(x_{0,}\, y_0)\Delta y + \qquad (30')$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[f''_{x^2}(x_{0,}y_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_{0,}y_0)\Delta x\Delta y + f''_{y2}(x_{0,}y_0)\Delta y^2\right] + \cdots$$

(30) немесе (30') формуланы екі айнымалының функциясы үшін Тейлор формуласы деп атайды.

## § 7. Көп айнымалылар функцияларының экстремумдары

**1.** Кеңістіктің тиісті облысында анықталған үздіксіз *u=f (x,y,z)* функцияны қарайық, $(x_{0,}\, y_{0,}\, z_0)$ осы облыстың тиянақты нүктесі болсын.

Егер $(x_{0,}\, y_{0,}\, z_0)$ нүктенің $(x_0 - \delta, x_0 + \delta;\ \ y_0 - \delta, y_0 + \delta;$ $z_0 - \delta, z_0 + \delta)$ аймағында жатқан барлық (*x,y,z*) нүктелер үшін келесі теңсіздік

$$f\,(x,\,y,\,z) < f\,(x_{0,}y_{0,}z_0)$$

немесе

$$f(x,\,y,\,z) - f\,(x_{0,}\,y_{0,}z_0) < 0$$

орындалса, *u = f(x, y, z)* функциясының $(x_{0,}\, y_{0,}\, z_0)$ нүктесінде максимумы бар дейміз. Ал, егер $(x_{0,}\, y_{0,}\, z_0)$ нүктесінің $(x_0 - \delta, x_0 + \delta;\ y_0 - \delta, y_0 + \delta;\ z_0 - \delta, z_0 + \delta)$ аймағының барлық *(x,y,z)* нүктелерінде

$$f\,(x,y,z) > f\ (x_{0,}y_{0,}\, z_{0)}$$

теңсіздігі, яғни

$$f\,(x,y,z) - f\ (x_{0,}y_{0,}\, z_{0)} > 0$$

теңсіздігі орындалатын болса, *u=f(x,y,z)* функциясының $(x_{0,}\, y_{0,}\, z_0)$ нүктесінде минимумы бар деп атаймыз.

Максимум мен минимумды бірге атағанда экстремум деп атайды.

Егер $(x_{0,}\, y_{0,}\, z_0)$ нүктесінде дифференциалданатын функцияның осы нүктеде экстремумы болса, онда

$$f'_x\,(x_{0,}y_{0,}\, z_0) = 0,\ \ f'_z\,(x_{0,}y_{0,}\, z_0) = 0,\ \ f'_z(x_{0,}y_{0,}\, z_0) = 0$$

$y,z$ айнымалыларға тұрақты $y_0$, $z_0$ мәндерді беріп $u = f(x, y_0, z_0)$ функцияны бір айнымалы $x$-тің функциясына келтіреміз:

$$f(x_0, y_0, z_0).$$

Бұл функцияның $x=x_0$ нүктесінде экстремумы болғандықтан, оның осы нүктедегі $x$ бойынша алынған туындысы нольге тең болуы керек, яғни

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Дәл осы сияқты

$$f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \ f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Кейбір жағдайларда осы табылған шарттарды мына түрде жазған

$$df(x_0, y_0, z) = f'_x(x_0, y_0, z_0)dx + f'_y(x_0, y_0, z_0)dy +$$
$$+ f'_z(x_0, y_0, z_0)dz = 0 \qquad (31)$$

қолайлы болады.

Кейінгі теңдікті сөзбен былай тұжырымдауға болады:

$u = f(x,y,z)$ функцияның экстремумы болатын нүктеде оның толық дифференциалы сөзсіз нольге тең болады. Керісінше, (31) теңдіктің орындалуынан $dx$, $dy$, $dz$ қандай болса да, мына теңдіктер орындалады:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0, f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0, f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

$f(x,y,z)$ функцияның экстремумы болатын нүктелерді «сынға» түсетін немесе «тексерілуге» жататын немесе күдікті нүктелер деп атайды.

Сонымен, осы нүктелерді табу үшін келесі теңдеулер системасын

$$f'_x(x, y, z) = 0,$$
$$f'_y(x, y, z) = 0,$$
$$f'_z(x, y, z) = 0,$$

біріктіріп шешіп, $x,y,z$-тердің мәндерін табу керек. $x,y,z$ айнымалылардың табылған мәндерінде $u = f(x, y, z)$ функцияның экстремумы болуы да, болмауы да мүмкін. Сондықтан, жоғарыда дәлелденген теорема $u = f(x, y, z)$ функцияның экстремумы болуының қажетті шарты болып табылады да бірақ жеткілікті шарты болмайды.

**2.** Енді көп айнымалылар функцияларының экстремумы болуының жеткілікті шартына көшейік. Алдымен екі айнымалының функциясын қарайық: $u = f(x, y,)$.

$(x_0, y_0)$ – тексерілуге жататын нүкте болсын және осы нүктенің аймағында $f\ (x,\ y)$ функцияның екінші ретке дейін үздіксіз туындылары бар болатын болсын. $(x_0, y_0)$ нүктесінде бірінші ретті туындылар төмендегі шарттарды $f'_x\left(x_, y\right) = 0,\ f'_y\left(x_{0,} y_0\right) = 0$ қанағаттандыратын болсын.

Ендігі біздің мақсатымыз осы $(x_0, y_0)$ нүктесінде $f\ (x,\ y)$ функцияның экстремумы бар ма, жоқ па, міне соны зерттеу.

Функция экстремумының жоғары да берілген анықтамасы бойынша $(x_0, y_0)$ нүктесінде $f(x, y)$ функцияның экстремумы болу үшін осы нүктенің аймағында мына айырма $\Delta f = f(x, y) -$ $- f\left(x_{0,}\ y_0\right)$ бір тиісті таңбаға ие болуы керек. Бұл айырманы (30) Тейлор формуласы бойынша жіктейміз.Сонда

$$f'_x\left(x_{0,}\ y_0\right) = 0,\ \ f'_y\left(x_{0,}\ y_0\right) = 0$$

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f\ (x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f\left(x_{0,}\ y_0\right) =$$

$$= df\left(x_{0,}\ y_0\right) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) = \ f'_x\left(x_{0,} y_0\right)\Delta x +$$

$$+ f''_y\ (x_{0,}\ y_0)\ \Delta y + \frac{1}{2!}[f''x^2\ (x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) + 2f''_{xy}$$

$$(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) + f''_{y^2}(x_0 + \theta\Delta x + y_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)].$$

немесе

$$\Delta f = f\ (x, y) - f\left(x_{0,} y_0\right) = \frac{1}{2!}\ [f''_{x^2}\ (x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) +$$

$$+ 2f''_{xy}\ (x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) + f''_{y^2}\ (x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)], \quad (32)$$

Мұнда $0<\theta<1$

Формуланы қысқаша түрге келтіру мақсатымен келесі белгілеулерді енгіземіз:

$$f''x^2\left(x_{0,}\ y_0\right) = A,\ \ f''_{xy}\left(x_{0,} y_0\right) = B,\ \ f''_{y^2}(x_{0,}\ y_0) = C.$$

Сонда

$$f''x^2\ (x_0 + \theta\Delta x,\ \ y_0 + \theta\Delta y) = A + \alpha,$$

$$f''_{xy}\ (x_0 + \theta\Delta x,\ \ y_0 + \theta\Delta y) = B + \beta,$$

$$f''y^2(x_0 + \theta\Delta x,\ \ y_0 + \theta\Delta y) = C + \gamma,$$

мұнда $\alpha, \beta, \gamma, \Delta x, \Delta y$ өсімшелерге тәуелді шексіз аз шамалар, яғни олар $\Delta x, \Delta y$ өсімшелермен бірге нольге ұмтылады.

Бұдан кейін (32) теңдік мына түрге көшеді:

$$\Delta f = f(x, y) - f\left(x_{0,} y_0\right) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f\left(x_{0,} y_0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 + \alpha\Delta x^2 2\beta\Delta x\Delta y + \gamma\Delta y^2).$$

Енді былай ұйғарайық: $\Delta x = \varrho \cos\varphi, \Delta y = \varrho\, sin\varphi,$ мұнда $\rho = \sqrt{\Delta x^{2+\Delta y^2}}$– мына $(x_{0,}\, y_0)$ нүктесінен $(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ нүктесіне дейінгі арақашықтық. Сонда

$$\Delta f = f(x, y) - f\left(x_{0,}\, y_0\right) = \frac{\rho^2}{2}(A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi + \alpha\cos^2\varphi + 2\beta\cos\varphi \cdot \sin\varphi + \gamma\sin^2\varphi). \qquad (33)$$

Бұл арада біз бірнеше жағдайларды қараймыз: а) Дискриминант $AC - B^2 > 0$ болсын. Онда $AC > 0$ болады, демек $A \neq 0$.

Енді (33) теңдіктің оң жағындағы жақшалардың ішіндегі мына А $cos^2\ \varphi + 2B\, cos\varphi\, sin\varphi + C\, sin^2\varphi$ квадрат үш мүшені былай жазуға болады:

$$A\, cos^2\varphi + 2Bcos\,\varphi\sin\varphi + Csin^2\varphi =$$
$$= \frac{1}{A}[(A\cos\ \varphi + B\sin\ \varphi)^2 + \left(AC - B^2\right)sin^2\varphi] \qquad (34)$$

(34) теңдіктен мынадай қорытындыға келеміз: мына $Acos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\, sin^2\varphi$ квадрат үшмүшенің таңбасы $A$-ның таңбасына тәуелді, былайша айтқанда $A$ санының таңбасы қандай болса, $\varphi$-дің барлық мәндері үшін айтылып отырған квадрат үшмүшенің таңбасы сондай болады. Бұл квадрат үшмүшенің абсолют шамасы $|Acos^2\varphi + 2B\, cos\,\varphi\ \sin\varphi + C\ \sin^2\varphi\ |$ $[0{,}2^{\pi}]$ – сегментінде үздіксіз болғандықтан, ол өзінің дәл төменгі шекаралығын (оны $m$ арқылы белгілейік) қабылдайды, яғни

$$\min\ |Acos^2\varphi + 2Bcos\,\varphi\sin\varphi + Csin^2\ \varphi| = m > 0.$$

$\alpha, \beta, \gamma$ – шексіз аз шамалар болғандықтан

$$\alpha\cos^2\varphi + 2\beta\cos\varphi\sin\varphi + \gamma\sin^2\varphi| \leq |\,\alpha| + 2|\beta| + |\gamma| < m. \qquad (35)$$

Сөйтіп

$$|A\ \cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi| \geq m > 0 \qquad (36)$$

(35), (35) теңсіздіктен мынадай қорытындыға келеміз: (33) теңдіктің сол жағындағы айырманың таңбасына мына $\alpha\, cos^2\varphi + 2\beta\, cos\varphi\, sin\varphi + \gamma sin^2\varphi$ квадрат үшмүшенің таңбасы әсер етпейді. Демек, бұл айырманың таңбасы мына $A\, cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\, sin\varphi + C\, sin^2\varphi$ квадрат үшмүшенің таңбасына тәуелді. $A$-ның таңбасы қандай болса мына $A\, cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\, sin^2\,\varphi$ квадрат үшмүшенің таңбасы сондай болады деп біз жоғарыда айырманың таңбасы $A$ санының таңбасына тәуелді.

Егер $A > 0$ болса, онда $\Delta f = f(x, y) - f(x_{0,}y_0) > 0$. Ендеше $(x_{0,}y_0)$ нүктесінде $f(x, y)$ функцияның минимумы бар. Егер $A < 0$

болса, онда $\Delta f = f(x,y) - f(x_{0,}y_0) < 0$ болады. Демек, $\left(x_{0,}y_0\right)$ нүктесінде $f(x,y)$ функцияның максимумы бар.

Сонымен, егер

$$AC - B^2 = f''_{x^2}(x_{0,}y_0)\, f''_{y^2}\ (x_{0,}\, y_0) - f''^2_{xy}(x_{0,}y_0) > 0$$

және $f''_{x^2}(x_{0,}y_0) < 0$ болса, онда $f(x,y)$ функцияның $(x_{0,}y_0)$ нүктесінде минимумы болады; егер

$$AC - B^2 = f''_{x^2}(x_0, y_0) f''_{y^2}(x_0, y_0) - f''^2_{xy}(x_0, y_0) > 0$$

және $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$ болса, онда $f(x,y)$ функцияның $(x_0, y_0)$ нүктесінде максимумы болады.

б) $AC - B^2 < 0$ болсын. Бұл жағдайда мына $Acos^2\varphi + 2Bcos\,\varphi \sin\varphi + C\ sin^2\varphi$ квадрат үшмүшенің $(x_{0,}y_0)$ нүктесінің аймағында таңбасы қандай болады соны тексеруіміз керек. Ол үшін $\varphi$-дің екі мәнін қараймыз: 1) $\varphi = \varphi_1 = 0$, онда жаңағы квадрат үшмүшенің таңбасы оң болады, оны (34) теңдіктен байқауға болады: 2) $\varphi$-дің мына теңдікті $A\cos\varphi_2 + B\sin\varphi_2 = 0$ қанағаттандыратын $\varphi_2$ мәнін қарайық, мұнда $sin\varphi_2 \neq 0$; сонда айтылып отырған квадрат үшмүшенің таңбасы теріс болады, оны да (34) теңдіктен байқауға болады.

Сөйтіп, бұл жолы (33) теңдіктің сол жағында тұрған айырманың таңбасы $(x_{0,}\, y_0)$ нүктесінің кішкентай аймағының ішінде жатқан нүктелер үшін оң да, теріс те болатын болды. Былайша айтқанда ол айырма бұл аймақта тиісті бір таңбаға ие болмайтын болды. Ендеше $(x_{0,}\, y_0)$ нүктесінде $f(x,y)$ функцияның экстремумы жоқ.

Сонымен, егер $AC - B^2 = f''_{x^2}\left(x_{0,}\, y_0\right) f''_{y^2}\ (x_{0,}\, y_0\ ) - f''_{xy}\left(x_{0,}y_0\right) < 0$ болса, онда $(x_{0,}\, y_0)$ нүктесінде $f(x,y)$ функцияның экстремумы болмайды. Егер $A = 0$ болса, онда да сондай.

Егер $AC - B^2 = 0$ болса, онда қосымша зерттеулер жүргізуге тура келеді. Біз бұл мәселеге тоқтамаймыз. Бұл жағдай күдікті жағдай болып табылады.

Бір мысал қарайық: $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + ax + by$.

Алдымен бұл функцияның дербес туындыларын іздейміз:

$f'_x(x,y) = 2x + y + a, \quad f'_y\,(x,y) = x + 2y + b$.

Енді қарастырылып отырған функцияның экстремумы болады-ау деген нүктелерді табу үшін, табылған дербес туындыларды нольге теңейміз:

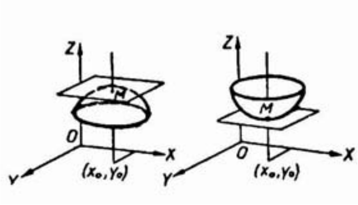
$$2x + y + a = 0$$
$$x + 2y + b = 0$$

Осы екі теңдеуді біріктіріп шешіп табамыз:

$x = \frac{1}{3}\left(b - 2a\right), \;\; y = \frac{1}{3}(a - 2b)$

$$A = f''_{x^2}\left[\frac{1}{3}(b - 2a), \frac{1}{3}(a - 2b)\right] = 2 > 0$$

$$AC - B^2 = f''_{x^2}\left[\frac{1}{3}(b - 2a), \frac{1}{3}(a - 2b)\right] \cdot$$
$$\cdot f''_{y^2}\left[\frac{1}{3}(b - 2a), \frac{1}{3}(a - 2b)\right] -$$
$$- f''^{2} xy\left[\frac{1}{3}(b - 2a), \frac{1}{3}(a - 2b)\right] = 3 > 0.$$



109-чертеж

Ендеше $\left[\frac{1}{3}\left(b - 2a\right), \frac{1}{3}\left(a - 2b\right)\right] = 3 > 0$ нүктеде мысалға алынып отырған функцияның минимумы болады.

Екі айнымалының функциясы $z = f(x, y)$ бетті кескіндейді деп біз жоғарыда айттық. Егер $x_0, y_0)$ нүктесінде $z = f(x, y)$ функцияның экстремумы болса, онда бұл нүктені беттің төбесі деп атайды. Бұл нүктеде $z = f(x, y)$ функцияның дербес туындыларының нольге айналады, геометрия тілімен айтқанда осы функцияны кескіндейтін беттің $M\left(x_{0,} \, y_{0,} \, z_0\right) = f(x_{0,} y_0)$ нүктесінде оған жүргізілген жанама жазықтық $XOY$ координаталар жазықтығына параллель болады (109 чертеж).

## § 8. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу

Екі айнымалының (G) облысында анықталған $z = f(x, y)$ функциясын қарайық. Бұл функцияның *(G)* облысындағы ең үлкен мәнін табу керек. Функцияның ең үлкен мәнімен оның максимумын бір-бірімен шатастыруға болмайды. Берілген *(G)* облысында функцияның бірнеше максимумдары болуы мүмкін.

Егер функция $z = f(x, y)$ өзінің ең үлкен мәнін *(G)* облысының бір ішкі нүктесінде қабылдаса, онда бұл нүктедегі функцияның дербес туындылары нольге тең болады, немесе бұл нүктеде оның дербес туындылары болмайды. Сөйтіп, функция

$z = f(x, y)$ өзінің ең үлкен мәнін максимумдары болатын нүктелерде қабылдайтын болды.

Функция $z = f(x, y)$ өзінің ең үлкен мәнін облыстың шекарасында жатқан нүктелерде де қабылдауы мүмкін, бірақ бұл нүктелерде функцияның дербес туындылары нольге тең болмауы мүмкін.

Облыстың шекарасында жатқан нүктелердегі $z = f(x, y)$ функциясының ең үлкен мәнін табу үшін келесі әдісті қолданамыз. Облыстың шекарасы болып табылатын сызықты параметрлік теңдеулермен өрнектейміз:

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

$x$ пен $y$-тің осы мәндерін $f(x, y)$ функциядағы $x$-тің және $y$-тің орнына қойсақ, сонда бір айнымалы $t$-нің функциясын табамыз:

$$f[\varphi(t), \psi(t)].$$

Енді осы функцияның $(\alpha, \beta)$ аралығындағы ең үлкен мәнін тапсақ болғаны, өйткені бұл мән $z = f(x, y)$ функцияның облыстың шекарасында жатқан нүктелердегі ең үлкен мәні болып табылады.

Сөйтіп, қорытып келгенде мынаны айтуға болады: берілген *(G)* облысындағы $z = f(x, y)$ функцияның ең үлкен мәнін табу үшін, алдымен экстремум болады-ау деген нүктелерді тауып олардың қайсыларында функцияның максимумы болады, соны білу керек және бұл нүктелердегі функцияның максимумдық мәндерін табу керек; сонан кейін жоғарыда айтылған тәсіл бойынша облыстың шекарасында жатқан нүктелердегі функцияның ең үлкен мәнін табу керек. Міне осылардың барлығын тауып болғаннан кейін оларды шамалары жөнінде салыстырып ең үлкенін сайлап алу керек.

Мына $z = sinx + siny + \sin(x + y)$ функцияның $(G) = [0, \frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}]$ облысындағы ең үлкен мәнін табу керек. Бұл берiлiп отырған облыс қабырғасы $\frac{\pi}{2}$-ге тең квадрат. Алдымен берілген функцияның экстремумы болады-ау деген нүктелерді іздейміз. Ол үшін оның дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial z}{\partial \text{x}} = cosx + \cos(x + y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = cosy + \cos(x + y)$$

Енді бұл туындыларды нольге теңеп табамыз:

$$cosx + \cos(x + y) = 0,$$
$$cosy + \cos(x + y) = 0,$$

бұл арадан $x = \frac{\pi}{3}, \quad y = \frac{\pi}{3}$.

Енді екінші ретті туындыларды іздейміз

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -sinx - \sin(x + y)\,; \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -siny - \sin(x + y)\,;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin(x + y).$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x = \frac{\pi}{3} \\ y = \frac{\pi}{3}}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} < 0$$

$$AC - B^2 = f''_{x^2}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \cdot f''_{v^2}\left(\frac{\pi}{3}\right) - f''_{xy}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6+\sqrt{3}}{2} > 0.$$

Сонымен, берілген функцияның $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ нүктеде максимумы болатын болды. Енді осы функцияның максимумдық мәнін табамыз:

$$z = sin\frac{\pi}{3} + sin\frac{\pi}{3} + sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6.$$

Енді облыстың шекарасында жатқан нүктелердегі берілген функцияның ең үлкен мәнін табамыз.

Берілген облыс квадрат болғандықтан, оның бір қабырғасының теңдеуі болады: $y = 0$. Бұл қабырғаның бойында жатқан нүктелер үшін берілген функция мына түрге көшеді.

$$z = 2sinx$$

Ал бұл функцияның ең үлкен мәні $x = \frac{\pi}{2}$ нүктесінде болады, және ол тең $z = 2$.

Квадраттың екінші қабырғасының теңдеуі болады: $x = \frac{\pi}{2}$,

Бұл қабырғаның бойында жатқан нүктелерде функция мына түрге көшеді:

$$z = 1 + siny + cosy.$$

Бұл функция өзінің ең үлкен мәнін мына $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ нүктеде қабылдайды, және ол тең: $z = 1 + \sqrt{2} = 2{,}4$.

Квадраттың үшінші қабырғасының теңдеуі болады: $y = \frac{\pi}{2}$

Бұл қабырғаның бойында жатқан нүктелердегі функцияның ең үлкен мәні мына $(\frac{\pi}{4}\ ,\frac{\pi}{2})$ нүктеде болады және ол тең $z = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}4$.

Квадраттың төртінші қабырғасының теңдеуі болады: $x = 0$. Бұл қабырғаның бойында берілген функция мына түрге көшеді: $z = 2siny$, ал осы кейінгі функция өзінің ең үлкен мәнін мына $(0,\frac{\pi}{2})$ нүктесінде қабылдайды және ол тең $z = 2$.

Енді осы барлық табылған мәндерді шамалары жөнінде салыстырып қарағанда берілген функцияның $G = [0,\frac{\pi}{2};\ \ 0,\frac{\pi}{2}]$ облысындағы ең үлкен мәні мына $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ нүктеде болатын болды.

## § 9. Салыстырмалы экстремумдар

1. Үздіксіз дербес туындылары бар $u = f(x, y, z, t)$ төрт айнымалының функциясы берілсін және бұл функциядағы айнымалылар келесі теңдеулер

$$\varphi(x, y, z, t) = 0$$
$$\psi(x, y, z, y) = 0 \qquad (35)$$

арқылы өзара байланысты болсын.

Егерде $(x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0)$ нүктенің аймағында жатқан барлық $(x, y, z, t)$ нүктелер үшін келесі теңсіздік

$$f(x, y, z, t) \le f(x_{0,}\ y_{0,}\ z_{0,}\ t_0)$$

орындалатын болса, $u = f(x, y, z, t)$ функцияның $(x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0)$ нүктесінде салыстырмалы максимумы бар дейміз.

Егерде $(x_{0,}\ y_{0,}\ z_{0,}\ t_0)$ нүктенің аймағы ішінде жатқан барлық $(x, y, z, t)$ нүктелер үшін келесі теңсіздік

$$f(x, y, z, t) \ge f(x_{0,}\ y_{0,}\ z_{0,}\ t_0)$$

орындалатын болса, $u = f(x, y, z, t)$ функцияның $(x_{0,}\ y_{0,}\ z_{0,}\ t_0)$ нүктесінде минимумы бар дейміз.

(35) теңдеулерді *байланыс теңдеулері* деп атаймыз.

Салыстырмалы максимум мен минимумды бірге атағанда *салыстырмалы экстремум* деп атаймыз.

$u = f(x, y, z, t)$ функцияның салыстырмалы экстремумын табудың бір жолы мынау: (35) байланыс теңдеулерін $z, t$ жөнінде шешіп, яғни $z$ пен $t$-ні ол теңдеулерден $x, y$ арқылы өрнектеп: $z = z(x, y), t = t(x, y)$, олардың осы өрнектерін берілген функциядағы $z$ пен $t$-нің орнына қоямыз. Сонда, берілген функция екі айнымалының функциясына айналады:

$u = f[x, y, z(x, y), t(x, y, )]$. Енді сегізінші параграфта баяндалған жолмен осы кейінгі функцияның абсолют экстремумын табамыз.

Енді $u = f(x, y, z, t)$ функцияның салыстырмалы экстремумын табудың екінші жолын көрсетейік.

Айталық, бір $(x_{0,} y_{0,} z_{0,} t_0)$ нүктесінде $u = f(x, y, z, t)$ функциясының салыстырмалы экстремумы болсын, онда $u = f[x, y, z(x, y), t(x, y, )]$ функцияның $(x_{0,}y_0)$ нүктесінде әдеттегі экстремумы (абсолют экстремумы) болады. Олай болса, бұл $(x_{0,}y_0)$ нүктесінде $u = f[x, y, z(x, y),\ t(x, y, )]$ функция үшін экстремумның қажетті шарты орындалады:

$$du = 0.$$

Бұл шарт $u = f(x, y, z, t)$ функция үшін мына түрге көшеді.

$$f'_x(x_{0,} y_{0,} z_{0,} t)dx + f'_y(x_{0,} y_{0,} z_{0,} t_0)dy + f'_z(x_{0,} y_{0,} z_{0,} t_0)dz +$$
$$+f'_t(x_{0,} y_{0,} z_{0,} t_0)dt = 0, \qquad (36)$$

мұнда $dx, dy$ – еркімізше алынған $x, y$ айнымалылардың өсімшелері, ал $dz, dt$ мына функциялардың

$$z = z(x, y)$$
$$t = t(x, y) \qquad (37)$$

дифференциалдары. $z$ пен $t$-нің осы өрнектерін (35) байланыс теңдеулеріне апарып қойып, мұның нәтижесінде шыққан теңбетеңдікті дифференциалдаймыз. Сонда

$$\varphi'_x(x_{0,} y_{0,} z_{0,} t_0)dx + \varphi'_y(x_{0,} y_{0,}z_{\ 0,} t_0)dy + \varphi'_z(x_{0,} y_{0,} z_{0,} t_0)dz +$$
$$+\varphi'_t(x_{0,} y_{0,} z_{0,} t_0)dt = 0,$$
$$\psi'_x(x_{0,} y_{0,} z_{0,} t_0)dx + \psi'_y(x_{0,} y_{0,} z_{0,} t_0)dy + \psi'_z(x_{0,} y_{0,} z_{0,} t_0)dz +$$
$$+\psi'_t(x_{0,} y_{0,} z_{0,} t_0)dt = 0, \qquad (38)$$

Осы кейінгі екі теңдеуден *dz* және *dt* тәуелді дифференциалдарды *dx* және *dy* тәуелсіз дифференциалдар арқылы өрнектейміз.

$$dz = A\,dx + B\,dy,$$
$$dt = C\,dx + D\,dy,$$

мұнда $A, B, C, D$ – мына $x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0$ шамаларға тәуелді өрнектер. *dz* пен *dt*-нің осы өрнектерін (36) теңдеуге апарып қойып, табамыз:

$$M(x_{0,} y_{0,} z_{0,} t)dx + N(x_{0,} y_{0,} z_{0,} t_0)dy = 0 \qquad (39)$$

*dx* пен *dy* еркінше алынған өсімше болғандықтан (39) теңдеу келесі екі теңдеумен

$$M(x_{0,}\, y_{0,}\, z_{0,}\, t_0) = 0, \quad N(x_{0,}\, y_{0,}\, z_{0,}\, t_0) = 0$$

парапар. Осы екі теңдеуді (35) байланыс теңдеулерімен біріктіріп төрт $x_{0,}\, y_{0,}\, z_{0,}\, t_0$ белгісізі бар төрт теңдеу системасын құрамыз:

$$M(x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0) = 0,$$
$$N(x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0) = 0,$$
$$\varphi(x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0) = 0,$$
$$\psi(x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0) = 0,$$

Осы теңдеулерді біріктіріп шешіп $u = f(x, y, z, t)$ функцияның экстремумы болатын $x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0$ нүктелерін табуға болады.

(36), (38) теңдеулерден *dz* пен *dt*-ні шығару үшін анықталмаған көбейткіштер тәсілі деп аталатын Лагранж әдісін қолданған қолайлы болады.

Бұл әдістің мазмұны былай.

(38) теңдеулердің әрқайсысын анықталмаған $\lambda$ және $\mu$ көбейткіштерге көбейтіп (36) теңдеуге мүшелеп қосамыз. Сонда

$$[f'_x(x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0) + \lambda\varphi'_x + \mu\psi'_x]dx + [f'_y(x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0) +$$
$$+\lambda\varphi'_y + \mu\psi'_y]dy + [f'_z(x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0) + \lambda\varphi'_z + \mu\psi'_z]dz +$$
$$+[f'_t(x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0) + \lambda\varphi'_t + \mu\psi'_t]dt = 0 \qquad (40)$$

Анықталмаған $\lambda, \mu$ көбейткіштерді сайлап алу өзіміздің қолымызда болғандықтан, оларды мына теңдіктер

$$f'_z(x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0) + \lambda_0\varphi'_z + \mu_0\psi_z = 0$$
$$f'_t(x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0) + \lambda_0\varphi'_t + \mu_0\psi_t = 0 \qquad (41)$$

орындалатындай етіп сайлап аламыз. Бұдан кейін (40) теңдеу мына түрге көшеді:

$$[f'_x(x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0) + \lambda\varphi'_x + \mu\psi'_x]dx + [f'_y(x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0) +$$
$$+\lambda\varphi'_y + \mu\psi_y]dy = 0.$$

*dx* пен *dy* еркінше алынған өсімше болғандықтан, кейінгі теңдеу келесі екі теңдеумен парапар:

$$f'_x(x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0) + \lambda_0\varphi'_x + \mu_0\psi'_x = 0$$
$$f'_y(x_{0,}y_{0,}z_{0,}t_0) + \lambda_0\varphi'_y + \mu_0\psi'_y = 0 \qquad (42)$$

(41), (42) және (35) теңдеулерден мынадай қорытындыға келеміз: $u = f(x,y,z,t)$ функцияның салыстырмалы экстремумы болады-ау деген нүктелерді табу үшін келесі алты теңдеуді:

$$
\begin{gathered}
f'_x(x,y,z,t) + \lambda\varphi'_x(x,y,z,t) + \mu\psi'_x(x,y,z,t) = 0,\\
f'_y(x,y,z,t) + \lambda\varphi'_y(x,y,z,t) + \mu\psi'_y(x,y,z,t) = 0,\\
f'_z(x,y,z,t) + \lambda\varphi'_z(x,y,z,t) + \mu\psi'_z(x,y,z,t) = 0,\\
f'_t(x,y,z,t) + \lambda f'_t(x,y,z,t) + \mu\psi'_t(x,y,z,t) = 0,\\
\varphi(x,y,z,t) = 0, \qquad (43)\\
\psi(x,y,z,t) = 0,
\end{gathered}
$$

$x, y, z, t, \lambda, \mu$ бойынша шешу керек.

Сонымен, мынадай ережеге келеміз: $u = f(x,y,z,t)$ функцияның салыстырмалы экстремумы болады-ау деген нүктелерді табу үшін, алдымен $F = f + \lambda\psi + \mu\Psi$ көмекші функцияны құрамыз, сонан кейін $\lambda$ мен $\mu$-ді тұрақты деп қарап бұл көмекші функцияның $x, y, z, t$ бойынша алынған дербес туындыларын нольге теңеп төрт теңдеу құрамыз, бұл теңдеулерді байланыс теңдеулермен біріктіріп теңдеулер системасына келеміз.

Бір мысал келтірейік.

Егер $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ болса, мына $f(x,y,z) = x^2\,y^2\,z^2$ функцияның максимумын табу керек.

Мұнда байланыс теңдеуі – центрі координаталардың бас нүктесінде жатқан радиусы $c$-ге тең сфераны кескіндейді. Сондықтан берілген $f(x,y,z) = x^2\,y^2\,z^2$ функцияның максимумы сфераның бойында жатқан нүктеде болатын болды.

Жоғарыда келтірілген ереже бойынша алдымен көмекші функцияны құрамыз:

$$F = x^2y^2z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - c^2)$$

Енді бұл функцияны $x, y, z$ бойынша дифференциалдап және мұның нәтижесінде шыққан дербес туындыларды нольге теңеп табамыз:

$$
\begin{gathered}
2xy^2z^2 + 2\lambda x = 0,\\
2x^2yz^2 + 2\lambda y = 0,\\
2x^2y^2z + 2\lambda z = 0.
\end{gathered}
$$

Бұл арадан $x^2 = y^2 = z^2,\ \lambda = -x^4$

Енді байланыс теңдеуінен табамыз: $3x^2 = c^2,\ \ 3y^2 = c^2$

$3z^2 = c^2;\ \ x = \pm\frac{c}{\sqrt{3}},\quad y = \pm\frac{c}{\sqrt{3}},\quad z = \pm\frac{c}{\sqrt{3}}$. Бұл нүктелерде берілген функцияның мәндері бірдей және тең $\frac{c^6}{27}$. Осы сан қарастырылып отырған функцияның максимумы болып табылады. Сондықтан $\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \frac{c^2}{3} = \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$, яғни үш $x^2, y^2, z^2$ оң санның геометриялық ортасы олардың арифметикалық ортасынан аспайды.

2. Енді максимум және минимум теориясын тәжірбиелік есептерді шығарғанда қалай пайдалану керек, соған мысалдар келтірейік.

а) Формасы тік бұрышты параллелепипед тәрізді астау жасау керек. Осы астауға аз материал кету үшін оның мөлшерлері қандай болу керек, егер сыйымдылығы (көлемі) күн бұрын белгілі болса?

Егер астаудың табанының ұзындықтарын $x, y$ арқылы, ал биіктігін $z$ арқылы белгілесек, онда оның бетінің ауданы болады:

$$f(x, y) = xy + 2xz + 2yz \qquad (44)$$

Міне бұл біздің іздеп отырған функциямыз. Есептің шарты бойынша астаудың көлемі белгілі, бұл болсын $a^3$. Сонда $xyz = a^3$, бұл арадан $z = \frac{a^3}{xy}$. Енді $z$-тің осы (44) теңдіктің оң жағына апарып қоямыз. Сонда

$$f(x, y) = xy + \frac{2(x+y)a^3}{xy} = xy + 2a^3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

Ендігі мақсат осы функцияның минимумын табу. Ол үшін оның дербес туындыларын тауып оларды нольге теңейміз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{2a^3}{x^2}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{2a^3}{y^2},$$

$$x^2y - 2a^3 = 0, \ \ xy^2 - 2a^3 = 0.$$

Осы кейінгі екі теңдеуді біріктіріп шешіп табамыз:

$$x = y = \sqrt[3]{2}, z = \frac{a^3}{a^2(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{a\sqrt[3]{2}}{2}.$$

Осы табылған мөлшерлер құрылған $f(x, y) = xy + 2a^3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

функцияға минимум бере ме соны тексерейік.

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{4a^3}{x^3} = \frac{4a^3}{2a^3}2 > 0; \ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4a^3}{y^3} = \frac{4a^3}{2a^3} = 2 > 0;$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, dy} = 1$$

$$AC - B^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Жоғарыда табылған мөлшерлер үшін $f(x,y) = xy + 2a^3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ функцияның минимумы болатын болды.

б) Жарық сәулесі үшбұрышты призманың жағына түседі. Түсуші сәуле мен шығушы сәуленің арасындағы бұрыш ең аз болу үшін түсу бұрышы қандай болу керек (110 чертёж)?

Көрсетілген чертёж бойынша табамыз:

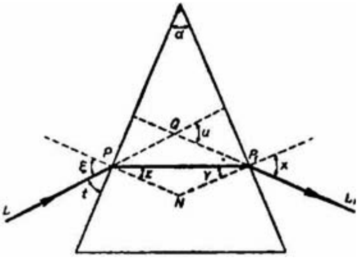
$$u = x - y + t - z; \quad y + z = \alpha;$$

$$sin\, x = k \sin y;$$

$$\sin t = k \sin z;$$

мұнда, $k$ – тұрақты сан, оны призмадағы сәуленің сыну коэффициенті деп атайды.

Бұл есепті шығару үшін функцияның салыстырмалы экстремумын табу жөніндегі ережені қолданамыз. Сонда көмекші функция болады:



110-чертеж

$$F(x, y, z, t, \lambda_{1,} \lambda_{2,} \lambda_3) = x - y + t - z + \lambda_1(y + z - \alpha) +$$
$$+\lambda_2(\sin x - k \sin y) + \lambda_3\,(sin\, t - k\, sin\, z).$$

Бұл функцияның $x, y, z, t$ айнымалылар бойынша дербес туындыларын тауып, оларды нольге теңейміз. Сонда

$1 + \lambda_2 \cos x = 0,\ -1 + \lambda_1 - k\lambda_2 \cos y = 0,$

$-1 + \lambda_1 - k\lambda_3 \cos z = 0,\ 1 + \lambda_3 cost = 0;$

бұл теңдеулерді мына

$$y + z = \alpha,\ \sin x = k\, sin\, y,\ \sin t = k \sin z$$

байланыс теңдеулерімен біріктіріп шешіп табамыз:

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\cos x};\ \lambda_3 = -\frac{1}{\cos t};\ \lambda_1 = 1 - k\frac{\cos z}{\cos t}.$$

Бұдан кейін келесі теңдеулер системасына келеміз:

$$\frac{\cos y}{\cos x} = \frac{cos\ z}{\cos t},$$
$$y + z = \alpha,$$
$$\sin x = k \sin y,$$
$$sint = k \sin z,$$

бұл арадан

$$\cos x = \sqrt{1 - k^2 sin^2 y},\ \ \cos t = \sqrt{1 - k^2 sin^2 z}$$

Бұдан кейін жаңағы төрт теңдеу системасы келесі екі теңдеу системасына келтіріледі:

$$\frac{\sqrt{1-k^2sin^2a}}{\cos y}=\frac{\sqrt{1-k^2sin^2z}}{\cos z},$$

$$y+z=\alpha$$

Осы екі теңдеуден табамыз: $tg^2y=tg^2z$, бұл арадан $y=z=\frac{\alpha}{2}$ және сонда $x=t$ яғни сәуленің түсу бұрышы мен шығу бұрышы бір-біріне тең болу керек.

## §10. Жабық функциялар

1. Екі $x, y$ айнымалыларды байланыстыратын

$$F(x,y)=0 \tag{45}$$

теңдеуді қарайық. (45) теңдеуді зерттеудегі негізгі мәселе мынау: осы теңдеу $y$ бойынша шешіле ме, яғни (45) теңдеуді теңбе-теңдікке айналдыратын бірмәнді $y=f(x)$ функция табыла ма?

Егер (45) теңдеуді $x$-тің барлық мәндері үшін теңбе-теңдікке айналдыратын бір мәнді $y=f(x)$ бар болатын болса, онда (45) теңдеу $y$-ті $x$-тің жабық функциясы етіп анықтайды дейміз. Сөйтіп, бір айнымалының функциясын теңдеу түрде анықтауға болатын болды. Мәселен, мына теңдеулерді қарайық:

$$x^2+y^2-1=0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\ (x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$$

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

Бұл теңдеулердің бәрі де $y$ бойынша шешілетін теңдеулер, мұнда $y$-ті $x$ арқылы өрнектеу қиын емес. Осы келтірілген теңдеулердің барлығы да $y$-ті $x$-тің функциясы етіп анықтайды. Бұл функциялардың барлығы да алгебралық функцияға жатады. Егер алгебралық функцияның дәреже көрсеткіші төрттен артық болса, онда $y$-ті $x$ арқылы өрнектеу мүмкін емес. Жалпы алғанда (45) теңдеуден $y$-ті $x$ арқылы өрнектеу өте сирек жағдайларда ғана іс жүзіне алады. Сондықтан (45) теңдеуді $y$ немесе $x$ арқылы шешпей осы теңдеудің бір мәнді $y=f(x)$ функцияны анықтайтынын қалай білуге болады, міне негізгі мәселе осында. (45) теңдеу әрқашанда бір мәнді $y=f(x)$ жабық функцияны анықтайды деп айтуға болмайды. Мәселен, мына функциялар $x^2+y^2=0$, $x^2+y^2+1=0$ ешқандай жабық функцияны анықтамады. (45) теңдеу бір мәнді $y = f(x)$ жабық функцияны анықтау үшін, оның сол жағындағы функция $F(x, y)$ қандай шарттарды қанағаттандыру керек. Міне енді осыған келеміз.

**Теорема**. *Егер біріншіден, функция* $F(x, y)$ $(x_{0,}y_0)$ *нүктесінің аймағында, атап айтқанда мына* $R[x_0 - h,\ x_0 + h;\ y_0 - h_{1,}\ y_0 + h_1]$ *тік төртбұрыштың барлық нүктелерінде үздіксіз болса, екіншіден осы* $(x_{0,}y_0)$ *нүктесінде функция* $F(x, y)$ *нольге айналса, яғни* $F(x_{0,}y_0) = 0$, *үшіншіден* $F(x, y)$ *функцияның* $(x_{0,}y_0)$ *нүктесінде үздіксіз және нольден айрықша* $F'y(x_{0,}y_0) \neq 0$ *дербес туындысы болса, онда* $x_0$ *нүктесінің* $(x_0\delta,\ x_0 + \delta)$ *(мұнда* $0 < \delta \leq h$*) аймағында анықталған (45) теңдеуді теңбе-теңдікке айналдыратын бір мәнді үздіксіз* $y = f(x)$ *функция бар болады. Мұндай функция біреу-ақ ғана болады және* $x_0$ *нүктесінде мына теңдікті* $y_0 = f(x_0)$ *қанағаттандырады. Айтылып отырған функция* $y = f(x)$, $x_0$ *нүктесінің аймағында дифференциалданатын функция болып табылады және оның туындысы мен дифференциалы келесі формулалармен анықталады:*

$$y' = f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)};\ dy = df(x) = -\frac{F'_x\,(x, y)}{F'_y\,(x, y)}dx.$$

Осы тұжырымдалған теореманы жабық функцияның бар болу теоремасы деп атайды.

Теореманың шарттары бойынша $F'_y(x_{0,}y_0) \neq 0$ және үздіксіз. Сондықтан, $(x_{0,}y_0)$ нүктесінің $R[(x_0 - h, x_0 + h;\ \ y_0 - h,\ y_0 + h]$ аймағында жатқан барлық $(x, y)$ нүктелер үшін $F'(x, y) \neq 0$. Айталық осы $R$ аймағында $F'_y(x, y) > 0$ болсын. Енді $x$-ке тұрақты $x_0$ мәнін берейік, яғни $x = x_0$ болсын. Сонда $F(x_{0,}y) -$ бір айнымалы $y$-тің ғана функциясы болып табылады. Ал, біздің ұйғаруымыз бойынша бұл функцияның $y$ бойынша алынған туындысы $R$ аймағында оң. Ендеше бұл функция үдемелі. Сөйтіп, $R$ аймағының ішіндегі $OY$ осіне параллель әрбір $x = const$ кесіндінің бойында функция $F(x, y)$ үдемелі болатын болды.

Теореманың шарттары бойынша $F(x_{0,}y_0) = 0$, $F(x_{0,}y) -$ үдемелі, олай болса $F(x_{0,}y_0 - h_1) < 0, F(x_0y_0 + h_1) > 0$ болады.

Енді бір ғана айнымалы $x$-тің келесі екі функциясын қарайық: $F(x, y_0 - h)$, $F(x, y_0 + h)$; теореманың шарттары бойынша бұл екі функция үздіксіз, сондықтан $x_{0,}$ нүктесінің $(x_{0,} - \delta, x_{0,} + \delta)$ аймағының ішінде жатқан барлық $x$ нүктелер үшін бұл функциялар өздерінің бұрынғы таңбаларын сақтай алады, яғни мына теңсіздіктер $F(x, y_0 + h_1) > 0,\ F(x_0 y_0 - h_1) < 0$ болады.

$(x_{0,} - \delta, x_{0,} + \delta)$ аймағынан еркімізше бір $\bar{x}$ нүктені сайлап алайық, сонда $F(\bar{x}, y)$ бір айнымалы $y$-тың функциясы болып табылады және $F\left(\bar{x}_{0,} y_0 - h_1\right) < 0, F\left(x_{0,} y_0 + h_1\right) > 0$.

Бұл арадан мынадай қорытындыға келеміз:

$F(\bar{x}, y) -$ айнымалы $y$-тің үздіксіз функциясы және $[y_0 - h, y_0 + h_1]$ сегментінің ұштарында таңбалары әр түрлі мәндерді қабылдайды, былайша айтқанда бұл функция бір айнымалының үздіксіз функцияларының қасиеттері жөніндегі Коши теоремасының шарттарын қанағаттандырады (III тарау, §18). Олай болса $y_0 - h_1$ мен $y_0 + h_1$-нің арасында жатқан бір $\bar{y}$ нүктесінде $F(\overline{x},\ y)$ нольге айналады, яғни $F(\overline{x},\ \ \overline{y}\ ) = 0$.

$F(\overline{x},\ y)$ үдемелі болғандықтан, егер $y > \bar{y}$ болса, онда $F(\overline{x},\ y) > 0$ болады, егер $y > \bar{y}$ болса, онда $F(\overline{x},\ y) < 0$ болады. Сондықтан, $\bar{y}$ – мына $\bar{x}$ пен бірге (45) теңдеуді қанағаттандыратын $y$-тің жалғыз ғана мәні болып табылады.

Сонымен, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ аралығындағы әрбір $x$-тің мәніне $y$-тің бір тиянақты мәні сәйкес келеді. Олай болса $y$ – мына $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ аралығында анықталған бір мәнді $y = f(x)$ функция болып табылады. Енді осы функция теоремадағы айтылған шарттарды қанағаттандыра ма, міне соны тексерейік.

Функция $y = f(x)$, (45) теңдеуді қанағаттандырады, өйткені бұл функцияның құрылуы солай. $x_0$ нүктесінде $f(x) = y_0$ өйткені теореманың шарттары бойынша $F\left(x_{0,} y_0\right) = 0$ және $x_{0,}$ мен бірге бұл теңдеуді қанағаттандыратын $y$-тің $y_0$-ден басқа мәні болмауға тиіс.

Функция $y = f(x)$ біреу ғана, өйткені $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ аралығындағы әрбір $x$-тің мәніне $y$-тің осы $x$ пен бірге (45) теңдеуді қанағаттандыратын бір-ақ қана мәні сәйкес келеді.

Функция $y = f(x)$, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ аралығында үздіксіз. Алдымен бұл функцияның $x_0$ нүктесінде үздіксіздігін дәлелдейік. $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ аралығындағы барлық $x$-тер үшін мына теңсіздік орындалады: $y_0 - h_1 \leq f(x) y_0 + h_1$ немесе $f(x_0) - h_1 \leq f(x) \leq f(x_0) + h_1$. Былайша айтқанда қалай мына теңсіздік $|x - x_0| \leq \delta$ орындалысымен, солай мына теңсіздік $|f(x) - f(x_0| \leq h_1$ орындалады. $h_1$ санын тілегенімізше аз етіп алуға болады, сондықтан кейінгі теңсіздіктің орындалуы $y = f(x)$ функцияның

$x_0$ нүктесінде үздіксіздігін дәлелдейді. $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ аралықтың $x_0$ нүктесінен кез келген нүктесіндегі $y=f(x)$ функцияның үздіксіздігі дәл осылай дәлелденеді.

Енді $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ аралығындағы $y=f(x)$ функцияның үздіксіз дифференциалданатынын дәлелдейік. Аргумент $x$-ке $\Delta x$ өсімшені берейік. Сонда $x+\Delta x$ мәнге $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ мән сәйкес келеді. Мұнда $\Delta x$, $\Delta y$ өсімшелердің аздығы сондай, нүкте $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ $G=[x_0-\delta, x_0+\delta; y_0-h_1, y_0+h_1]$ облысының сыртына шықпайды. Ендеше $F(x+\Delta x), (y+\Delta y)=0$. Олай болса

$$\Delta F=F(x+\Delta x, \qquad y+\Delta y)-F(x,y)=0$$

$F(x,y)-G$ облысында дифференциалданатын функция болғандықтан, оның толық өсімшесі $\Delta F$ мына түрде жазылады:

$$\Delta F=F'_x(x,y)\Delta x+F'_y(x,y)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y=0,$$

Мұнда $\alpha, \beta$ шексіз аз шамалар, яғни олар $\Delta x, \Delta y$ өсімшелермен бірге нольге ұмтылады. Бұл арадан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x,y)+\alpha}{F'_y(x,y)+\beta}$$

Егер $\Delta x$-ті нольге ұмтылуға мәжбүр етсек, $\Delta y$-те нольге ұмтылады, өйткені $y=f(x)$ үздіксіз функция. Ендеше $\alpha\to 0$ $\beta\to 0$.

Сөйтіп,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F'_x(x,y)+\alpha}{F'_y(x,y)+\beta}=-\frac{F'x(x,y)}{F'y(x,y)}$$
$$\Delta x\to 0 \qquad\qquad \Delta x\to 0$$

немесе

$$y'=f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \tag{46}$$

және

$$dy=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}dx$$

(46) теңдіктің оң жағындағы бөлшектің алымы да және бөлімі де үздіксіз болғандықтан, туынды $y'=f'(x)$ ол да үздіксіз болады.

Осы дәлелденген теореманы геометрия жүзінде былай түсінуге болады: (45) теңдеу жазықтықта қисықты кескіндейді. Бұл қисық бірнеше тармақтардан тұруы мүмкін. Егер $(x_0, y_0)$ нүктесінің аймағында, атап айтқанда $R[x_0-h,\ x_0+h;\ y_0-h_0$ $y_0+h_1]$ тікбұрышты төртбұрышта теореманың барлық шарттары орындалса, онда $(x_0, y_0)$ нүкте арқылы (45) теңдеуді кескіндейтін қисықтың бір-ақ қана тармағы өтеді. Мәселен, жоғарыда келтірілген мына теңдеуді қарайық:

$$F(x, y) = (x^3 + y^3) - 3axy = 0.$$

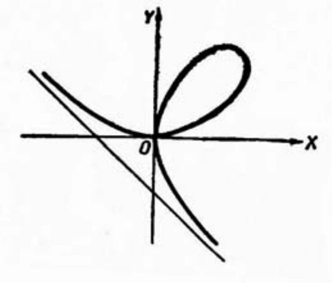
Осы теңдеуді кескіндейтін қисықты Декарт жапырағы дейді. Координат олардың бас нүктесі аймағында теореманың барлық шарттары орындалмайды, өйткені дербес туынды $E_{\bar{y}}(x, y) = 3y^2 - 3ax$ бұл нүктеде нольге айналып кетеді. (111-чертёж).

$F(x, y)$ функцияның екінші ретке дейін үздіксіз дербес туындылары болсын, онда (45) теңдеумен анықталатын $y = f(x)$ жабық функцияның да екінші ретті туындысы болады; оны (46) теңдіктен байқауға болады; жабық функцияның екінші ретті туындысын табу үшін (46) теңдікті немесе бәрі бір мына теңдікті

$$F'_x(x, y) + F_y(x, y)y' = 0$$

$x$ бойынша дифференциалдаймыз. Сонда

$$F''_{x2}(x, y) + 2F''_{xy}(x, y)y' +$$
$$+ F_{y^2}(x, y){y'}^2 + F'_y(x, y)y'' = 0.$$



111-чертеж

Осы теңдіктің $y'' = f''(x)$ екінші ретті туындыны табамыз. Кейінгі теңдікті $x$ бойынша дифференциалдап $y''' = f'''(x)$ үшінші ретті туындыны табамыз.

**2.** Енді $x, y, z$ үш айнымалыны байланыстыратын келесі теңдеуді қарайық:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (47)$$

Егерде $(x_0, y_0)$ нүктесінің аймағында анықталған бір мәнді $z = (x, z)$ функция табылып, (47) теңдеудігі $z$-тің орнына осы функцияны қойғанда теңдеу теңбе-теңдікке айналса, (47) теңдеу $x, y$ екі айнымалының жабық функциясын анықтайды дейміз: Егер осындай функция $z = f(x, y)$ табылса, онда бұл функцияны (47) теңдеудің түбірі деп те атайды.

Жоғарыда дәлелденген теорема (47) теңдеу үшін де дұрыс болады.

**Теорема**. Егер біріншіден функция $F(x, y, z)$ $(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінің аймағында үздіксіз болса, екіншіден осы аймақта оның үздіксіз $F'(x, y, z)$ туындысы болса, үшіншіден $F(x_0, y_0, z_0)$ нольге тең болса $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, ал $F_z' x_0, y_0, z_0$ нольге тең болмаса

$F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, онда (47) теңдеудің айтылып отырған аймақта $z$ жөнінде жалғыз ғана түбірі бар, яғни бұл теңдеуді теңбетеңдікке айналдыратын үздіксіз функция $z = f(x, y)$ біреу-ақ болады және $(x_0, y_0)$ нүктесінде бұл функция $z_0$-ге айналады, яғни мына теңдікті $z_0 = f(x_0, y_0)$ қанағаттандырады. $(x_0, y_0)$ нүктесінің аймағында $z = f(x, y)$ функцияның $x$ және $y$ бойынша алынған

$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$ үздіксіз дербес туындылары бар болады және бұл туындылар келесі теңдіктерден анықталады:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \qquad (48)$$

Бұл теореманың дәлелдеуін келтірмейміз, өйткені жоғарыдағы бұдан бұрын келтірілген теорема қалай дәлелденсе, бұ да солай дәлелденеді.

$F(x, y, z)$ функцияның екінші ретке дейін үздіксіз туындылары бар деп ұйғарып (48) теңдіктердің біреуін $x$ немесе $y$ бойынша диференциалдап $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ екінші ретті дербес туындыларды табамыз. Мәселен, (48) теңдіктердің екіншісін $x$ бойынша дифференциалдап табамыз:

$$F''_{xy}(x, y, z) + F''_{yz}(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + F''_{xz}(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} +$$

$$+F''_{z^2}(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + F'_z(x, y, z)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

осы теңдіктен $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ екінші ретті аралас туындыны табамыз.

## §11. Функциялық анықтауыш және түрлендірулер

1. $x_{1,} x_{2,\dots\dots,}$ $x_n$ айнымалының *n* функцияларын қарайық:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \qquad (49)$$

Бұл функциялар *n* – өлшеуішті *D* облысында анықталсын және бұл облыстың барлық нүктелерінде олардың барлық айнымалылар бойынша бірінші ретті үздіксіз дербес туындылары болсын. Осы дербес туындылардан келесі анықтауышты құрайық:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Бұл анықтауышты Якоби анықтауышы немесе якобиан деп атайды және оны былай белгілейді:

$$J(x_{1,}x_{2,}. \ . \ . \ ,x_n) \text{ немесе } \frac{D(f_{1,}f_{2,. \ . \ .}f_n}{D(x_{1,}x_{2,. \ . \ .}x_n)}.$$

Бұл анықтауыштың қасиеттеріне тоқтамақ, біз оның қолданылуына ғана тоқтаймыз.

2. Келесі екі функцияны қарайық:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \tag{50}$$

Бұлар *ХОУ* жазықтығын бір *(G)* облысында дифференциалданатын функциялар болсын.

*(G)* облысында жатқан, координаттары $x, y$ әрбір *М* нүктесіне (50) қатыстар көмегімен $\xi\ 0, \eta$ жазықтығындағы *(Р)* облысында жатқан координаттары $\xi, \eta$ нүктесі сәйкес келді. *(Р)* облысын *(G)* облысының кескіні дейді. Ал (50) теңдеулерді түрлендіру формулалары немесе тек түрлендірулер деп атайды. Олардың бұлай аталу себебі (50) формулалардың көмегімен *ХОУ* жазықтығының *(G)* облысы $\xi 0_1 \eta$ жазықтығының *(Р)* облысына түрленеді. Мәселен, аналитикалық геометриядан белгілі координаттарды түрлендіруі формулаларын қарайық:

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 x + b_1 y, \\ \eta &= a_2 x + b_2 y, \end{aligned} \tag{51}$$

мұнда $a_1, b_{1,} a_2, b_2$ – тұрақты сандар. Осы келтірілген түрлендіруді аффиндық түрлендіру деп атайды. Егер $(x, y)$ және $(\xi, \eta)$ нүктелерді бір жазықтықтың нүктелері деп қарасақ, онда (51) формулалар *ХОУ* жазықтығын өзіне түрлендіреді.

Түрлендірудегі негізгі мәселе мынада: (50) теңдеулерден $x$ пен $y$-ті $\xi, \eta$ арқылы өрнектеуге, былайша айтқанда ол теңдеулерді $(x, y)$ бойынша шешуге бола ма және оларды осылай шешу арқылы пайда болған функцияларды қалай дифференциалдауға болады?

Егер $(x, y)$ нүктесінің кескіні болып табылатын нүкте $(\xi, \eta)$, $\xi\ 0,\ \eta$ жазықтығында жатқан *(Р)* облысында үздіксіз өзгергенде,

$(x, y)$ нүктенің өзі *(G)* облысында үздіксіз өзгерсе, онда *(P)* облысын *(G)* облысы кескіні деп атайтынын біз жоғарыда айттық. Егер *(G)* облысының түрлі екі нүктесіне *(P)* облысының әрқашанда түрлі екі нүктесі сәйкес келсе, онда *(P)* облысының әрбір нүктесі *(G)* облысының қандай нүктесінің кескіні болып табылатынын біз білеміз. Сондықтан, *(P)* облысының әрбір нүктесіне бастапқы *(G)* облысының тиісті нүктесін сәйкес келтіре аламыз, былайша айтқанда $x$ пен $y$-ті (50) теңдеулерден бір мәнді етіп $\xi, \eta$ арқылы өрнектейміз:

$$x = g(\xi, \eta),\ \ y = h(\xi, \eta) \qquad (52)$$

Егер осы жағдай орындалса, онда түрлендіруді өзара бір мәнді дейді, ал (52) системаны (50) түрлендіруге кері түрлендіру деп атайды.

Мысал үшін келесі түрлендіруді қарайық:

$$\xi = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \eta = \frac{y}{x^2+y^2}. \qquad (53)$$

Бұл түрлендіруді кері радиустер түрлендіруі немесе инверсия деп атайды.

*XOY* жазықтығындағы координаттар $x, y$ $M$ нүктесіне, *OM* сәуленің бойында жатқан координаттары $\xi, \eta$ нүктесі мына заң

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

бойынша сәйкес келеді. Кейінгі теңдіктен мынадай қорытындыға келеміз: $ON = \frac{1}{OM}$ яғни $N$ нүктесінің радиус-векторы, $M$ нүктесінің кері радиус-векторына сәйкес келеді. Радиусы 1-ге тең дөңгелектің ішінде жатқан нүктелер, оның сыртында, жатқан нүктелерге түрленеді және керісінше.

(53) түрлендіруге кері түрлендіру болады:

$$x = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \ \ y = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}.$$

Бұл тағы да инверсия болды:

Мұнда *(G)* облысы үшін координат бас нүктесінен шығарып тастап бүкіл *XOY* жазықтығын, ал *(P)* облысы үшін координат бас нүктесін шығарып тастап бүкіл $\xi\ 0_1\ \eta$ жазықтығын алуға болады.

$\xi\ 0_1\ \eta$ жазықтығында жатқан $\xi = c,\ \eta = k$ түзулерге *XOY* жазықтығында жатқан мына дөңгелектер

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{c}x = 0,\ x^2 + y^2 - \frac{1}{k}y = 0$$

сәйкес келеді.

Сол сияқты *XOY* жазықтығындағы $x = a$, $y = b$ түзулерге $\xi\, 0_1\, \eta$ жазықтығында жатқан төмендегі дөңгелектер

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{1}{c}\xi = 0;\ \xi^2 + \eta^2 - \frac{1}{k}\eta = 0$$

сәйкес келеді.

**3.** Егер $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ сызықты функциялар болмаса, онда (50) теңдеулерді аффиндік түрлендіру деп айтуға болмайды, бірақ оларды жалпы қисық сызықты координаталарға түрлендіру деп атайды. $\xi, \eta$ – мәндерін М нүктесінің қисық сызықты координаталары деп атайды.

Мысал үшін келесі формулалармен

$$\xi = - x + \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\eta = -x - \sqrt{\sqrt{xx^2 + y^2},}$$

берілген түрлендіруді қарайық.

$\xi\, 0_1\, \eta$ жазықтығында жатқан $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$ түзулерді координаттық сызық деп атайды. Бұл сызықтарға *XOY* жазықтығында «ортақ осьті» және «ортақ фоусті» параболалар сәйкес келеді:

$$y^2 = 2\xi\left(x - \frac{\xi}{2}\right),$$
$$y^2 = 2\eta\left(x + \frac{\eta}{2}\right). \qquad (54)$$

Бұл параболалардың фокустері координат бас нүктесінде жатады, ал осьтері *OX* осімен дәл келеді. (54) параболалар теңдеулеріндегі $\xi, \eta$ параметрлер *M* (*x*, *y*) нүктесінің қисық сызықты координаттары болып табылады. Сондықтан бұл координаттарды параболалық координаттар деп атайды.

Егер (54) теңдеулерді біріншісіндегі $\xi$-дің орнына $2c^2$-ты алсақ, яғни былай ұйғарайық: $\xi = 2c^2$ ал екіншісіндегі η-ның орнына – $2c^2$-ты алсақ, яғни былай ұйғарсақ: $\eta = 2c^2$, онда

$$y^2 = 4\,c^2\,(c^2 + x),$$
$$y^2 = 4\,c^2(c^2 - x).$$

Берілген түрлендіруден табамыз:

$$x = -\frac{\xi + \eta}{2}, \quad y = \pm\sqrt{-\xi\,\eta}.$$

Бұл кері түрлендіру өзара бірмәнді болу үшін түбір алдындағы таңбалардың біреуін ғана алу керек, мәселен плюс таңбасын.

**4.** (50) теңдеулерді *x, y* бойынша шешпей-ақ осы кері функциялардың туындыларын табуға болады. Ол үшін (50) теңдеулердің оң жағындағы *x* пен *y* тің орнына $\mathrm{g}\,(\xi,\eta), h(\xi,\eta)$ функцияларды қоямыз. Сонда, келесі теңбе-теңдіктерді табамыз:

$$\xi = \varphi[\mathrm{g}(\xi,\eta),\quad \mathrm{h}(\xi,\eta)],$$
$$\eta = \psi[\mathrm{g}(\xi,\eta),\quad \mathrm{h}(\xi,\eta)].$$

Бұл теңбе-теңдіктердің әрқайсысын $\xi$ және $\eta$ бойынша дифференциалдап табамыз:

$$1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial h}{\partial\xi}, \qquad 0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial h}{\partial\eta},$$
$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\xi} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial h}{\partial\xi}, \qquad 1 = \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\eta} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial h}{\partial\eta}.$$

Бұл системаны $\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\xi} = \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial\xi}, \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\eta} = \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial\eta}, \frac{\partial h}{\partial\xi} = \frac{\partial y}{\partial\xi}, \frac{\partial h}{\partial\eta} = \frac{\partial y}{\partial\eta}$ дербес туындылар бойынша шешеміз. Сонда

$$\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\xi} = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}}, \quad \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\eta} =- \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}},$$
$$\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial\xi} = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}}, \quad \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial\mu} = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}},$$

мұнда $\frac{D(\xi,\ \eta)}{D(x,\ y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix}$ – якобиан.

**5.** Жабық функциялар бір емес, бірнеше теңдеулер арқылы берілуі де мүмкін, мәселен

$$\begin{gathered} F_1(x_1,\, x_2,\ \ldots, x_n;\ y_1, y_2,\ \ldots,\quad y_m) = 0, \\ F_2(x_1,\, x_2,\ \ldots, x_n;\ y_1, y_2,\ \ldots,\ y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x_1,\, x_2,\ \ldots, x_n;\ y_1, y_2,\ \ldots,\quad y_m) = 0, \end{gathered} \tag{55}$$

мұндағы берілген теңдеулердің саны *m,* ал айнымалылар саны n + m. Осы берілген теңдеулерді қысқаша түрде былай жазамыз:

$$F_k(x_1,\, x_2,\ \ldots,\ x_n;\ y_1, y_2,\ \ldots,\ y_m) = 0, \tag{55'}$$
$$(k = 1{,}2,\ \ldots, m)$$

(55) теңдеулер системасындағы $y_1,\ y_2, \ldots,\ y_m$ айнымалыларды мына $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ айнымалылардың жабық функциялары деп қарауға болады:

$$y_1 = \varphi_1(x_1,\, x_2, \ldots, x_n),\ \ y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots,$$

$$y_m = \varphi_m(x_1, x_2, \dots , x_n) .$$

Егер осы функцияларды (55) системаның сол жақ қатарындағы $y_1$, $y_2, \dots$, $y_m$ айнымалылардың орнына қойсақ, сонда келесі теңбе-теңдік

$$F_k[x_1, x_2, \ . \ . \ ., x_n; \ \varphi_1(x_1, x_2, \dots , \quad x_n), \dots ,$$
$$\varphi_m(x_1, x_2, \dots , \quad x_n)] \equiv 0$$
$$(k = 1,2, . \ . \ ., m)$$

келіп шығады.

Енді мәселе қандай шарттар орындалғанда (55) теңдеулер системасы $y_1$, $y_2, \dots$, $y$ айнымалыларды мына $x_1$, $x_2, \dots$, $x$ айнымалылардың бірмәнді функциялары етіп анықтайды, міне соны білуде.

*Осы қойылған мәселеге жауап келесі теорема:*

*Егер (55) теңдеулер системасының сол жақтарындағы функциялар* $F_1$, $F_2, \dots$, $F_n$ *өздерінің бірінші ретті дербес туындыларымен бірге мына* $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots , x_n^0, y_1, y_2, \dots , y_m)$ *нүктесінің* $(x_1^0 - \delta_1, \ x_1^0 + \delta_1, \dots, \ y_1^0 - \delta_1^1, \ +\delta_1^1, \dots, \ y_m + \delta^1)$ *аймағында үздіксіз болса* $M_0$ *нүктесінің координаталары (55) теңдеулерді қанағаттандырса, яғни* $F\left(x_1^0, x_2^0, \dots , x_n \, , y_1, y_2, \dots , y_m\right) = 0 \ (k = 1, \ 2, \dots, \ m)$ *және мұның үстіне якобиан мына* $M_0$ *нүктесінде нольге тең болмаса, онда (55) теңдеулер системасы* $y_1, y_2, \dots , y_m$ *айнымалыларды* $N_0(x_1^0, x_2^0, \dots , x_n^0)$ *нүктесінің аймағында* $x_1$, $x_2, \dots$, $x_n$ *айнымалылардың бірмәнді үздіксіз функциялары етіп анықтайды:*

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots , x_n), \ y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots , x_n), \dots,$$
$$y_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots , \ x_n) ,$$

бұл функциялар мына шарттарды қанағаттандырады:

$$\varphi_1(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots , \overset{\circ}{x}_n) = \overset{\circ}{y}, \varphi_2(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots , \overset{\circ}{x}_n) = \overset{\circ}{y}_2, \dots,$$
$$\varphi_n(\overset{\circ}{x}_1, \qquad \overset{\circ}{x}_2, \dots , \overset{\circ}{x}_n) = \overset{\circ}{y}_m$$

функциялардың әрқайсысының $N_0\left(x_1^0, \ x_2^0, \dots , x^0 \right)$ нүктесінде үздіксіз дербес туындылары бар.

Бұл теореманың дәлелдеуін келтірмейміз.

### *Жаттығулар*

Келесі функциялардың бірінші ретті толық дифференциалдарын табу керек.

1. $z = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y}$.

2. $z = \sin^2(x+y) - \sin^2 x - \sin^2 y$

3. $z = arc\ tg\frac{x+y}{x-y}$.

4. Мына $u + \frac{x^2-y^2}{y^2-z^2}$ функция үшін келесі теңдеудің $\frac{2}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + +\frac{1}{y}\times\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ орындалатынын дәлелдеу керек.

5. Мына $u = e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}$функция үшін келесі $x^2\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + z^2\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = 3u$ теңдеудің орындалатынын дәлелдеу керек.

6. Мына ú $= \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x}$ функция үшін төмендегі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} = 0$$

теңдеудің орындалатынын дәлелдеу керек.

Келесі функциялар үшін біртектес функциялар турасындағы Эйлер теоремасын тексеру керек.

7. $u = \sin\frac{y}{x}\cos\frac{x}{y}$.

8. $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz$.

9. Мына $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 0$ жабық функцияның бірінші және екінші ретті туындыларын табу керек.

10. Мына $y^4 - y^2 + 3xy - 2x^2 = 0$ жабық функцияның $x = 0$ нүктесіндегі бірінші ретті туындысын табу керек.

11. Мына $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ жабық функцияның бірінші ретті дербес туындыларын табу керек.

12. Егер $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \varphi(u)$, ал $u = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ болса, онда $x^2\frac{\text{ә z}}{\text{ә x}} + y^2\times\frac{\partial z}{\partial y} = z^2$. Осыны дәлелдеу керек.

13. Егер $y = x\varphi(z) + \psi(z)$ болса, онда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^1 z}{\partial y^1}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Міне осыны дәлелдеу керек.

14. Егер $z = \varphi[x + f(y)]$ болса, онда $\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0$. Осыны дәлелдеу керек.

15. $u = x^2 + y^2 + z^2$ функцияның экстремумдық мәндерін табу керек, егер байланыс теңдеулері мына түрде берілсе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \qquad lx + my + nz = 0$$

# *Алтыншы бөлім.*
# КӨП АЙНЫМАЛЫЛАР ФУНКЦИЯЛАРЫНЫҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУІ

## XIX ТАРАУ
## ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛДАР

### §1. Бірінші типті қисық сызықты интеграл

**1.** Осы параграфта аталған интегралдың толық және дәл анықтамасын берейік.

Айталық *(K) – XOY* жазықтығында жатқан түзуленетін қисық, ал $F(x,y)$ – осы қисықтың нүктелерінде анықталған функция болсын. Былайша айтқанда, қисықтың әрбір нүктесінде функция $F(x,y)$ шекті мән қабылдайды; қисықтан тыс жатқан нүктелерде бұл функцияның тиісті мәні болмай қалуы да мүмкін.

*(K)* қисығын $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ нүктелермен *n* участокқа, яғни *n* бөлшек доғаларға бөлеміз. Әрбір $A_к A_{к+1}$ участогынан $M_к\ (x_к, y_к)$ нүктесін сайлап аламыз, әрине мұндай нүктелердің саны n. Осы сайлап алынған нүктелердегі $F(x,y)$ функцияның мәндері

$$F(x^0,y_0), F(x_1,y_1), \quad F(x_2,y_2,),\ .\ .\ .\ , F(x_{n-1},y_{n-1}).$$

Осы мәндерді сәйкес әрбір $A_к A_{к+1}$ участоктың $s_к$ ұзындығына көбейтіп қоссақ, онда мынадай қосынды:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} F(x_k,y_k)s_k \tag{1}$$

келіп шығады.

Егер $s_к$ доғаларының ең ұзыны нольге ұмтылғанда, қосынды σ қисықты бөлшектеу тәсіліне және сайлап алынған $M_к\ (x_к, y_к)$ нүктеге тәуелді болмайтын бір тиянақты шекке ұмтылса, онда осы шекті $F(x,y)$ функцияның *(K)* қисығы бойынша алынған *I-типті қисық сызықты интегралы* деп атайды және мұны былай белгілейді:

$$\lim_{max\, s_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(x_k,y_k)s_k = \int\limits_{(K)} F(x\ \ y)ds.$$

Бұл интегралды анықтауда біз *(K)* қисыққа ешбір бағыт таңбаймыз, сондықтан егер бұл қисықтың шеткі нүктелері *A* мен *B* болса, онда

$$\int_{\mathrm{AB}} F(x,y)ds = \int_{BA} F(x,y)ds.$$

Бұл интегралдағы символ $ds$ – қисықтың доғасының дифференциалын көрсетеді.

Егер $F(x,y) = 1$ болса онда

$$\int_{(K)} ds \ = s,$$

мұнда $s$ – бүкіл (K) қисығының ұзындығын көрсетеді.

Кеңістікте жатқан қисықтың бойымен алынған мына

$$\int_{L} F(x,y,z)ds$$

қисық сызықты интегралды да дәл осы сияқты етіп анықтауға болады.

Кейде қисық сызықты интегралды былай белгілейді:

$$\int_{(\mathrm{K})} F(M)ds.$$

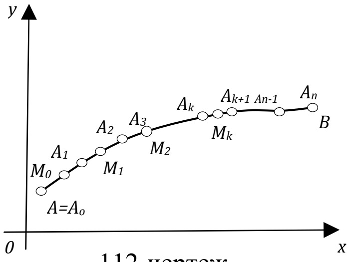
**2.** Енді жоғарыда берілген қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасына тоқтайық. Бір материалды қисықтың бойында масса үздіксіз орналасқан болсын. Егер ұзындығымен салыстырғанда жуандығын еске алмасақ, мұндай қисық үшін жақсы мысалдар: сым, шынжыр т.т. Егер қисықтың ұзындықтары бірдей участоктарының массасы да бірдей болса, онда мұндай қисықты физикада біртектес қисықтың тығыздығы деп атайды.

Егер қисық біртектес болмаса, онда жаңағы анықталған тығыздықты участоктың орта тығыздығы деп атайды. Егер осы участоктың ұзындығы $\Delta_{\mathrm{s}}$, ал массасы $\Delta_{\mathrm{m}}$, болса, онда орта тығыздық $\frac{\Delta m}{\Delta s}$ болады.

Қисықтың берілген нүктесіндегі тығыздығы деп сол нүкте жатқан шексіз аз участоктың орта тығыздығының шегін айтады, яғни

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = \rho$$

Әртектес қисықтың түрлі нүктелеріндегі оның тығыздығының мәндері, жалпы алғанда, түрліше болады. Былайша айтқанда, мұндай қисықтың тығыздығы оның нүктелерінің координаталарының функциясы болып табылады.



112-чертеж

Айталық материалды қисық $AB$ берілсін және бұл қисықтың тығыздығы $\rho = \rho(x, y)$, белгілі болсын. Бізге осы қисықтың массасын табу керек.

Қойылған есепті шешу үшін $AB$ қисығын $n$ участокқа (бөлшек доғаларға) бөлеміз. $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$ бөлу нүктелері болсын (112-чертеж).

$A_к\ A_{к+1}$ участоктың бойында жатқан кез келген $M_k\ (x_k,\ y_k)$ нүктесін таңдап алайық; бұл нүктедегі қисық тығыздығының мәні ρ $(x_k,\ y_k)$ болады. $A_к\ A_{к+1}$ участоктың барлық нүктелерінде қисықтың тығыздығы тұрақты және мына санға $\rho\ (x_k,\ y_k)$ тең деп ұйғардық.

Осындай ұйғарумен байланысты неғұрлым $A_к\,A_{к+1}$ участоктың ұзындығы аз болса, жіберілетін қате соғұрлым аз болады. Осы ұйғару кезінде $A_к\,A_{к+1}$ участоктың массасы, $\rho\ (x_k,\ y_k)\ s_k$ болады. Мұнда $s_k$ – $A_к\ A_{к+1}$ участоктың ұзындығы. Бүкіл $AB$ қисығының массасы

$$\sum_{k=0}^{n-1} \rho(\mathrm{x}_к,\ \mathrm{y}_к) s_к \tag{2}$$

болады.

(2) Қосынды $AB$ қисықтың массасының дәл мәнін бермейді, өйткені $A_к\ A_{к+1}$ участоктың нүктелерінде тығыздық тұрақты болсын деп ұйғарсақ та, ақиқатында ол тұрақты емес. Бірақ, дегенмен барлық $A_к\ A_{к+1}$ участоктардың ұзындықтары ылғи азая берген сайын (2) формула дәлдікке ылғи жақындай береді. Егер барлық участоктардың ұзындықтарын нольге ұмтылуға мәжбүр етсек, дәл мәнін береді. Сонымен, әртектес материалды қисықтың массасы

$$M = \lim_{s_к \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(x_к, y_к) s_к = \int_{AB} \rho(x, y) ds.$$

болады.

Сөйтіп, бірінші типті қисық сызықты интегралдың физикалық мағынасы – әртектес материалды қисықтың массасы болатын болды.

**3.** Жоғарыда анықталған 1-типті қисық сызықты интегралдың физикалық мәселелерге тағы да бір қолданылуын қарайық.

Физикалық механика бөлімінде өте маңызды роль атқаратын ұғымдардың бірі – *статикалық момент* және материалды нүкте мен системаның *инерция моменті*, деп аталатын ұғым.

Массасы m-ге тең бір M нүктесінің (*l*) осі бойынша статикалық моменті деп нүктенің массасы мен оның (*l*) осіне дейінгі арақашықтығының көбейтіндісін, яғни мына санды

$$S_1 = m \cdot d$$

айтады.

Егер бұл теңдіктегі $d$-нің орнына $d^2$ қойсақ, онда

$$J_l = md^2$$

Бұл санды нүктенің инерция моменті деп атайды.

Массалары $m_1, m_2, \ldots, m_n$ $n$ материалды нүктелер системасы берілсін. Сонда бұл системаның статикалық моменті мен инерция моменті болады.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} m_k d_k; \; J_1 = \sum_{k=1}^{n} m_k d_k^2,$$

Координаталық осьтер бойынша моменттер өрнектері

$$S_x = \sum_{k=1}^{n} m_{\text{к}} y_{\text{к}}, \;\; S_y = \sum_{k=1}^{n} m_{\text{к}} a_{\text{к}},$$

$$J_x = \sum_{k=1}^{n} m_{\text{к}} y_{\text{к}}^2, \;\; J_y = \sum_{k=1}^{n} m_{\text{к}} x_{\text{к}}^2$$

болады, мұнда $x_k, y_k$ – $M_k$ нүктесінің координаталары.

Айталық, бір материалды *(K)* қисықтың бойында масса үздіксіз таралып орналассын. Таралу тығыздығы – белгілі функция $\rho(\text{x}, \text{y})$. Осы массаның *OX* бойынша статикалық моменті мен инерция моментін табайық. Ол үшін берілген *(K)* қисықты n ұсақ участокқа бөлейік те, әрбір участоктың кез келген $M_k$ $(x_k, y_k)$ нүктесін алайық. Бүкіл участоктың массасы $M_k$ нүктесінде жиылды деп есептейік (ақиқатында бұлай есептеу дәл болып табылмайды). Егер участоктың массасы тұрақты және сайлап алған нүктедегі тығыздықтың мәніне тең десек, онда бұл нүктеде жиылған массаның шамасы болады: $\rho\,(x_k, \; y_k) \cdot s_k$ (мұнда $s_k$ –

участоктың ұзындығы). Олай болса, әңгіме болып отырған участоктың статикалық моменті $y_k\ \rho\ (x_k,\ y_k)\ \cdot s_k$ болады, ал бүкіл қисықтың статикалық моменті

$$S_x = \sum_{k=1}^{n} y_k \rho(x_k, y_k) s_k$$

болады.

Бұл шыққан теңдік қисықтың *OX* осі бойынша статикалық моментінің жуық қана мәнін береді. Бірақ барлық участоктардың ұзындықтары неғұрлым аз болған сайын, солғұрлым жаңағы шыққан қосынды статикалық моменттің дәл мәніне жуық болады. Сонымен, қарастырылып отырған (*К*) қисықтың *OX* осі бойынша статикалық моментінің мәні

$$S_y = \lim_{\max s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} y_k \rho(x_k, y_k)\, s_k = \int_{(K)} y\rho(x, y) ds$$

болады.

Дәл осы сияқты

$$S_x = \lim_{\max s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} x_k \rho(x_k, y_k)\, s_k = \int_{(K)} x\rho(x, y) ds$$

$$J_x = \int_{(K)} y^2 \rho(x, y) ds, J_y = \int_{(K)} x^2 \rho(x, y) ds.$$

Механикада мынадай теорема бар: егер материалды нүктелерден тұратын системаның массасы оның ауырлық центріне үйілсе, одан системаның қандай болсын бір ось бойынша алынатын статикалық моменті өзгермейді.

Осы теоремаға сүйеніп системаның массасы және координаталар осьтері бойынша оның статикалық моменттері арқылы системаның ауырлық центрін табуға болады.

Системаның массасын *М* арқылы, ал оның ауырлық центр координаталарын $x_c$, $y_c$ арқылы белгілеп, келтірілген теорема бойынша табамыз:

$S_x = My_c,\ S_y = Mx_c$, бұл арадан

$$x_c = \frac{S_y}{M}, \quad y_c = \frac{S_y}{M}.$$

Механикалық система материалды қисық болсын, онда

$$M = \int_{(K)} \rho(x,y)ds.$$

Демек

$$x_c = \frac{\int_{(K)} x\rho(x,y)ds}{\int_{(K)} \rho(x,y)ds}, y_c = \frac{\int_{(K)} y\rho(x,y)ds}{\int_{(K)} \rho(x,y)ds}.$$

**4.** Массалары $m$ және $m_0$ екі $M$ және $M_0$ материалды нүктені қарайық. Бұл екі нүктенің бір-бірінен қашықтығы $r$ болсын және $M$ нүкте $M_0$ нүктені өзіне тартаны болсын; онда Ньютон заңы бойынша тартушы күш болады:

$$F = k\frac{m_0 m}{r^2},$$

бұл күш $M_0$ нүктеден M нүктесіне қарай бағытталған, мұнда $k$ – негізгі өлшеу бірліктерінің сайлап алынуына байланысты тұрақты сан.

Егер нүкте $M_0$ бірнеше $M_1, M_2,... M_n$ нүктелер системасымен тартылса, онда тең әсерлі күш жеке нүктелердің тартылыс күштерінің геометриялық қосындысына тең. Тең әсерлі күштің координаталар осьтеріне проекциялары жеке күштердің проекцияларының алгебралық қосындысына тең болады.

Тең әсерлі күштің проекцияларын $F_x$ және $F_y$ арқылы, ал $M_0$ $M$ бағытымен $OX$ осінің арасындағы бұрышты $\Theta_к$ арқылы белгілсек, онда

$$F_x = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{m_0 m_k}{r^2 k} \cos\theta_k; \;\; F_y = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{m_0 m_k}{r^2 k} \sin\theta_k.$$

Енді тартушы масса материалды (К) қисықтың бойында үздіксіз таралып орналассын. Бұл қисықты n участокқа бөліп, әрбір участоктың массасын, сол участоктың бойында жатқан кез келген $Mк$ $(x_к, y_к)$ нүктесіне жиып, тең әсерлі күш проекцияларының жуық мәнін табамыз:

$$F_x = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{m_0 \rho_{(\text{x}_\text{к},\text{y}_\text{к})}}{r^2 k} \cos\theta_k \cdot s_k,$$

$$F_y = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{m_0 \rho_{(\text{x}_\text{к},\text{y}_\text{к})}}{r^2 k} \sin\theta_k \cdot s_k.$$

Дәл мәнін табу үшін барлық $s_k$-ларды нольге ұмтылып шек алу керек, сонда

$$F_x = km_0 \int\limits_{(K)} \frac{\rho(x,y)}{r^2} \cos\theta ds; \;\; F_y = km_0 \int\limits_{(K)} \frac{\rho(x,y)}{r^2} \sin\theta ds\,.$$

## §2. I-типті қисық сызықты интегралды есептеп шығару жолы

I-типті қисық сызықты интегралды есептеп шығару тәсілі келесі теорема бойынша жүзеге асрылады.

**Теорема.** *Егер қисық (К) мына*

$$x = \varphi(t)$$
$$y = \psi(t)$$
$$\alpha \leq t \leq \beta$$

*параметрлік теңдеулермен берілсе, мұнда* $\varphi(t)$ *және* $\psi(t)$ *үздіксіз туындылары бар функциялар, онда қисықтың нүктелерінде берілген үздіксіз функция* $F(x,y)$ *қандай болса да, қисық сызықты интеграл*

$$\int\limits_{(K)} F(x,y)ds$$

*кәдімгі анықталған интегралға келтіріледі:*

$$\int\limits_{(K)} F(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F[\varphi(t), \qquad \psi(t)] \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)dt}. \qquad (3)$$

(3) теңдіктің сол жағы (*К*) қисық бойынша алынған I типті қисық сызықты интеграл, оң жағы [α, β] аралығында параметр $t$ бойынша алынған анықталған интеграл.

Бұл теореманы дәлелдеу үшін (К) қисықты $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$ нүктелермен *n* участокқа (бөлшек доғаларға) бөлеміз. Бұл бәрібір параметр *t*-нің өзгеру облысы [α, β] аралығын мына тәртіппен орналасқан $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_{n=\beta}$ нүктелермен *n* бөлшек сегменттерге бөлу деген сөз. Сонда $A_к$ нүктесіне параметр *t*-нің мына мәні $t_к$ сәйкес келеді. Параметр *t*, $t_к$-дан $t_{к+1}$-ге дейін өзгергенде нүкте (*x,y*) $A_kA_{к+1}$ участогын жасайды. Олай болса бұл участоктың ұзындығы

$$s_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2} dt$$

болады.

Енді осы интегралға анықталған интегралдың орта мәні жөніндегі теореманы қолдансақ, сонда:

$$s_k = \sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\tau_k)}\,(t_{k+1} - t_k), \qquad (4)$$

мұнда $\tau$ мына $(t_k,\ t_{k+1})$ аралығының бір тиянақты нүктесі.

Енді σ қосындыны құрайық

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} F(x_k, y_k) s_k.$$

Бұл қосындыдағы $s_k$-ның орына (4) теңдіктің оң жағын қойсақ, онда

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} F(x_k, y_k)\sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\tau_k)}\,(t_{k+1} - t_k). \qquad (5)$$

(5) теңдіктің оң жағында тұрған қосындыдағы функция таңбасы ішідегі $x_k$ және $y_k$ – $A_kA_{\kappa+1}$ участоктың бойында жатқан кез келген нүктенің координаталары болғандықтан, оларды былай жазуға болады:

$$x_k = \varphi(\theta_k),$$
$$y_k = \psi(\theta_k).$$

Мұнда $\theta_k$ – тіпті кез келген $[t_k,\ t_{k+1}]$ аралығында жатқан нүкте, яғни $t_k \leq \theta_k \leq t_{k+1}$.

Ендеше

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} F[\varphi(\theta_k), \psi(\theta_k)\,]\sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\tau_k)}\,(t_{k+1} - t_k).$$

Бұл кейінгі қосынды анықталған интеграл үшін интегралдық қосынды болып табылмайды, өйткені $\theta_k$ және $\tau_k$ әр түрлі сандар. Бірақ $\theta_k$ – тіпті кез келген сан болғандықтан, оны τ-ға теңеп алуға болады, яғни былай етіп $\theta_k = \tau_k$, онда

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} F[\varphi(\tau_k), \qquad \psi(\tau_k)\,]\sqrt{\varphi'^2(\tau_k) + \psi'^2(\tau_k)}\,(t_{k+1} - t_k). \quad (6)$$

Бұл қосынды интегралдық қосынды болып табылады. Егер барлық $(t_{k+1} - t_k)$ айырмаларды нольге ұмтылтсақ, онда (6) теңдіктің сол жағында тұрған қосынды *δ, F (x, y)* функцияның (*К*) бойынша алынған I-типті қисық сызықты интегралына, ал оң жағында тұрған қосынды мына

$F[\varphi(t),\ \psi(t)]\sqrt{\psi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ күрделі функцияның [α, β] аралығында алынған анықталған интегралына ұмтылады. Сөйтіп,

$$\int\limits_{(K)} F(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\alpha\tau \qquad (7)$$

теорема дәлелденді.

Егер қисық (*К*) мына

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

ашық теңдеумен берілсе, мұнда $f(x) - [a,\ b]$ аралығында үздіксіз $f'(x)$ туындысы бар функция, онда

$$\int\limits_{(K)} F(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F[x,f(x)]\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (8)$$

$f(x)$ функция туындысының геометриялық мағынасы бойынша

$$f'(x) = tg\,\alpha,$$

олай болса

$$\sqrt{1+f'^2(x)} = \frac{1}{|\cos\alpha|},$$

мұнда $\alpha$ − қисыққа жүргізілген жанама мен *OX* осінің оң бағытының арасындағы бұрышты көрсетеді. Бұл жерде абсолют шама алу тіпті қажет, өйткені түбір $\sqrt{1+f'^2(x)}$ оң таңбалы, ал $\cos\alpha$-ның таңбасы кез келген болуы мүмкін. Бірақ қисыққа жүргізілген жанаманың бағытын қалай алу өзімізге байланысты болғандықтан оның $\cos\alpha > 0$ болатындай етіп аламыз; ол уақытта абсолют шама белгісін қоймаса да болады.

Бұдан кейін (8) формуланы былай жазуға болады:

$$\int\limits_{(K)} F(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F[x,f(x)]\cdot\frac{dx}{|\cos\alpha|}.$$

Егер $F(x,y) = 1$ болса, онда

$$S = \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{|\cos\alpha|} \qquad (9)$$

Енді (7) және (8) формулалар іс жүзінде қалай қолданылады, соған бірнеше мысалдар келтірейік.

1-мысал. Мына теңдеумен $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ берілген, шынжыр сызық деп аталатын қиысқтың массасын, егер оның әрбір нүктесіндегі тығыздығы ординатаға кері пропорционал болса, x=0-ден x=α дейін табу керек.

Есептің шарты бойынша тығыздық $\rho(x,y) = \frac{k}{y}$, мұнда $k$ – пропорционалдық коэффициент, тұрақты сан.

$$M = \int\limits_{(K)} \rho(x,y)ds = k \int\limits_{(K)} \frac{ds}{y}.$$

Енді (8) формуланы қолданамыз, ол үшін $ds$-ті табуымыз керек.

$$ds = \sqrt{1+y'^2 dx} = \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx.$$

Сонымен,

$$M = k\int\limits_0^a \frac{\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx}{\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)} = k.$$

2-мысал. Мына $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ астроиданың бірінші квадрантта жатқан доғасының $OX$ осы арқылы алынған статикалық моментін табу керек.

Мұнда біз астроиданың тығыздығын бірге тең деп ұйғарамыз. Астроиданың берілген теңдеуінен

$$x = \left(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2},}$$

бұл арадан

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 dy} = \sqrt{1+\left(a^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}dy}} = a^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}dy.$$

$$S_x = \int\limits_0^a a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\,dy = \frac{3}{5}a^2$$

3-мысал. Мына

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t)$$
$$(0 \leq t \leq 2\pi)$$

циклоиданың бір аркасының (доғасының) ауырлық центрін табу керек.

Егер циклоиданың симметриялылығын еске алсақ, онда $x_c = \pi_a$. Циклоиданың бір аркасының ұзындығы

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi'^2(t) + \varphi'^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2}\; tdt = 8a$$

болады.

Олай болса

$$y_c = \frac{\int_{(K)} yds}{8a} = \frac{\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)2a \sin\frac{t}{2} dt}{8a} =$$

$$= \frac{a}{4}\int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sin\frac{t}{2} dt = \frac{4}{3}a.$$

Сонымен ауырлық центр мына $\left(\pi\alpha;\ \frac{4}{3}\alpha\right)$ нүктеде болатын болды.

4-мысал. Мына

$$\int_{(K)} xyds$$

қисық сызықты интегралды есептеп шығару керек, егер (*K*) – эллипстің бірінші квадрантта жатқан бір ширегі болса.

Элиппстің теңдеуін параметрлік түрде алайық:

$$x = a\cos t,\ \ y = b\sin t\ \ \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$$

Енді (7) формуланы қолданамыз, онда

$$\int_{(K)} xyds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot b \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{a^2 \frac{1-\cos 2t}{2} + b^2 \frac{1+\cos 2t}{2} dt}.$$

Былай ұйғарып $\cos 2t = u$, табамыз

$$\int_{(K)} xyds = \frac{ab}{4}\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2} zdz} = \frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

## §3. Екінші типті қисық сызықты интеграл

1. (*K*) – *XOУ* жазықтығында берілген қисық болсын. Осы қисықтың АВ участогының барлық нүктелерінде анықталған $F(M) = F(x,y)$ функцияны қарайық. *AB* участогының әрбір нүктесінде $F(x,y)$ функцияның белгілі тиянақты мәні бар, бұл қисықтан тыс жатқан нүктелерде функция $F(x,y)$ анықталмауы да мүмкін.

*AB* доғасын $A=A_0$, $A_1$, $A_2,\ldots$, $A_{n-1}$, $A_n=B$ нүктелермен *n* участокқа (бөлшек доғаларға) бөлеміз де, әрбір $A_k\,A_{к+1}$ участоктың бойында жатқан кез келген $M_k\ (\xi_k,\ \eta_k)$ нүктесін сайлап аламыз. Бұл сайлап алынған нүктелердегі $F(x,y)$ функцияның мәндері $F(\xi_0,\ \eta_0)$, $F(\xi_1,\ \eta_{01})$, $(\xi_2,\ \eta_2),\ldots,F(\xi_{n-1},\eta_{n-1})$. Осы мәндерді $A_k\,A_{к+1}$ участоктарының *OX* осіне түсірілген мынадай $x_{к+1} - x_к = \Delta x_к(k = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1)$ проекцияларына көбейтіп келесі қосындыны құрамыз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_к,\eta_к)\,\Delta x_к. \qquad (10)$$

Егер барлық $\Delta x_к$ нольге ұмтылғанда (10) қосынды бір белгілі шекке ұмтылса, онда осы шекті $F(x,y)$ функцияның (АВ) қисығы бойынша II типті қисық сызықты интегралы деп атайды және оны былай белгілейді:

$$\lim_{\text{барлық } \Delta x_к \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F\,(\xi_к,\eta_к)\Delta x_к = \int_{(K)} (x,y)dx. \qquad (11)$$

(11) теңдіктің сол жағында тұрған шек, қисықты бөлу тәсіліне және сайлап алған $M_k\ (\xi_k,\ \eta_k)$ нүктелерге ешбір тәуелді болмайды.

II типті қисық сызықты интегралды анықтауда А нүктесі мен В нүктесінің атқаратын рольдері түрліше болады. Жаңағы анықталған (11) интегралы А нүктесінен В нүктесіне қарай алынған интеграл деп түсіну керек. Егер кері бағыт бойынша интегралдайтын болсақ, онда барлық $x_{к+1} - x_к$ айырмаларды кері таңбамен алуға тура келеді. Әрине бұл таңба бүкіл нәтижеге әсер етеді. Қорытып келіп бұл жерде мынадай ойды айтуға болады: мына интеграл

$$\int_{\text{AB}} F(x,y)dx$$

бар болатын болса, онда мына

$$\int\limits_{\mathrm{BA}} F(x,y)dx$$

интеграл да бар болады және

$$\int\limits_{\mathrm{AB}} F(x,y)\,dx = -\int\limits_{\mathrm{BA}} F(x,y)\,dx.$$

II типті қисық сызықты интегралдардың таңбасы қисықтың бағытына байланысты болды. Мұның бұлай болу себебі мынада: II типті қисық сызықты интегралдағы интегралдай «элементі» $dx$ доға «элементі» *ds*-тің *OX* осіне түсірілген проекциясы. Бірінші типті қисық сызықты интегралда біз *ds*-ті бағытталмаған кішкентай кескінді деп қараған болсақ, II типті интегралды анықтауда біз оны *OX* осіне проекциялаймыз, демек оған тиісті бағыт береміз (бұл бағыт қисықтың *A*-дан *B*-ге қарай алынған бағытымен дәл келеді).

Егер (10) қосындыны құрағанда біз функцияның мына $F(\xi_к,\eta_к)$ мәндерін $\Delta x_к$-ке көбейтпей, $\Delta y_к$-ке көбейтсек, яғни қисықтың элементтерін ОУ осіне проекцияласақ, онда келесі II типті қисық сызықты интегралды

$$\lim_{\text{барлық } \Delta\text{у}_\text{к}\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F\,(\xi_к,\eta_к)\Delta y_к = \int\limits_{(K)} (x,y)dy. \qquad (11')$$

анықтаған болар едік.

Егер (*K*) қисықтың бойында жатқан барлық нүктелерде мына екі функция *P (x, y)* және *Q (x, y)* анықталса, онымен бірге және мына интегралдар

$$\int\limits_{(K)} P(x,y)dx,\ Q\int\limits_{(K)} (x,y)\,dx$$

бар болатын болса, онда

$$\int\limits_{(K)} P(x,y)dx + Q\,(x,y)dy = \int\limits_{(K)} P(x,y)\,dx + \int\limits_{(K)} Q(x,y)\,dy. \quad (12)$$

Бұл теңдіктің оң жағында тұрған екі интеграл бір бағытта интегралдануы керек.

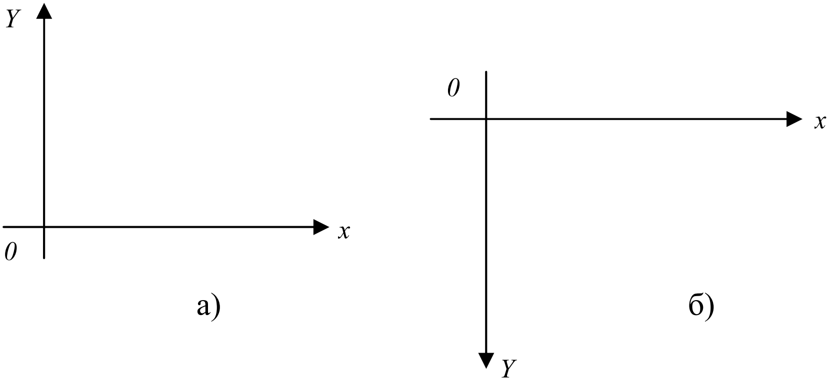
Егер қисық *AB* бір *C* нүктесімен екі *AC* және *CB* бөліктерге бөлінсе, онда

$$\int\limits_{(\text{АБ})} F(x,y)\,dx = \int\limits_{(A)} F(x,y)\,dx + \int\limits_{(CB)} F(x,y)\,dx.$$

Мұны дәлелдеу тіпті қиын емес, оқушылар өздері де дәлелдей алады.

Енді тұйық сызық жағдайын қарайық. Бұл жерде мынадай сұрақтар туады: а) контурдың қай нүктесін бастапқы нүкте үшін алу керек, б) қай бағытта интегралдау керек. Бірінші сұраққа жауап: бастапқы нүкте үшін контурдың қай нүктесін алса да болады.

Екінші сұраққа жауап беру үшін біз мынадай бір келісім жасауымыз керек. Егер *ОХ* осінің оң бағыты *ОУ* осінің оң бағытымен дәл келу үшін *ОХ* осін тіліне қарсы $\frac{\pi}{2}$ бұрышқа бұру керек болса, онда координаталық осьтерді сол бағыттағы осьтер дейді (113, а-чертеж).



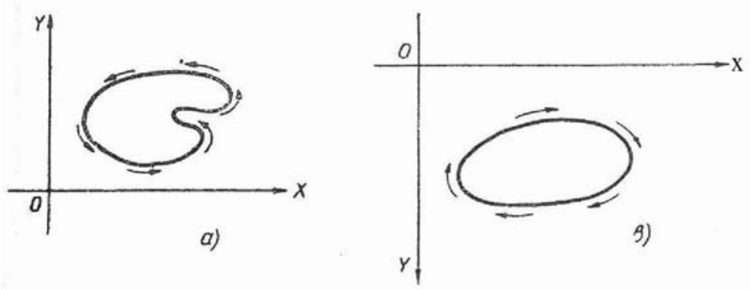
а) б)

113-чертеж

Егерде *ОУ* осінің бағытымен дәл келу үшін *ОХ* осінің оң бағытын сағат тілі бағытына қарай (113, б-чертеж) бұру керек болса, онда координаталар осьтерін оң бағыттағы осьтер дейміз.

Тұйық контур бойынша қай бағытта оң немесе теріс деп есептеу, осы контур координаталардың қандай осьтерінде (жаңағы айтылған мағынада) жатыр, міне соған байланысты.

Егер тұйық контурдың бойымен жүргенде, онымен қоршалынған облыс (аудан) сол бағыттық осьтер жағдайында сол жақта, оң бағыттық осьтер жағдайында оң жақта қалып қойып отыратын болса, (114-чертеж а және б), онда бұл бағытты контур бойынша оң бағыт деп атаймыз.



114-чертеж

114-чертеждердегі келтірілген стрелкалар контур бойынша оң бағытты көрсетеді.

**2.** Егер бізге кеңістікте жатқан *(L)* қисық берілсе, ал *F(x, y, z)* осы қисықтың *AB* участогының барлық нүктелерінде анықталған функция болса, онда жаңағы участокты *n* бөлшек доғаларға бөліп келесі қосындыны

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k)\Delta x_k$$

құруға болады.

Барлық бөлшек участоктардың ұзындығын нольге ұмтылтып жаңағы құрылған қосындыдан шек алайық, егер осы шек бар болатын болса, онда ол шекті *F(x, y, z)* функцияның *(L)* қисық бойынша алынған II типті қисық сызықты интегралы деп атайды және мұны былай белгілейді:

$$\int\limits_{(L)} F(x, y, z)\, dx.$$

Дәл осылай мына интегралдарды да

$$\int\limits_{(L)} F(x, y, z)\, dy, \quad \int\limits_{(L)} F(x, y, z)\, dz$$

анықтауға болады.

*P (x, y, z), Q(x, y, z)  R(x, y, z)* кеңістіктегі *(L)* қисықтың барлық нүктелерінде анықталған функциялар болсын және онымен бірге мына интегралдардың

$$\int_{(L)} P(x,y,z)\,dx,\ \int_{(L)} \mathrm{Q}(x,y,z)\,dy \text{ және } \int_{(L)} \mathrm{R}(x,y,z)\,dz.$$

әрқайсысы бар болатын болсын; сонда осы интегралдарды қосып $(L)$ бойынша алынған II типті қисық сызықты интегралдың жалпы түрін табамыз:

$$\int_{(L)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz. \qquad (13)$$

(13) қисық сызықты интеграл мына түрдегі қосындының,

$$\sum_{k=0}^{n-1}[P(\xi_{\text{к}},\mu_{\text{к}},\varsigma_{\text{к}})\Delta x_{\text{к}} + Q(\xi_{\text{к}},\eta_{\text{к}},\varsigma_{\text{к}})\Delta \mathrm{y}_{\text{к}} + \mathrm{R}(\xi_{\text{к}},\eta_{\text{к}},\varsigma_{\text{к}})\Delta \mathrm{z}_{\text{к}}]$$

барлық проекциялар $\Delta x_{\text{к}}$, $\Delta \mathrm{y}_{\text{к}}$, және $\Delta \mathrm{z}_{\text{к}}$ нольге ұмтылғандағы шегі болады.

**3.** Енді қисық сызықты интегралдарға келтірілетін бір-екі физикалық есептерді қарайық.

а) Бір материалды нүкте *М*, *ХОУ* жазықтығында $\bar{F}$ күшінің әсерімен *(К)* траекториясы бойынша қозғалатын болсын. Бұл күштің шамасы және бағыты *М* нүктесінің жағдайына тәуелді болсын. Егер қозғалушы нүктенің массасы бірден айрықша болса, яғни m-ге тең болса, онда әсер етуші күш $m\bar{F}$-ке тең болған болар еді. Мұндай ұйғаруларда *ХОУ* жазықтығын күштік өріс деп, ал бірлік массаға әсер етуші күшті өрістің кернеулігі деп атайды.

Әсер етуші $\bar{F}$ күшінің координаталар осьтері бойынша проекциялары *М* нүктесінің *х, у* координаталарына тәуелді.

Қозғалушы материалды нүктеге әсер етуші күштің өндіретін жұмысын есептеп шығару керек.

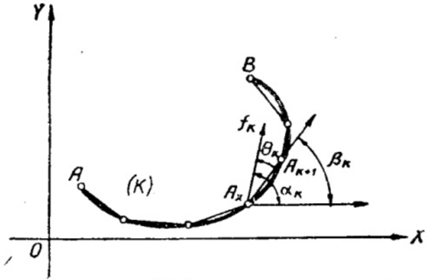
Егер нүкте түзудің бойымен қозғалса және бұл түзудің барлық нүктелерінде күш өзінің шамасы және бағыты бойынша тұрақты болса, онда мұндай күштің өндіретін жұмысының шамасы мынадай формуламен

$$T = F \cdot l \cdot \cos\theta \qquad (14)$$

анықталатыны бізге орта мектепте жүретін физика пәнінен белгілі, мұнда *F* – күштің шамасы, *1* – нүктемен жүрілген жолдың ұзындығы, *Θ-F* күшінің бағыты мен жүрілген жолдың арасындағы бұрыш.

Егер материалды нүкте түзудің бойымен қозғалмай, қисық сызықтың бойымен қозағалатын болса, және онымен бірге күш өзінің шамасы және бағыты жөнінде тұрақты болмаса, мәселен сол қозғалушы нүктенің координаталарына тәуелді болса, онда күштің өндіретін жұмысын табу үшін (14) формуланы қолдануға болмайды. Бұл жағдайда күштің өндіретін жұмысын табу үшін қозғалушы нүктенің траекториясы болып табылатын қисыққа көпбұрышты сынық сызықты іштей сызамыз да, күштің осы сынық бойындағы жасаған жұмысының шамасын табамыз. Бұл жерде сынық сызықтың бір звеносындағы күштің өзгеруін есепке алмаймыз.

*(К)* траекториясының бас нүктесін *A* деп, соңғы нүктесін *B* деп белгілейік. *AB* қисықты $A=A_0\ (x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$,..., $A_n\ (x_n, y_n) = B$ нүктелермен *A*-дан *B*-ге қарай *n* участокқа бөлеміз де, сонан кейін бұл нүктелерді бір-бірімен қосамыз. Сонда қисыққа іштей сызылған сынық сызық шығады және мына түзу сызықты кесінділер $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$,..., $\overline{A_{n-1}}$, $\overline{A_n}$ ол сынық сызықтың звоналары болып табылады. Бұл звенолардың ішінен $\overline{A_k, A_{k+1}}$ звеносын сайлап алайық. $M_k$ $(\xi_k, \mu_k)$ осы звеноның бойында жатқан кез келген нүкте болсын. Бұл звеноның бойында күшті өзінің шамасы және бағыты жөнінде тұрақты деп санаймыз. Күштің шамасы тең болсын $F(\xi_k, \eta_k) = F_k$. Осы күштің бағытымен $\overline{A_k\ A_{k+1}}$ звеноның арасындағы бұрышты $\Theta_к$ арқылы белгілейік. (115-чертеж). Сонда элементар жұмыс $T_к$ болады:



115-чертеж

$$T_к = F_к \cos\theta_к \cdot \overline{A_к A_{к+1}}.$$

$F_k$ күштің бағытымен *OX* осінің арасындағы бұрыш $\alpha_k$, ал *OУ* осінің арасындағы бұрыш $\beta_k$ болсын. Сонда

$$\theta_к = \alpha_к - \beta_к,\quad \cos\theta_к =$$
$$= \cos(\alpha_к - \beta_к) = \cos\alpha_к \cos\beta_к + \sin\alpha_к \cdot \sin\beta_к.$$

Демек,

$$Т_к = F_к \cos\alpha_к \cdot \overline{А_кА_{к+1}} \cos\beta_к + F_к \sin\alpha_к \cdot \overline{А_кА_{к+1}} \sin\beta_к.$$

$F_к \cdot \cos\alpha_к, F_к \sin\alpha_к - F_к$ күштің координаталар осьтеріне түсірілген проекциялары екеніне көз жеткізу қиын емес. Сонымен,

$$F_к \cos\alpha_к = F_х(\xi_k, \eta_k) = \mathrm{P}(\xi_k, \eta_k),$$
$$F_к \sin \alpha_к = F_у(\xi_k, \eta_k) = \mathrm{Q}(\xi_k, \eta_k).$$

$\overline{А_кА_{к+1}}\, cos\,\beta_к, \overline{А_кА_{к+1}}\; sin\,\beta_к. - А_кА_{к+1}$ кесіндінің координаталар осьтеріне түсірілген проекциялары, сондықтан

$$\overline{А_кА_{к+1}}\, cos\,\beta_к = x_{к+1} - x_к = \Delta x_к,$$

$$\overline{А_кА_{к+1}} \sin \beta_к = у_{к+1} - у_к = \Delta у_к.$$

Осы айтылғандардың барлығын еске алсақ:

$$T_к = P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_к + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta у_к.$$

Өріс күштерінің сынық сызық бойынша толық жұмысы элементар жұмыстардың қосындысына тең, яғни

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} [P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_к + \ Q(\xi_k, \eta_k)\Delta у_к].$$

Материалды нүкте қисықтың бойымен жүргендегі өріс күштерінің өндіретін жұмысы жаңағы табылған жұмыстың сынық сызықтың барлық звеоналары нольге ұмтылғандағы шегіне тең, яғни

$$T = lim \sum_{k=0}^{n-1} P\,(\xi_k, \eta_k)\Delta x_к + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_к =$$
$$= \int_{(К)} P(x, y)dx + Q(x, y)\,dy.$$

б) Термодинамикада газдың күйі үш физикалық шамамен: қысым, $p$, көлем $\upsilon$ және температура (абсолют) $T$ сипатталынады. Егер газды «идеал» деп есептесек, онда жаңағы $\gamma$ шама мына Клапейрон теңдеуі

$$p\upsilon = RT$$

арқылы өзара байланыстылығы бізге физиканың элемантар курсынан белгілі, мұнда $R$ – тұрақты сан. Сонымен, мына $p, \upsilon$ және $T$ үш шаманың ішінен біреуі қалған екі шама арқылы өрнектелетінін байқаймыз. Сондықтан газдың күйін анықтау үшін жаңағы көрсетілген үш шаманың екеуін ғана, мәселен $p$ мен $\upsilon$-ні білу жеткілікті. Олай болса абсциссасы $\upsilon$-ге, ординатасы р-ге тең

$vop$ жазықтығында жатқан нүкте М$(v, p\ )$ газдың күйін анықтай алады, яғни газ күйінің кескіні бола алады.

Егер газдың күйі өзгеретін болса, онда оны анықтаушы нүкте М $(v, p)$ $vop$ жазықтығында бір *(К)* қисықты әліптейді. Бұл қисықты қарастырып отырған процестің диаграммасы деп атайды; егер газ өзінің бастапқы қалпына қайтып келсе, онда процесті цикл деп атайды және оның диаграммасы тұйық сызық болады.

*(К)* қисықпен сипатталынатын бүкіл процестің болған уақыты ішіндегі газға сіңген жылудың мөлшерін табу керек деген есепті алдымызға қояйық.

Зерттеп отырған процесті бірнеше «шексіз аз» элемент процестерге бөлейік. Осы шексіз аз элементар процесс газды $(v,p,T)$ күйден оған шексіз жуық $(v+vd,\ p+dp,\ T+dT)$ күйге көшіретін болсын. Шексіз аз элементар процеске *(К)* қисықтың шексіз аз элементі сәйкес келеді. Газға жұмсалған $dQ$ элементар жылудың мөлшерін табайық. Осы жылудың болуы арқасында газдың температурасы $dT$ градусқа көтерілсін, көлемі $v$ мына $dv$ шамасындай өссін, яғни газ механикалық жұмыс өндірді, бұл жұмысқа да біраз жылу кетті. Егер $c_v$ арқылы газдың тұрақты көлемдегі жылу сыйымдылығын белгілейтін болсақ, онда температураны жоғарылатуға кеткен жылудың шамасы мынадай болады: $cvdT$.

Ұлғаюға шыққан элементар жұмыс $pdv$ болады. Осы жұмысты өндіруге жұмсалған жылудың шамасын табу үшін, жаңағы өрнекті мынадай санға $\mathrm{A} = \frac{1}{427}$ *кал/кгм* көбейту керек (бұл санды «жұмыстың термиялық эквиваленті» деп атайды).

Түптеп келгенде

$$dQ=c_v dT+Apdv.$$

Екінші жағынан Клапейрон теңдеуін дифференциалдасақ:

$$pdv+vdp = RdT. \tag{15}$$

Кейінгі екі теңдіктен dυ-ні шығаратын болсақ, онда

$$dQ = (c_v + AR)\ dT-Avdp.$$

Егер $dp = 0$, яғни $p = const$, онда

$$dQ = (c_v + AR)\ dT.$$

Мұндағы көбейткіш $c_v + AR$ газдың қысымы тұрақты болған жағдайдағы оның жылу сыйымдылығы. Бұл жылу сыйымдылықты $c_p$ арқылы белгілейік, сонымен,

$$c_p = c_v + AR$$

Бұдан кейін

$$dQ = c_p dT - Avdp \tag{16}$$

(15) теңдіктен dt-ні тауып, оның осы мәнін (6) теңдікке қойсақ, сонда:

$$dQ\ = \frac{\mathrm{c_p}}{R}(pdv + vdp) - Avdp = \frac{\mathrm{pc_p}}{R}dv + \left(\frac{\mathrm{c_p}}{R} - \mathrm{A}\right)vdp,$$

немесе $\mathrm{c_p}$-нің өрнегін пайдаланып, алдымыздағы теңдікті мына түрге келтіреміз:

$$dQ = \frac{\mathrm{c_p}}{R}\ pdv + \frac{\mathrm{c}_v}{R}\ vdp.$$

Бұл арадан

$$Q = \int\limits_{(\mathrm{K})} \frac{\mathrm{c_p}}{R}pdv + \frac{\mathrm{c}_v}{R}\ vdp \tag{17}$$

Сөйтіп газдың ($k$) қисықпен сипатталынатын өзгеру процесіндегі алатын жылуының мөлшері $Q$ (17) теңдіктің оң жағындағы II типті қисық сызықты интегралмен өрнектелетінін көрсеттік.

## § 4. II типті қисық сызықты интегралды есептеп шығару жолы

**1.** Бұл жерде біз II типті қисық сызықты интегралдың бар болу шарттарын тағайындайық. Бұл шарттарды біз келесі теорема түрінде тұжырымдаймыз.

**Теорема.** *Қисық (К) мына параметрлік*

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t)$$

*теңдеулермен берілсін, параметр* $t$ $(\alpha, \beta)$ *аралығында өзгергенде бұған АВ участогы сәйкес келетін болсын. Егер* $\varphi(t)$ *функцияның* $(\alpha, \beta)$ *аралығында үздіксіз* $\varphi^1(t)$ *туындысы болса, онда (k) қисықтың нүктелерінде берілген үздіксіз функция F(x, y) қандай болса да II типті қисық сызықты интеграл*

$$\int\limits_{(\mathrm{AB})} F(x, y)dx$$

бар болады және

$$\int\limits_{(\mathrm{AB})} F(x, y)\, dx = \int F[\varphi(t), \qquad \psi(t)]\, \varphi'(t)dt. \tag{18}$$

Бұл теорема бойынша II типті қисық сызықты интегралды есептеп шығару мәселесі де анықталған интегралды шығаруға келіп тірелетін болды.

(18) теңдіктің оң жағындағы анықталған интеграл әрқашан да бар болады, яғни оның мәні шекті сан, өйткені интеграл таңбасы ішіндегі функция $F[\varphi(t), \psi(t)]$ және $\varphi'(t)$ теореманың шарттары бойынша $(\alpha, \beta)$ аралығында үздіксіз.

Теорманы дәлелдеу үшін *AB* участогын $A=A_0$, $A_1$, $A_2$,..., $A_{n-1}=B$ нүктелермен n бөлікке бөлеміз. Мұнда

$$\mathrm{A_к(x_к, y_к)}. \quad (k = 0, 1, 2, \quad \ldots, n-1).$$

*AB* участогын осылай етіп бөлшектеу $(\alpha, \beta)$ аралығын мынадай тәртіппен

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 <. \;\; . \;\; .< t_{n-1} < t_n = \beta$$

орналасқан нүктелермен *n* бөлшек сегменттерге бөлумен парапар. Ендеше

$$x_k = \varphi(t_к), \quad y_k = \psi(t_к)$$

ал

$$\xi_к = \varphi(\theta_к), \;\; \eta_к = \psi(\theta_к),$$

мұнда $\theta_к$ – бөлшек $[t_к \;\; t_{к+1}]$ сегменттің тіпті кез келген нүктесі, яғни $t_к \leq \theta_к \leq t_{к+1}$.

Енді (10) қосындыны құрайық:

$$\sigma = \sum_{к=0}^{n-1} F\,(\xi_к, \eta_к)(x_{к+1} - x_к) = \sum_{к=0}^{n-1} F[\varphi(\theta_к), \psi(\theta_к)] \;\; [\varphi(t_{к+1})] - \varphi(t_к)$$

$\varphi(t_{к+1}) - \varphi(t_к)$ айырмаға шекті өсімше турасындағы Лагранж теоремасын қолданып төмендегіні табамыз:

$$\varphi(t_{к+1}) - \varphi(t_к) = \varphi'(\tau_к)(t_{к+1}) - t_к,$$

мұнда $t_к < \tau_к < t_{к+1}$.

Бұдан кейін

$$\sigma = \sum_{к=0}^{n-1} F \;\; \varphi(\theta_к), \psi(\theta_к)\varphi'(\tau_к)(t_{к+1} - t_к),$$

бұл кейінгі қосынды интегралдық қосынды болып табылмайды, өйткені $\theta_к$ және $\tau$ әр түрлі сандар. Осы қосындыға ұқсас мына интегралдық қосындыны

$$\sigma^* = \sum_{к=0}^{n-1} F[\varphi(\tau_к), \psi(\tau_к)\;]\varphi'(\tau_к)(t_{к+1} - t_к) \qquad (19)$$

қарайық. (19) қосындының шегі болады

$$\int_{\alpha}^{\beta} F[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t) dt.$$

Енді біз қосынды $\sigma$ және $\sigma^*$ бірдей шекке ұмтылатынын дәлелдейік, барлық айырмалар $(t_{\text{к}+1} - t_{\text{к}})$ нольге ұмтылғанда:

$$|\sigma - \sigma^*| = \left| \sum_{\text{к}=0}^{n-1} F\,[\varphi(\theta_{\text{к}}), \qquad \psi(\theta_{\text{к}})\,]\varphi'(\tau_{\text{к}})(t_{\text{к}+1} - t_{\text{к}}) - \right.$$

$$\left. - \sum_{\text{к}=0}^{n-1} F[\varphi(\tau_{\text{к}}), \psi(\tau_{\text{к}})\,]\varphi'(\tau_{\text{к}})(t_{\text{к}+1} - t_{\text{к}}) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\text{к}=0}^{n-1} |[\varphi(\theta_{\text{к}}), \psi(\theta_{\text{к}})] - F[\varphi(\tau_{\text{к}}), \psi(\tau_{\text{к}})\,]| \cdot \varphi'(\tau_{\text{к}})(t_{\text{к}+1} - t_{\text{к}})$$

Функция *F(x,y) x* және *y* айнымалылары бойынша, ал функциялар *x = φ (t) y = ψ(t)* аргумент *t* бойынша үздіксіз болғандықтан, күрделі функция F[φ (t), ψ(t) айнымалы *t* бойынша үздіксіз болады. Олай болса алдын ала берілген оң мейлінше аз *ε* саны бойынша *δ* табылып, мына теңсіздіктің

$$|t'' - t'| < \delta$$

орындалуынан келесі теңсіздік

$$|F[\varphi(t''), \psi(\,t'')] - F[(t'), \psi(\,t')]| < \text{ε}. \qquad (21)$$

орындалады.

Енді $[t_k, t_{k+1}]$ бөлшек сегменттердің ұзындықтары δ санынан кіші болатын болсын, яғни

$$t_{k+1} - t_k < \delta,$$

олай болса

$$|\theta_{\text{к}} - \tau_{\text{к}}| < \delta.$$

σ санының сайланып алынуы және (21) теңсіздік бойынша

$$|F[\varphi(\theta_{\text{к}}), \psi(\theta_{\text{к}})] - F[\varphi(\tau_{\text{к}}), \psi(\tau_{\text{к}})]| < \varepsilon, \qquad (22)$$

Теорема шарттары бойынша $\varphi'(t)$ үздіксіз, олай болса, $\varphi'(t) -$ $(\alpha, \beta)$ аралығында шектелген функция, яғни

$$|\varphi'(t)| \leq H$$

мұнда H – тұрақты сан.

(22) және (23) теңсіздіктерді еске алып, (20) теңсіздіктен мына теңсіздікті табамыз:

$$|\sigma - \sigma^*| < \varepsilon H \sum_{k=0}^{n-1} (t_{\text{к}+1} - t_{\text{к}}) = H(\beta - \alpha)\varepsilon.$$

Бұл теңсіздіктің оң жағы мейлінше аз сан, сондықтан

$$\lim(\sigma - \sigma^{*}) = 0$$

немесе

$$\lim\ \sigma = \lim\ \sigma^{*}.$$

Қосынды $\sigma^{*}$-тың шегі мына анықталған интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} F[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t)dt,$$

болатынын біз жоғарыда айттық.

Сондықтан қосынды $\sigma$-ның шегі де осы анықталған интеграл болады, яғни

$$\lim \sigma = \int_{\alpha}^{\beta} F[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t)dt,$$

екінші жағынан II типті қисық сызықты интегралдың анықтамасы бойынша

$$\lim \sigma = \int_{(\text{К})} F(x, y)dx.$$

Сонымен теорема дәлелденді.

Егер II типті қисық сызықты интеграл жалпы түрде берілсе,

$$\int_{(\text{К})} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

онда

$$\int_{(\text{К})} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi^{1}(t) + Q\big[[\varphi(t), \psi(t)]\varphi^{1}(t)\big]\right\} dt. \qquad (18')$$

Егер қисық *(К)* мына түрдегі теңдеумен.

$$y = f(x)$$

берілсе, мұнда *f(x)* – [*a, b*] аралығында үздіксіз функция, онда

$$\int_{(\text{К})} F(x, y)dx = \int_{a}^{b} F[x, f(x)]\, dx. \qquad (24)$$

Егер мына интеграл

$$\int\limits_{(К)} F(x,y)\,dx$$

үшін интегралдау қисығы *ОУ* осіне параллель түзудің кесіндісі болса, онда бұл интеграл нольге тең, өйткені бұл жағдайда барлық $x_k - x_k = \Delta x$ айырмалар нольге тең болады. Ал мына интеграл

$$\int\limits_{(K)} F(x,y)dy$$

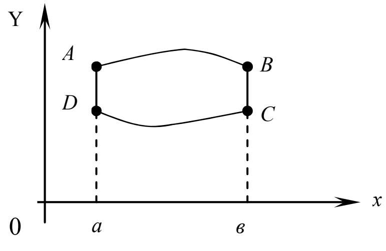
үшін қисық *(К) ОХ* осіне параллель түзудің кесіндісі болса, онда интеграл да нольге тең, өйткені айырмалар $y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$ нольге тең.

Егер қисық (*К*) саны шекті бірнеше бөліктерден тұрса, онда интеграл

$$\int\limits_{(K)} F(x,y)dx \quad \text{немесе} \quad \int\limits_{(K)} F(x,y)dy)$$

осі жеке бөліктер бойынша алынған интегралдардың қосындысына тең.

2. Екінші типті қисық сызықты интеграл көмегімен облыстардың аудандарын табуға болады.



116-чертеж

*ОУ* осіне параллель түзулердің *AD* және *BC* кесінділерімен екі (*AB*) және (*DC*) қисықтармен қоршалған фигураны қарайық (116-чертеж).

Бұл фигураны қоршап тұрған контур *ADCBA*, *ОУ* осіне параллель әрбір түзумен екі-ақ нүктеде ғана қиылысады.

Қисық *AB*, $y = f(x)$ теңдеумен, ал қисық *DC*, $y = g(x)$ теңдеумен берілсін.

Бұл екі функция $f(x)$ және $g(x)$ $(a, b)$ аралығында анықталған үздіксіз функциялар.

Айтып отырған фигураның ауданы:

$$u = \int_a^b f(x)dx \int_a^b \mathrm{g}\,(x)dx$$

болады.

Бұл теңдіктегі анықталған интегралдарды (24) формула бойынша былай жазуға болады:

$$\int\limits_{(\mathrm{A,B})} ydx = \int\limits_{a}^{q} f(x)dx; \int\limits_{(DC)} ydx = \int\limits_{a}^{b} \mathrm{g(x)}\, dx.$$

Сондықтан

$$u = \int\limits_{(\mathrm{AB})} ydx + \int\limits_{CD} ydx.$$

Егер осы интегралдарға ОУ осіне параллель кесінділер бойынша алынған мына интегралдарды

$$\int\limits_{DA} ydx \text{ және } \int\limits_{(BC)} ydx$$

қоссақ, онан жоғарыда жазылған теңдік өзгермейді, яғни

$$u = \int\limits_{(AB)} ydx + \int\limits_{(BC)} ydx + \int\limits_{(CD)} ydx + \int\limits_{(DA)} ydx = \int\limits_{(ABCDA)} ydx.$$

Егер *(DCBAD) = (K)*, онда

$$u = -\int\limits_{(K)} ydx. \qquad (25)$$

Егер ауданды қоршап тұрған контур *ОУ* осіне параллель әрбір түзумен екіден артық нүктелерде қиылысатын болса, онда да (25) формула дұрыс болады.

*OX* осіне параллель түзулердің *DC* және *AB* кесінділерімен және төмендегі теңдеулермен

$$x = q\,(y)$$

$$(c \le y \le d)$$

$$x = p\,(y)$$

берілген (*BC*) және (*AD*) қисықтармен қоршалынған фигураның ауданы келесі формуламен анықталады:

$$u = \int\limits_{(K)} xdy. \qquad (26)$$

болады.

Мұны дәлелдеу оқушылардың өздеріне тапсырылады.

Есеп шығаруға келгенде біз мына формуланы қолданамыз:

$$u = \frac{1}{2}\int\limits_{(K)} xdy - ydx \qquad (27)$$

Енді жоғарыда қорытылып шыққан формулаларды тәжірибе жүзінде қалай пайдалану керек соған бірнеше мысалдар келтірейік.

*1-мысал.* Егер (*К*) – мына $x = \alpha cos^3t, y = sin^3t$

Астроиданың бір доғасы болса, яғни *A(a,o), B (o,a)* болса, мына қисық сызықты интегралды

$$\int\limits_{(К)} \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$$

есептеп шығару керек.

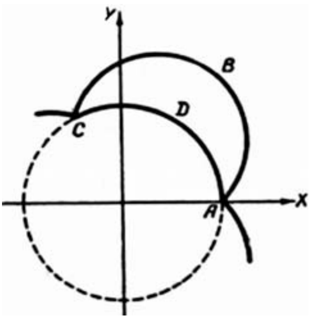
Берілген интегралдың мәнін табу үшін (18) формуланы қолданамыз. Есептің шарты бойынша $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\int\limits_{(К)} \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3a^3(\cos^7 t \cdot \sin^2 t + \sin^7 t \cdot \cos^2 t)dt}{a^{\frac{5}{3}}(\cos^5 t + \sin^5 t)} =$$

$$= 3a^{\frac{5}{3}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos^2 tdt = \frac{3a^{\frac{5}{3}}}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2tdt = \frac{3a\sqrt[3]{a}}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2}dt = \frac{3}{16}a\sqrt[3]{a.}$$

*2-мысал.* Төмендегі параметрлік теңдеулермен

$$x = a[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)t],$$
$$y = a[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)t]$$



117-чертеж

берілген эпициклоида[1] деп аталатын қисықтың бір арқасымен (доғасымен) дөңгелектің сәйкес доғасының арасындағы фигураның ауданын табу керек (117-чертеж).

Бұл есепті шешу үшін, тағы да (27) формуланы қолданамыз. Алдымен ондағы интегралды (*ABC*) қисығы бойынша, онан кейін (*CDA*) қисығы бойынша интегралдаймыз. (*ABC*) қисығының бойымен интегралдағанда біз берілген теңдеулерді

---

[1] Қозғалмай тұрған дөңгелектің шеңберінің бойымен екінші бір шеңбер дөңгелесе, сонда осы дөңгелеуші шеңберге бекілген М нүкте қисық сызады. Міне, осы *M* нүктесімен сызылған геометриялық орынды (қисықты) эпициклоида деп атайды.

пайдаланамыз, мұнда параметр $t$, $0$-ден $2\pi$-ге дейін өзгереді, яғни $0 \leq t \leq 2\pi$.

Сонда

$$dx = a\,[m(1+m)\sin(1+m)\,t - m\,(1+m)\sin mt\,]\,dt =$$
$$am\,(1+m)\,[\sin(1+m)\,t - \sin t]\,dt,$$
$$dy = am\,(1+m)\,[\cos mt - \cos(1+m)\,dt.$$

Бұл арадан

$$xdy - ydx = a^2 m\,(1-m)\,(1+2m)\,(1-\cos t)\,dt.$$

Енді

$$\frac{1}{2}\int_{(ABC)} xdy - ydx = \pi a^2 m(1+m)(1+2m).$$

($CDA$) – дөңгелек шеңберінің доғасы, сондықтан оның параметрлік теңдеулері төмендегідей болады:

$$x = \alpha\cos m\,t,$$
$$y = \alpha\sin m\,t,$$

мұнда параметр t, $2\pi$-ден 0-ге дейін өзгереді. Сондықтан

$$\frac{1}{2}\int_{(CDA)} xdy - ydx = \frac{1}{2}a^2 m\int_{2\pi}^{0} dt = -\pi a^2 m.$$

Сонымен, іздеп отырған аудан

$$u = \pi\alpha^2 m^2(2m+3)$$

болады.

## §5. Бірінші типті қисық сызықты интеграл мен екінші типті қисық сызықты интегралдың арасындағы байланыс

$XOY$ жазықтығында, өзінің әрбір нүктесінде үздіксіз өзгеріп отыратын жанамасы бар қисық ($K$) берілсін. Осы жанаманың $OX$ осінің оң бағытымен құрған бұрышын $(\widehat{x,t})$ немесе арқылы белгілейік.

Мына II типті

$$\int_{AB} F(x,y)dx$$

интегралды алайық, мұнда $F(x,y)$ – $(AB)$ участоктың барлық нүктелерінде үздіксіз функция, $A$ нүктесінің абсцисасы $a$, $B$

нүктесінің абсциассы $b$ және $a < b$ болсын. Қарастырылып отырған интеграл келесі қосындының

$$\sigma = \sum_{\kappa=0}^{n-1} F(\xi_\kappa, \eta_\kappa)(x_{\kappa+1} - x_\kappa) \tag{10}$$

шегі болып табылатындығын біз жоғарыда айттық, егер $A_k\, A_{k+1}$ участоктың ұзындығы $s_k$ болса, онда (9) формула бойынша

$$s_\kappa = \int_{x_\kappa}^{x_{\kappa+1}} \frac{dx}{|\cos\alpha|}.$$

Егер анықталған интегралдың орта мәні турасындағы теореманы қолдансақ, сонда:

$$s_\kappa = \frac{x_{\kappa+1} - x_\kappa}{|\cos\alpha_\kappa|},$$

мұнда $\cos\alpha_\kappa$-ның мәні $A_k\, A_{k+1}$ участогының бір $(\bar{x}, \bar{y})$ нүктесінде алынған. Бұрыш α келесі екі теңсіздіктің $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ немесе $\frac{3\pi}{2} \le \alpha \le 2\pi$ біреуін қанағаттандыру керек. Сондықтан $\cos\alpha > 0$, олай болса абсолют шама белгісін алудың қажеті жоқ. Сонымен,

$$x_{\kappa+1} - x_\kappa = \cos\alpha_\kappa \cdot s_\kappa$$

Бұдан кейін (10) қосынды мына түрге көшеді.

$$\sigma = \sum_{\kappa=0}^{n-1} F(\xi_\kappa, \eta_\kappa) \cos\alpha_\kappa \cdot s_\kappa.$$

Бұл қосындыдағы нүкте $(\xi_k, \eta_k)$ тіпті кез келген нүкте, былайша айтқанда, оны сайлап алу – өзіміздің қолымыздағы іс. Сондықтан бұл нүктені мына нүктеге (x̅, y̅) теңдеп алайық. Сонда

$$\sigma = \sum_{\kappa=0}^{n-1} F\big(\bar{x}_{\kappa,}\, \bar{y}_\kappa\big) \cos\alpha_\kappa \cdot s_\kappa.$$

Енді барлық $s_\kappa$-ларды нольге ұмтылайық та, бұл қосындыдан шек алайық, сонда

$$\int_{(\mathrm{AB})} F(x,y)dx = \int_{(AB)} F(x,y)\cos\alpha\, ds. \tag{28}$$

(28) теңдіктің сол жағында тұрған интеграл $A$ нүктесінен $B$ нүктесіне қарай интегралданады, осы бағытта интегралдану, әрине, оң жақтағы интегралға, сөз жоқ, әсер етеді. Бұлай әсер етудің мәнісі мынада: қарастырып отырған бұрыш α − қисықтың

дәл осы бағытымен сай келетін жанаманың *OX* осімен жасайтын бұрышы.

Егер біз мына түрдегі

$$\int\limits_{(K)} F(x,y)dy$$

қисық сызықты интегралды қарасақ, онда дәл жоғарыда көрсетілген жолмен

$$\int\limits_{(K)} F(x,y)dy = \int\limits_{(K)} F(x,y)\cos\left(y,\widehat{\ }t\right)ds, \qquad (29)$$

тапқан болар едік

мұнда $\left(y,\widehat{\ }t\right)$ – қисықтың интегралдау бағытына сәйкес келетін жанама мен *OУ* осінің арасындағы бұрышты көрсетеді. Мынадай қатыстың

$$\left(x,\widehat{\ }y\right) + \left(x,\widehat{\ }y\right) + \left(y,\widehat{\ }t\right) = \pi$$

немесе

$$\frac{\pi}{2} + \left(x,\widehat{\ }t\right) + \left(y,\widehat{\ }t\right) = \pi$$

орындалатынына көз жеткізу қиын емес. Бұл арадан

$$\left(y,\widehat{\ }t\right) = \frac{\pi}{2} - \left(x,\widehat{\ }t\right),$$

олай болса

$$\cos\left(y,\widehat{\ }t\right) = \sin\left(x,\widehat{\ }y\right) = \sin\alpha.$$

Бұдан кейін (29) теңдік мына түрге көшеді:

$$\int\limits_{(\text{К})} F(x,y)dy = \int\limits_{(\text{К})} F(x,y)\sin ds \qquad (30)$$

(28) және (30) формулаларды еске алып, келесі формуланы табуға болады:

$$\int\limits_{(K)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{(K)} [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\sin\alpha]ds. (31)$$

(31) формула I типті қисық сызықты интеграл мен II типті қисық сызықты интегралдың арасындағы байланысты тағайындайды.

Қисыққа жүргізілген жанама мен нормальдың арасындағы бұрышты $\left(n,\widehat{\ }t\right)$ арқылы белгілесек, онда келесі қатыстың:

$$(x,\widehat{\ }t) = (x,\widehat{\ }n) + (n,\widehat{\ }t) = (x,\widehat{\ }n) + \frac{\pi}{2}$$

орындалатынына көз жеткізу тіпті қиын емес.

Бұл арадан

$$\cos(x,\widehat{\ }t) = -\sin(x,\widehat{\ }n); \quad \sin(x,\widehat{\ }t) = \cos(x,\widehat{\ }n);$$

сондықтан

$$\int\limits_{(K)} P(x,y)dx + (Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{(K)} [-P sin\,(x,\widehat{\ }n) + Q cos\,(x,\widehat{\ }n)]ds. \quad (32)$$

Кеңістіктегі қисықтың бойымен алынған интегралдардың арасындағы байланыс мына түрде болады:

$$\int\limits_{(\text{К})} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

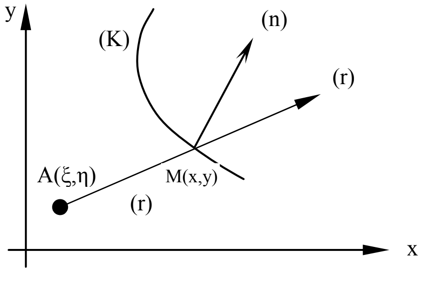
$$= \int\limits_{(\text{К})} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds, \qquad (33)$$

мұнда $\alpha,\beta,\gamma$ – қисықтың интегралдау бағытына сәйкес келетін жанамамен координаталар осьтерінің арасындағы бұрыштар.

Мысал үшін Гаусс интегралы деп аталатын келесі бірінші типті қисық сызықты интегралды

$$J = \int\limits_{(K)} \frac{\cos(r,\widehat{\ }n)}{r} ds$$

қарайық. Мұнда $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, сырттағы $\text{A}(\xi, n)$ нүктемен ($K$) қисықтың бойында жатқан айнымалы (x,y) нүктені қосатын кесіндінің (вектордың) ұзындығын көрсетеді. (118-чертеж). Ал $(r,\eta)$ – бұл кесінді мен қисықтың $M$ нүктесіндегі оған жүргізілген жанаманың арасындағы бұрыш.



118-чертеж

$A$ нүктесі тұрақты болғандықтан, интеграл таңбасы астында тұрған өрнек $M$ нүктесінің координаталары $x$ және $y$-тің функциясы болып табылады.

Енді осы интегралды II типті қисық сызықты интегралға айналдырайық.

Егер (x, $n$) нормаль мен OX осінің арасындағы бұрыш, ал $(x, r)$ – радиус – вектор мен $OX$ осінің оң бағытының арасындағы бұрыш болса, онда

$$(r, \widehat{\ } n) = (x, \widehat{\ } n) - (x, \widehat{\ } r)$$

демек

$$\cos(r, \widehat{\ } n) = \cos(x, \widehat{\ } n)\cos(x, \widehat{\ } r) + \sin(x, \widehat{\ } n)\sin(x, \widehat{\ } r) =$$
$$= \frac{x-\xi}{r}\cos(x, \widehat{\ } n) + \frac{y-\eta}{r}\sin(x, \widehat{\ } n).$$

Енді осы өрнекті Гаусс интегралына апарып қойсақ, сонда

$$J = \int\limits_{(K)} \left[\frac{y-\eta}{r}\sin(x, \widehat{\ } n) + \frac{x-\xi}{r}\cos(x, \widehat{\ } n)\right] ds.$$

(32) формуланы қолдансақ, онда

$$J = \pm \int\limits_{(K)} \frac{y-\eta}{r^2}dx - \frac{x-\xi}{r^2}dy.$$

Интеграл таңбасы алдында $\pm$ болуы нормальдың бағытына байланысты.

Гаусс интегралы математикалық физиканың кейбір мәселелерінде тиісті роль атқарады.

### *Жаттығулар*

1. Егер *(К)* $y^2 = 2px$ параболаның координаталардың бас нүктесінен мына $(x_0, y_0)$ нүктеге дейінгі участогы болса, мына интегралды

$$\int\limits_{(K)} yds$$

есептеп шығару керек.

Жауабы: $\frac{1}{3p}\left[\left(y_0^2 + p^2\right)^{\frac{3}{2}} - p^3\right]$.

2. Берілген мына

$$\int\limits_{(K)} F(x, y)ds$$

қисық сызықты интегралдың есептеп шығару формуласын беру керек, егер интегралдау қисығы (К) поляр координаталарда $\rho = f(\theta)$ теңдеумен берілсе және $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ болса.

Жауабы: $\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 d\theta}.$

3. Мына интегралды

$$\int_{(K)} \frac{ds}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

есептеп шығару керек, егер (K) келесі теңдеумен $\rho\theta = 1, \left(\sqrt{3} \leq \theta \leq 2\sqrt{2}\right)$, берілген гиперболалық спиральдің кесіндісі болса.

Жауабы: $\frac{19}{3}$.

4. Мынадай $x = ln(1+t^2); y = 2arc\,tg\,t - t + 3,\ (0 \leq t \leq 1)$ параметрлік теңдеулермен берілген $(C)$ қисықтың бойымен алынған мына интегралды

$$\int_{(C)} y\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} ds \text{ есептеп шығару керек.}$$

Жауабы: $\frac{\pi_2}{10} - \frac{1}{2} ln2 + \frac{3\pi}{2}$.

5. Кеңістікте мынадай $x = t, y = \frac{2t\sqrt{t}}{3}, z = \frac{t^2}{2} (0 \leq \mathrm{t} \leq 1)$ параметрлік теңдеулермен берілген қисықтың бойымен алынған мына интегралды $\int_{(L)} xyzds$ есептеп шығару керек.

Жауабы: $\frac{16\sqrt{2}}{143}$.

6. Жарты шеңбердің өзін керіп тұрған диаметрі бойынша статистикалық моментін табу керек.

Жауабы: $2\mathrm{R}^2$

7. Мына $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ астроиданың бірінші ширекте жатқан доғасының ауырлық центрін табу керек.

8. Мына интегралды

$$\int_{(K)} \frac{xdx}{y} + \frac{dy}{y-a}$$

есептеп шығару керек, егер (K) төмендегі параметрлік теңдеулермен $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), \left(\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}\right)$ берілген циклоиданың кесіндісі болса

Жауабы: $a\left(\frac{\pi^2}{224} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}\ln\ 3$.

9. Мына $(x+y)^4 = x^2y$ қисықпен қоршалынған фигураның ауданын табу керек.

*Нұсқау.* Берілген қисықтың теңдеуін параметрлік түрге көшіру керек, ол үшін былай $y = tx$ ұйғару керек, ал $0 \leq t < \infty$.

Жауабы: $\frac{1}{210}$.

10. Координаталар осьтерімен және мына $x^3 + y^3 = x_2 - y^2$ қисықпен қоршалынған фигураның ауданын табу керек.

Жауабы: $\frac{1}{3} + \frac{4}{9\sqrt{3}}\pi$.

11. Мына

$$\int\limits_{(AB)} (x+y)\,dx + (x-y)dy$$

қисық сызықты интегралдың мәнін табу керек, егер ($AB$) $y=x^2$ параболаның (– 1, 1) нүктеден (1, 1) нүктеге дейінгі участогы болса.

Жауабы: 2.

12. Мынадай $x = a(2\cos t + \cos 2t), y = a(2\sin t - \sin 2t)$ параметрлік теңдеулерден берілген, кардиоида деп аталатын қисық пен қоршалынған фигураның ауданын табу керек.

Жауабы: $9a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

13. Мынадай параметрлік $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ теңдеулермен берілген қисықты бұранда қисық деп атайды. Міне, осы қисықтың бір айналымының (орамының) массасын табу керек, егер әрбір нүктесіндегі оның тығыздығы осы нүктенің радиус-ректорының квадратына тең болса.

Жауабы: $\left(2\pi a^2 + \frac{8\pi^3 b^2}{3}\right)\sqrt{a^2+b^2}$.

14. Төмендегі қисық сызықты интегралды

$$\int\limits_{(L)} \frac{z^2 ds}{x^2+y^2}$$

есептеп шығару керек, егер $(L\frown$ – мұның алдында келтірілген бұранда сызықтың бір айналымы болса.

Жауабы: $\frac{8a\pi^3\sqrt{2}}{3}$.

15. Келесі интеграл

$$\int\limits_{(L)} yzdx + z\sqrt{z^2-y^2}dy + xydz,$$

бұранда сызықтың $x = r\ \cos t\,, y = \sin t, y = \frac{at}{2\pi}$ бойымен алынған. Міне, осы интегралдың мәнін қисықтың $z = 0$ жазықтықпен қиылысу нүктесінен, $z = a$ жазықтықпен қиылысу нүктесіне дейін табу керек.

Жауабы: 0

16. Келесі теңдеулермен

$$x = e^t\cos t\,,\ \ y = e^t\sin t\,,\ \ \ z = e^t\ \ (-\infty < t \le 0)$$

берілген бір тектес қисықтың ауырлық центрін табу керек.

Жауабы: $x_c = \frac{2}{5};\ y_c = -\frac{1}{5};\ z_c = \frac{1}{2}$.

17. Мына $x = a\cos t,\ \ y = \sin t,\ z = \frac{h}{2\pi}t,\ (0 \le t \le 2\pi)$ бұранда қисықтың координаталар осьтері бойынша инерция моменттерін табу керек.

Жауабы: $I_x = I_y = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$

$I_z = a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^1}$.

18. Төмендегі берілген $(x+y)^3 = xy$ қисықпен қоршалынған фигураның ауданын табу керек.

Жауабы: $\frac{1}{60}$.

19. Материалды нүкте мына $x = at,\ y = bt,\ z = ct$ түзудің бойымен қозғалады, бұл нүктеге әсер етуші күш оның түсу нүктесінен *ХОУ* жазықтығына дейінгі арақашықтыққа кері пропорционал. Осы күштің *М(а, b, с)* нүктеден *N(2а, 2b, 2с)* нүктеге дейінгі өндірген жұмысын табу керек.

Жауабы: $\frac{k\sqrt{a^2+b^2}+c^2}{c}\,ln2$.

# XX ТАРАУ
# ҚОС ИНТЕГРАЛДАР

## § 1. Қос интеграл ұғымына келтіретін есеп. Қос интеграл ұғымы

**1.** Қос интегралдың аналитикалық анықтамасына көшпестен бұрын біз ең алдымен осы интегралға келтіретін геометриялық есепті қарайық. Бұл есептің мазмұны былай: жоғарғы жағынан

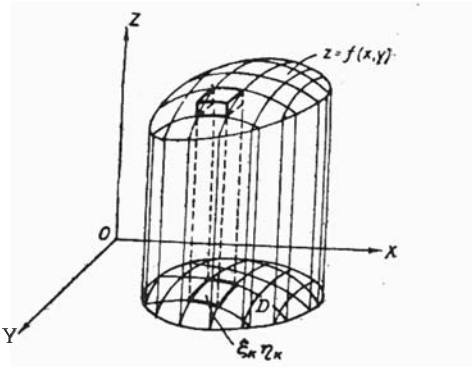
$$z = f(x, y)$$

теңдеумен берілген бетпен, бүйір жағынан жасаушысы *OZ* осіне параллель цилиндрлік бетпен, ал төменгі жағынан *ХОУ* жазықтығында жатқан (*D*) облысымен қоршалынған бір дене берілсін. Міне, осы дененің көлемін табу керек.

Мұнда $f(x, y)$ — (*D*) облысында үздіксіз функция, (*D*) облысының контуры цилиндрлік беттің бағыттаушысы болып табылады.

Дененің көлемі деп қандай ұғымды түсінеміз біз оған тоқтамай-ақ, қойылған есептің шығару жолына көшейік.

(*D*) облысын еркінше жүргізілген қисықтармен бірнеше, мәселен *n*, бөлшек облыстарға бөлеміз, ($D_1$), ($D_2$),..., ($D_n$) болсын, сонан кейін осы бөлшек облыстарды табаны етіп цилиндрлер құрамыз (119-чертеж). Әрине, біз цилиндрлердің жиыны бастапқы денені құрады.



119-чертеж

Енді әрбір ($D_k$) бөлшек облыстың ішінде жатқан кез келген ($\xi_k, \eta_k$) нүктесін сайлап алайық. Осы бөлшек облыстың ауданын $p_k$ арқылы белгілейік. Егер жаңағы ($D_k$) бөлшек облысында функция $f(x,y)$ тұрақты $f(\xi_k, \eta_k)$ мәнді сақтайды деп ұйғарсақ, онда осы бөлшек табаны есебінде алынған цилиндрдің көлемі:

$$f(\xi_k, \eta_k)\, p_k$$

болады.

Олай болса, қарастырып отырған дененің жуық көлемі

$$\upsilon \approx \sum_{k=1}^{n} f\,(\xi_k, \eta_k)\, p_\kappa \tag{1}$$

болады.

Бұл көлемнің дәл мәнін табу үшін бөлшек облыстардың санын шексіз өсіріп, мөлшерлерін шексіз азайту керек.

Сонымен, зерттелініп отырған дененің көлемін табу үшін барлық бөлшек облыстардың диаметрлерін[1] нольге ұмтылтып (1) қосындыдан шек алу керек. Егер осы шек бар болатын болса, онда ол алдымызға қойылған есептің жауабы болып табылады.

Сөйтіп, іздеп отырған көлем

$$\upsilon = \lim_{n\to\infty} \sum_{\kappa=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, p_\kappa \tag{2}$$

болады.

Сонымен, жоғарыда тұжырымдалған есептің шешуі бізді (2) теңдіктің оң жағында тұрған шекті зерттеуге әкеп соқты.

Жазық фигураның немесе облыстың ауданы нені түсіну керек, қандай облыстарды квадратталынатын облыстар деп атайды, олардың квадратталыну шарттары қандай, міне, бұл мәселелердің барлығы анықталған интегралдардың геометриялық есептерге қолданылуы деген параграфта талданған болатын. Сондықтан осы маңызды мәселелерді белгілі деп есептейміз.

**2.** Енді қос интегралдың аналитикалық анықтамасына келейік. Тұйық сызықпен (контурмен) қоршалынған, *ХОУ* жазықтығында жатқан ($D$) облысында анықталған және осы облыстың ешбір нүктесінде шексіздікке айналмайтын $f(x,y)$ функцияны қарайық. Облысты қоршап тұрған қисықты жай қисық деп есептейміз, яғни

---

[1] Облыстың диаметрі деп оның шекарасында жатқан нүктелердің бір-бірінен қашықтарының ең дәл жоғарғы шекаралығын атайды. Тұйық сызықпен қоршалған облыстың диаметрі үшін оның хордаларына ең үлкенін алуға болады.

облыс (*D*) квадратталынатын фигура. Енді осы (*D*) облысын жай қисықтармен *n* бөлшек ($D_1$)-дың жиыны бастапқы (*D*) облысын құруы керек. Бөлшек ($D_2$),..., (*D*) облыстарға бөлеміз. Ал осы бөлшек облыстардың аудандарын $p_1, p_2,...,p_n$ деп белгілейік. Әрбір ($D_i$) бөлшек облыстың ішінде немесе шекарасында жатқан кез келген $(\xi_i,\ \eta_i)$ нүктені алайық. Мұндай нүктелердің саны n.

Осы сайланып алынған *M* нүктелердегі $f(x,y)$ функцияның мәндері

$$f(\xi_1,\eta_1),\ f(\xi_2,\eta_2),\ .\ .\ .\ ,\ f(\xi_n,\ \eta_n).$$

Бұл табылған мәндерді тиісті $p_1\ \ p_2...\ p_n$ аудандарға көбейтіп, одан шыққан нәтижелерді қосайық, сонда

$$\sigma = f(\xi_1,\eta_1)p_1 + f(\xi_2,\eta_2)p_2 + \cdots + f(\xi_n,\qquad \eta_n)p_n = \sum_{i=1}^{n}(\xi_i,\eta_i)\mathrm{p}_i \quad (1)$$

Бұл қосындыны $f(x,y)$ функцияның (*D*) облысындағы интегралдық немесе Риман қосындысы деп атайды.

Егер барлық бөлшек облыстардың диаметрлері нольге ұмтылғанда, интегралдық қосынды σ бір тиянақты шекке ұмтылса, міне, осы шекті $f(x,y)$ функцияның (*D*) облысындағы қос интегралы деп атайды және оны былай белгілейді:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dp.$$

Мұнда бір айта кететін мәселе мынау: жаңағы анықтамада айтылып отырған шек облысты бөлшектеу тәсіліне және сайлап алған $(\xi_i,\eta_i)$ нүктелерге тәуелді емес.

Сонымен анықтама бойынша

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dp = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\ (\xi_i,\eta_i)\mathrm{p}_i \qquad (2)$$

Егер осы шек бар болса, онда $f(x,y)$ функцияны (D) облысында интегралданатын функция деп атайды.

**3.** Енді функцияның интегралдану шарттарын іздейік.

Бөлшек ($D_i$) облысындағы функцияның дәл жоғарғы шекаралықтарын $M_i$ дәл төменгі шекаралықтарын $m_i$ арқылы белгілейік, яғни

$$\underset{(D_i)}{Sup} f(x,y) = M_i,\ \underset{(D_i)}{\text{in}} ff(x,y) = m_i(i = 1,2,\dots,n).$$

Бұдан кейін келесі екі қосындыны құрайық:

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i p_i, \tag{3}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} m_i p_i, \tag{4}$$

(3) қосындыны Дарбудың жоғарғы қосындысы, (4) қосындыны Дарбудың төменгі қосындысы деп атайды.

Осы үш қосындының арасында қатыс бар, соны табайық, ол үшін біз мынаны байқаймыз:

$$m_i \leq f(\xi_i, \eta_i) \leq M_i,$$

бұл теңсіздіктердің екі жағын $p_i$-ге көбейтіп, сонан кейін i-ді 1-ден n-ге дейін жүгіртіп қосындыласақ, онда

$$\sum_{i=1}^{n} m_i p_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i p_i,$$

бұл арадан

$$s \leq \sigma \leq S.$$

(5) теңсіздіктерден мынадай қорытынды жасауға болады: егер Риман қосындыларынан тұрған жиынды қарайтын болсақ, онда ол жиын үшін Дарбудың жоғарғы қосындысы дәл жоғарғы шекаралық, Дарбудың төменгі қосындысы дәл төменгі шекаралық болады.

Дарбудың жоғарғы қосындысындағы қосылғыш $M_i p_i$ – табанының ауданы $p_i$-ге, биіктігі қарастырылып отырған бөлшек ($D_i$) облысындағы ең үлкен $M_i$ аппликатаға тең цилиндрдің көлемін береді. Бұл цилиндрді сыртқа шыққан цилиндр дейді. Дарбудың төменгі қосындысындағы қосылғыш $m_i p_i$ – табанының ауданы $p_i$-ге, биіктігі бөлшек ($D_i$) облысындағы ең кіші $m_i$ аппликатаға тең цилиндрлік дененің көлемін өрнектейді. Мұндай цилиндрлік денені іште жатқан цилиндр дейді.

Сонымен, Дарбудың жоғарғы қосындысы сыртқа шыққан цилиндрлерден құрылған сатылы дененің көлемін береді. Ал төменгі қосынды

$$\sum_{i=1}^{n} m_i p_i$$

дененің ішінде жатқан сатылы дененің көлемін көрсетеді.

Көлемі (2) интегралдық қосындымен өрнектелетін дене осы екі сатылы дененің арасында жатады.

Егер функция $f(x, y)$ берілген (*D*) облысында үздіксіз болса, онда жаңағы екі сатылы дененің көлемі ортақ шекке ұмтылады[1]. Сондықтан әңгіме болып отырған дененің көлемі

$$\upsilon = \lim \sum_{i=1}^{n} m_i p_i = \lim \sum_{i=1}^{n} M_i p_i = \iint_{(D)} f(x, y) dp$$

болады.

Дәлелдеуін келтірмей-ақ қос интегралдың болу теоремасының тұжырымдауын ғана берейік, өйткені бұл теорманы дәлелдеу жолы анықталған интегралдың болу теоремасын дәлелдеумен бірдей, сондықтан оны қайталаудың ешбір қажеті жоқ.

**Теорема**. *Шектелген $f(x, y)$ функцияның (D) облысында қос интегралы болу үшін, барлық бөлшек облыстардың диаметрлері нольге ұмтылғанда Дарбу қосындылары айырмасының нольге ұмтылуы (яғни S—s→0) қажетті және жеткілікті.*

Ал

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) p_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i p_i,$$

$w_i$ – бөлшек ($D_i$) облысындағы $f(x, y)$ функцияның тербелісін көрсетеді.

Жаңағы теореманың екінші түрдегі тұжырымдауын берейік: шектелген функция $f(x, y)$ $(D)$ облысында интегралдану үшін әрбір алдын ала берілген оң мейлінше аз ε санына δ саны сәйкес келіп бөлшек облыстардың диаметрлері σ-дан кіші болғанда, фунцияның тербелістері мен бөлшек облыстар аудандары көбейтіндісінің қосындысы ε саныан кем болуы, яғни

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i p_i < \varepsilon_i$$

қажетті және жеткілікті.

Енді осы тұжырымдалған теореманың көмегімен келесі теореманы дәлелдеуге болады.

**Теорема.** *Квадратталынатын облыста берілген әрбір үздіксіз функция $f(x, y)$ бұл облыста интегралданатын функция болып табылады.*

---

[1] Мұны кейін дәлелдейміз.

Функция $f(x,y)$ ($D$) облысында үздіксіз болғандықтан, алдын ала берілген оң мейлінше аз ε санына сәйкес δ санын тауып, ($D$) облысын саны шекті және әрқайсысының диаметрі δ-дан аспайтын бөлшек облыстарға жіктеуге болады. Сонда әрбір бөлшек облыстағы функцияның тербелісі $\omega_i < \frac{\varepsilon}{p}$ (барлық $i$-лер үшін) мұнда $p$ – бүкіл облыстың ауданын көрсетеді. Олай болса,

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i p_i < \frac{\varepsilon}{p} \sum_{i=1}^{n} p_i = \varepsilon$$

саны мейлінше аз болғандықтан

$$\lim(S - s) = 0.$$

Міне, осы қатыстардың орындалуы теореманы дәлелдейді.

4. Енді қос интегралдардың қарапайым қасиеттерін қарайық.

1. Егер интегралдау облысы жай қисықпен қоршалынған болса, онда

$$\iint_{(D)} dp = p,$$

(мұнда $p$ – бүкіл облыстың ауданы).

2) Қос интегралдың болуы және оның шамасы интеграл таңбасы астындағы функцияның саны шекті жай қисықтар бойында қабылдайтын мәндеріне тәуелді емес.

Осы қасиетке сүйеніп, мына пікірді айтуға болады: Біздің осы уақытқа дейін қарастырғанымыз тұйық облыстар, яғни шекаралық нүктелер олардың барлық нүктелерінің есебіне қосылатын фигуралар болып келді, ал жаңағы келтірілген қасиет бойынша облыстың шекарасын оның құрамына еңгізсе де және енгізбесе де болады; бұдан қос интегралдың шамасы өзгермейді. Берілген облысты жай қисықтармен бірнеше бөліктерге бөлгенде, бөлуші қисықты қай бөлікке жатқызу керек оған тоқталып жатудың қажеті жоқ.

3) Егер бір облыста, айталық $(D)$ облысында, берілген екі функция $f(x,y)$ және $g(x,y)$ интегралданатын болса, онда олардың қосындысы да интегралданатын болады, және

$$\iint_{(D)} [f(x,y) + g(x,y)]dp = \iint_{(D)} f(x,y)dp + \iint_{(D)} g(x,y)\, dp.$$

4) Тұрақты санды интеграл таңбасының сыртына шығаруға және ішіне енгізуге болады:

$$\iint\limits_{(D)} a\, f(x,y) dp = a \iint\limits_{(D)} f(x,y)\, dp.$$

5) Егер интегралдау $(D)$ облысы жай қисықпен екі бөлікке $(D_1)$ және $(D_2)$ бөлінсе және берілген функция $f(x,y)$ бүкіл $(D)$ облысында интегралданатын болса, онда ол $(D_1)$ және $(D_2)$ облыстарда да интералданады, және керісінше, егер функция $f(x,y)$ мына $(D_1)$ және $(D_2)$ облыстардың әрқайсысында интегралданатын болса, онда $f(x,y)$ бүкіл $(D)$ облысында интегралданатын болады және онымен бірге

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y) dp = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)\, dp + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)\, dp\, .$$

6) Егер $(D)$ облысында интегралданатын екі функция $f(x,y)$ және g$(x,y)$ осы облыстың барлық нүктелерінде келесі теңсіздікті

$$f(x,y) \leq g(x,y)$$

қанағаттандырса, онда

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\, dp \leq \iint\limits_{(D)} g(x,y)\, dp.$$

Осы айтылып, отырған қасиеттердің дәлелдері өзінен-өзі айқын көрініп тұр, сондықтан оны біз әдейі келтірмей отырмыз, өйткені оқушылар өздері де меңгеріп кетеді.

7) Егер $(D)$ облысында интегралданатын функция $f(x,y)$ осы облыстың барлық нүктелерінде келесі теңсіздіктерді

$$m \leq f(x,y) \ \leq M$$

қанағаттандыратын болса, онда

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\, dp = \mu\, p, \tag{6}$$

мұнда $m \leq \mu \leq M$.

Бұл қасиетті дәлелдеуге тура келеді. 6) қасиет бойынша

$$\iint\limits_{(D)} m dp \leq \iint\limits_{(D)} f(x,y)\, dp \leq \iint\limits_{(D)} M\, dp,$$

бұл арадан 1) және 4) қасиеттерге сүйеніп, мынаны табамыз:

$$mp \leq \iint\limits_{(D)} f(x,y)\, dp \leq M\, p.$$

Теңсіздіктердің екі жағын $p$-ге бөлсек, сонда

$$m \leq \frac{\iint_{(D)} f(x,y) dp}{p} \leq M.$$

Кейінгі теңсіздіктердегі ортада тұрған қатынасы $\mu$ арқылы белгілеп, (6) теңдікке келеміз.

Осы дәлелденген қасиетті қос интегралдың орта мәні жөніндегі теорема деп атайды.

Егер функция $f(x,y)$ $(D)$ облысында үздіксіз болса, онда (6) теңдіктің орнына мына теңдік пайда болады:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y) dp = f(\bar{x},\bar{y})\, p, \tag{7}$$

мұнда $(\bar{x},\bar{y}) - (D)$ облысының бір белгілі тиянақты нүктесі.

(7) формуланың дұрыстығын былай дәлелдеуге болады: функция $f(x,y)$, $(D)$ облысында үздіксіз болғандықтан, $m$ және $M$ сандарын қабылдайды. Ендеше екі айнамалының үздіксіз функцияларының қасиеттері жөніндегі Кошидің екінші теоремасы бойынша функция $f(x,y)$ жаңағы $m$ және $M$ сандардың арасында жатқан барлық сандарды қабылдауға тиіс былайша айтқанда, $(D)$ жатқан $(\bar{x},\bar{y})$ нүктедегі функцияның мәні:

$$\mu = f(\bar{x},\bar{y})$$

болуы керек.

Бұл теорема көп пайдаланатын теоремалардың бірі болып табылады.

## § 2. Қайталанған (екінші рет алынған) интеграл ұғымы

1. Біз ең алдымен қайталанған интеграл ұғымына тоқтап кетеміз. Тік төртбұрыш $R\,[a,b;c,d]$ облысында анықталған екі

айнымалының функциясы $f(x,y)$ берілсін. Егер біз екі айнымалының біреуіне, мәселен $y$-ке, $[c,d]$ аралығынан тұрақты мән берсек, онда $f(x,y)$ бір ғана айнымалының, тек $x$-тің ғана функциясы болған болар еді. Міне, осы функциядан $[a,b]$ аралығында интеграл алайық:

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

Әрине, бұл интегралдың мәні, $y$-ке қандай мән берілді соған тәуелді; былайша айтқанда, бұл интегралдың өзі $y$-тің $[c,d]$ аралығында анықталған функциясы болып табылады. Міне осы функцияны $[c,d]$ аралығында интегралдайтын болсақ, онда интегралдан интегралды тапқан боламыз:

$$\int_a^b\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

немесе

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx \tag{8}$$

(8) түрдегі интегралды қайталанған интеграл деп атайды.

Дәл осындай жолмен сол $f(x,y)$ функцияның өзінен мынадай

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dy \tag{9}$$

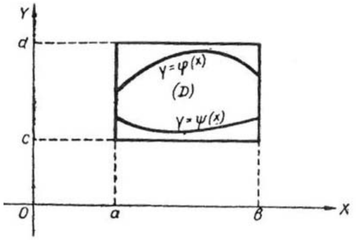
қайталанған интегралды құруға болады.

(8) және (9) қайталанған интегралдың бір-бірінен айырмасы интегралдау ретінде, мәселен, (8) интегралдың мәнін табу үшін алдымен ішкі интегралды

$$\int_a^b f(x,y)dx\ x$$

бойынша интегралдаймыз (мұнда $y$-ті тұрақты деп есептейміз), сонан кейін бұл интегралдаудан шыққан нәтижені $y$ бойынша $c$-ден $d$-ге дейін интегралдаймыз. (9) интегралда бұл амалды керісінше жасаймыз.

2. Енді функция $f(x,y)$ жоғарғы және төменгі жақтарынан $y=\varphi(x)$ және $y=\psi(x)$ теңдеулермен берілген қисықтармен, ал



120-чертеж

бүйір жақтарынан $x = a$ және $x = b\ (a < b)$ түзулермен қоршалынған облыста (120-чертеж) анықталсын. Бұл облысты бұрынғыша $(D)$ арқылы белгілейік.

Біз мұнда $a$ мен $b$-нің арасындағы барлық $x$-тер үшін $\varphi(x) \geq \psi(x)$ деп ұйғарамыз.

$[a, b]$ аралығынан $x$-ке бір тұрақты мән берейік, онда $f(x, y)$ тек $y$-тің ғана функциясы болып табылады. Нүкте $(x, y)$ $(D)$ облысының сыртына шығып кетпеуі керек, ол үшін аргумент $y$ мына теңсіздікті

$$\psi(x) \leq y \leq \varphi(x) \qquad (10)$$

қанағаттандыру керек. Сонымен, $f(x, y)$ тек $y$-тің ғана функциясы болып есептелгенде, оның анықталу облысы (10) аралық болады. Міне, осы функцияны (10) аралықта интегралдайық, сонда

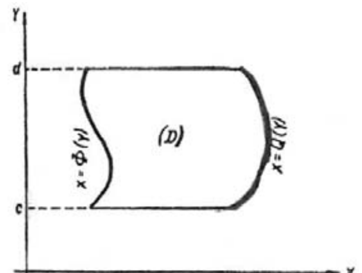
$$\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy.$$

Бұл интегралдаудың нәтижесі $x$-тің $[a, b]$ аралығында анықталған функциясы болып табылады. Енді осы функцияны $[a, b]$ аралығында интегралдасақ, онда төмендегі интегралға келеміз:

$$\int_{a}^{b} dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy. \qquad (11)$$

(11) интегралды да қайталанған интеграл деп атайды.

Жоғарғы және төменгі жақтарынан $y = d$ және $y = c$ түзулермен $(c < d)$ ал бүйір жақтарынан $x = \Phi$ (y) және $x = Q$ (y) қисықтармен қоршалынған облыс берілсін (121-чертеж) және бұл облыстың барлық нүктелерінде анықталған функция $f(x, y)$ берілсін. Мұнда біз $[c, b]$ аралығында барлық $y$-тер мына теңсіздік $\Phi(y) \leq Q(y)$ орындалады деп есептейміз.



121-чертеж

Мұндай облыс үшін де келесі түрдегі

$$\int_a^b dy \int_{\Phi(y)}^{Q(y)} f(x,y)\,dx. \qquad (12)$$

қайталанған интеграл ұғымын енгізуге болады.

Мұнда ең алдымен ішкі интегралды

$$\int_{\Phi(y)}^{Q} f(x,y)dx \;\; x$$

бойынша, онан кейін бұл интегралдан шыққан нәтижені с-ден $d$-ге дейін бойынша интегралдаймыз.

120 және 121-чертеждерде көрсетілген облыстардағы түзу сызықты кесінділер нүктеге айналып кетуі мүмкін. Мұндай жағдай облысты қоршап тұрған жоғарғы доға мен төменгі доғаның ортақ ұштары болғанда болады.

(11) формуладағы ішкі интеграл

$$\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy$$

$YOZ$ жазықтығына параллель жүргізілген жазықтықпен цилиндрлік денеден қиылатын қиманың ауданын береді.

## § 3. Қос интегралды есептеп шығару тәсілі

**1.** Екі айнымалының функциясы $f(x,y)$ тік төртұрыш $R\ [a,b;c,d]$ облысында берілсін.

$f(x,y)$ функцияның осы облыста алынған қос және қайталанған интегралдарын құрайық:

$$\iint\limits_{(R)} f(x,y)\,dp,$$

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

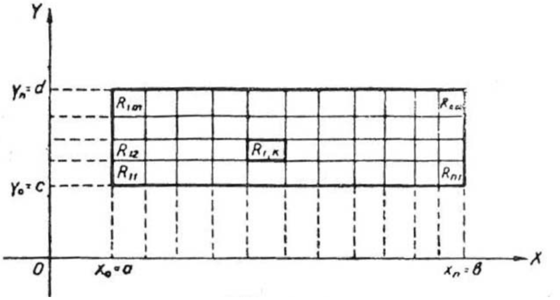
Тік төртбұрыш облыс бойынша алынған қос интегралды есептеп шығару тәсілі төмендегі теорема арқылы іс жүзіне асады.

**Теорема.** *Егер жоғарыдағы екі интеграл бар болатын болса, онда олар өзара бір-бірімен тең, яғни*

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dp = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy.$$

Бұл теореманы дәлелдеу үшін $[a,b]$ және $[c,d]$ аралықтарын мынадай тәртіппен

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$
$$a = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < x_n = d$$



122-чертеж

орналасқан нүктелермен бөлшек сегменттерге бөлеміз де, әрбір бөлуші нүкте арқылы $OX$ және $OY$ осьтеріне сәйкесті параллель жүргіземіз. Сонда облыс $R\ [a,b;c,d], nm$ бөлшек облыстарға (тік төртбұрыштарға) бөлінеді (122-чертеж).

Бұл бөлшек облыстарды былай белгілейік:

$$R_{i,k}[x_i, x_{i+1}; y_k, y_{k+1}] \ \begin{pmatrix} i = 0,1,2,\dots,n-1 \\ k = 0,1,2,\dots,m-1 \end{pmatrix}$$

$f(x,y)$ функцияның $R_{i,k}$ бөлшек облыстардағы дәл жоғарғы және дәл төменгі шекаралықтарын $M_{i,k}$ және $m_{i,k}$ арқылы белгілейік, яғни

$$M_{i,k} = \sup_{R_{i,k}} f(x,y), m_{i,k} = \underset{R_{i,k}}{in\,ff}\ (x,y) \ \begin{pmatrix} i = 0,1,2,\dots,n-1 \\ k = 0,1,2,\dots,m-1 \end{pmatrix}$$

Егер $[x_i, x_{i+1}]$ бөлшек сегменттен аргумент $x$-ке бір тұрақты мән берсек, онда $[y_{k,}\ y_{k+1}]$ бөлшек сегменттің бойында жатқан барлық $y$-тер үшін келесі теңсіздіктер.

$$m_{i,k} \le f(x,y) \le M_{i,k}$$

орындалуға тиіс.

Осы теңсіздікердің әр жағын $y$ бойынша $y_k, y_{k+1}$ аралығында интегралдасақ, сонда

$$m_{i,k}\Delta y_k \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x,y)dy \leq M_{i,k}\Delta y_k. \qquad (13)$$

(13) қос теңсіздік $k$-ның барлық мәндері үшін тек қана $x$ саны $x$ мен $x_{i+1}$-дің арасында жататын болса, дұрыс болады. Енді осы теңсіздіктердегі $k$ таңбасына *0*-ден бастап *m-1*-ге дейін мәндер беріп, шыққан нәтижелерді қоссақ, онда

$$\sum_{k=0}^{m-1} m_i, k\Delta y_k \leq \int_c^d f(x,y)dy \leq \sum_{k=0}^{m-1} M_i, \Delta y_k.$$

Кейінгі қос теңсіздік $[x_i, x_{i+1}]$ сегментте жатқан барлық $x$-тер үшін дұрыс. Енді осы теңсіздіктің барлық жағын $[x_i, x_{i+1}]$ аралығында интегралдаймыз. Сонда

$$\sum_{к=0}^{m-1} m_i, к\Delta y_к \Delta x_i \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int_c^d f(x,y)dy \leq \sum_{к=0}^{m-1} M_i, \Delta y_к \Delta x_i. \qquad (14)$$

(14) теңсіздіктер $i$ таңбасының барлық мәндері үшін дұрыс болады. Олай болса, $i$-ге 0-ден бастап $n-1$-ге дейін мән беріп, бұдан шыққан нәтижелерді қоссақ, онда

$$\sum_{к=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1} m_i, к\Delta y_к \Delta x_i \leq \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{к=0}^{m-1} M_i, к\Delta y_к \Delta x_i \qquad (15)$$

Мұнда көбейтінді $\Delta y_к \Delta x_i = (y_{к+1} - y_к)(x_{i+1} - x_i)$ бөлшек $R_{i.к}$тік төртбұрыштың ауданын береді. Сондықтан (15) теңсіздіктердің сол жағында және оң жағында тұрған мүшелері Дарбу қосындылары ($s$ және $S$) болып табылады. Ендеше (15) қос теңсіздікті былай жазуға болады:

$$s \leq \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dv \leq S. \qquad (16)$$

Егер барлық тік төртбұрыштардың диагональдарын (диаметрлерін) нольге ұмтылтсақ, онда қосындылар $s$ және $S$ ортақ шекке, яғни мына $\iint\limits_{(R)} f(x,y)dp$ қос интегралға ұмтылған болар еді. Бұл жағдай теореманың шартынан туады. Олай болса (16) теңсіздіктерден мына теңдік келіп шығады:

$$\iint\limits_{(R)} f(x,y)dp = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x,y)dy.$$

Міне, осы дәлелдеу керек еді.

Бұл дәлелденген теорема бойынша қос интегралды есептеп шығару мәселе қайталанған интегралды есептеп шығаруға тірелетін болады. Ал қайталанған интегралдың мәнін қалай табу керек, оны біз білеміз.

Тік төртбұрыш $R[a,b;c,d]$ бойынша алынған $\iint\limits_{(R)} f(x,y)dp$ қос интегралды мына түрдегі $\int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{a}^{b} f(x,y)dx\ x$ қайталанған интегралға келтіруге де болады.

Қос интегралды қайталанған интегралдардың біреуіне келтіру мәселесі осы интегралдардың өздері бар болатын болса ғана жүзеге асырылады. Қос интегралдың бар болу теоремасын біз жоғарыда тағайындадық. Егер интеграл таңбасы ішіндегі функция $f(x,y), R$ облысында үздіксіз болса, онда оның қос интегралы әрқашан да бар болады. Біз жоғарыда оны да тағайындадық.

Егер функция $f(x,y), [a,b;c,d]$ облысында үздіксіз болса, бұл функцияның қайталанған интегралдары $\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x,y)dy$ және $\int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{a}^{b} f(x,y)dx$ әрқашан да бар болады және бұлар тең болады.

Мұны мынадан байқауға болады: егер бірінші қайталанған интегралды алып қарасақ, оның ішкі интегралы $\int\limits_{c}^{d} f(x,y)dy$ параметр $x$-ке тәуелді және $x$-тің үздіксіз функциясы болып табылады. Олай болса, бұл үздіксіз функцияның $a$-дан $b$-ге дейін алынған анықталған интегралы әрқашан да бар болады.

Енді бір ескерте кететін мәселе мынау: қос интегралдағы интегралдау элементі $dp$-нің орнына мына $dx \cdot dy$ элементті аламыз, яғни $dp = dx \cdot dy$.

Сонымен,

$$\iint_{(R)} f(x,y)dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy. \qquad (17)$$

$R\ [a,b;c,d]$ облысына таралған қос интеграл

$$\iint_{(R)} f(x,y)dx\,dy$$

табаны тік төртбұрыш $(R)$ жоғарғы жағынан $z = f(x,y)$ теңдеумен берілген бетпен қоршалынған цилиндрлік дененің көлемін өрнектейді.

Енді (17) формуланы қалай пайдалану керек, соған бір мысал келтірейік.

Мысал. Мына $\iint_{(R)} \frac{ydx\cdot dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ қос интегралдың мәнін табу керек. (R) облысы – келесі $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ теңсіздіктермен сипатталынатын квадрат.

(17) формула бойынша

$$\iint_{(R)} \frac{ydxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \int_0^1 dx \int_0^1 (1+x^2+y^2)^{-3/2} ydy,$$

ішкі интегралды жеке алып қарайық:

$$\int_0^1 (1+x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} ydy = -\left[\frac{1}{1+x^2+y^2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}.$$

Бұдан кейін

$$\iint_{(R)} \frac{ydxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} =$$

$$= \ln(x+\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 - \ln\,(x+\sqrt{2+x^2}\Big|_0^1 = ln\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

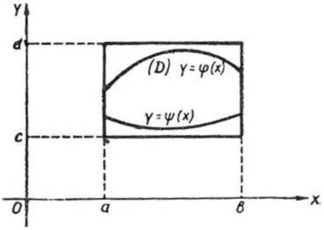
2. Функция $f(x,y)$ жоғарғы және төменгі жақтарынан $y=\varphi(x)$ және $y=\psi(x)$ қисықтармен, ал бүйір жақтарынан $x=a, x=b, (a<b)$ түзулермен қоршалынған $(D)$ облысында (120-чертеж) берілсін. Осы облыс бойына таралған $\iint_{(R)} f(x,y)\,dx\,dy$

қос интегралды қарайық. Мұнда біз $\varphi(x) > 0, \psi(x) > 0$ және $\varphi(x) \geq \psi(x)$ деп ұйғарамыз. Бұл қос интегралды есептеп шығару келесі теоремаға тіреледі.

**Теорема.** *Егер жинағы айтылған (D) облысында мына қос интеграл* $\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy$ *онымен бірге қайталанған интеграл* $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\Psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy$ *бар болатын болса, онда олар өзара бір-бірімен тең болады:*

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx - \int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (18)$$

Бұл теореманы дәлелдеу үшін (D) облысын тік төртбұрыш $R[a,b;c,d]$ ішіне енгіземіз (123-чертеж). Бұдан кейін көмекші $f^{\star}(x,y)$ функция құрамыз:



123-чертеж

$$f^{\star}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) \text{ егер нүктелер} \\ (x,y)\ (D)\text{облысына} \\ \text{жататын болса,} \\ 0, \text{егер нүктелер} \\ (x,y)\ D \text{ облысының} \\ \text{сыртында, бірақ тік} \end{cases}$$

төртбұрыштың ішінде жататын болса.

Осылай құрылған көмекші функция $f^{\star}(x,y)$ тік төртбұрыш $R[a,b;c,d]$ облысында анықталған.

Көмекші функцияның құрылуы бойынша

$$\iint\limits_{(D)} f^{\star}(x,y)dx\,dy = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy.$$

$$\iint\limits_{(D)} f^{\star}(x,y)dx\,dy = \iint\limits_{D} f^{\star}(x,y)\,dx\,dy +$$

$$+ \iint\limits_{(R)-(D)} f^{\star}(x,y)dx\,dy = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (19)$$

өйткені

$$\iint\limits_{(R)-(D)} f^*(x,y)dx\,dy = 0.$$

Екінші жағынан

$$\iint\limits_{(R)} f^*(x,y)dx\,dy = \int\limits_a^b dx - \int\limits_c^d f^*(x,y)\,dy. \qquad (20)$$

Кейінгі теңдіктің оң жағында тұрған қайталанған интегралдағы ішкі интегралды жеке алайық:

$$\int\limits_c^b f^*(x,y)\,dy = \int\limits_c^{\psi(x)} f^*(x,y)\,dy + \int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f^*(x,y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\varphi(x)}^{d} f^*(x,y)dy. \qquad (21)$$

$x = c$ түзу мен $y = \psi(x)$ доғаның арасындағы нүктелерде $f^*(x,y) = 0, y = \psi(x)$ доға мен $y = \varphi(x)$ доғаның арасында жатқан $(x,y)$ нүктелер үшін $f^*(x,y) = f(x,y)$ ал $y = \varphi(x)$ қисықпен $y = d$ түзудің арасында жатқан нүктелер үшін $f^*(x,y) = 0$. Олай болса, (21) теңдік мына түрге көшеді:

$$\int\limits_c^d f^*(x,y)dy = \int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy.$$

Демек, енді (20) теңдік мына түрге көшеді:

$$\iint\limits_{(R)} f^*(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy. \qquad (22)$$

(19) теңдікпен (22) теңдікті бір-бірімен салыстырып табамыз:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy. \qquad (18)$$

Сонымен, теорема дәлелденді.

Сөйтіп, 120-чертежде көрсетілген облыстың бойына таралған

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$$

қос интегралды табу мына түрдегі

$$\iint_{a}^{b} dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)dy$$

қайталанған интегралды есептеп шығаруға тірелетін болды.

Егер функция f(x,y) әңгіме болып отырған (D) облысында үздіксіз болса, онда (18) теңдіктің оң жағында тұрған қайталанған интеграл бар болады, себебі ондағы ішкі интеграл параметр x-тің үздіксіз функцияы болып табылады[1].

Егер функция *f(x,y)* 121-чертежде көрсетілген облыста берілсе, онда осы облыс бойынша алынған қос интеграл $\iint f(x,y)dx\,dy$ тең болады:

$$\iint_{(D)} f(x,y)dx\,dy = \int_{c}^{d} dy \int_{\Phi(y)}^{Q(y)} f(x,y)dx. \qquad (23)$$

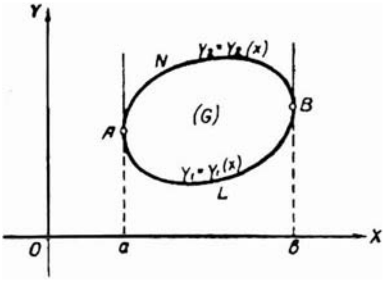
Әрине, бұл теңдіктің екі жағында тұрған интегралдар бар болатын болса.

3. Функция *f(x,y)* координаталар осьтеріне параллель түзулер тек екі-ақ (одан артық емес) нүктеде қилысатын тұйық қисықпен (контурмен (қоршалған (G) облысында берілсін (124-чертеж).

Осы облыстың бойымен алынған *f(x,y)* функцияның қос интегралын

$$\iint_{(D)} f(x,y)dx\,dy$$

қарайық.



124-чертеж

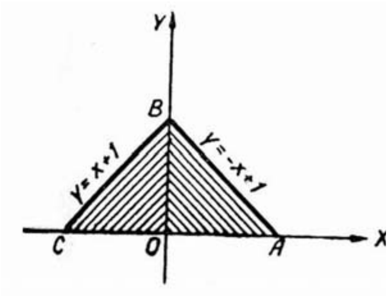
*OX* осіне *OУ* осіне параллель етіп облысты қоршап контурға жанамалар жүргіземіз. *OX* осіне параллель жанамалардың біреуінің абсциссасы *a*, екіншісінің абсциссасы *b* болсын *(a<b)*. Жүргізілген осы жанамалар контурды екіге бөледі: төменгі доға *ALB*, үстіңгі доға *ANB*. Төменгі *ALB* доғаның кез келген ординатасы $y_1=y_1(x)$ болсын, ал үстіңгі *ANB* доғаның кез келген ординатасы $y_2=y_2(x)$. Сонымен, біз контурамен қоршалған *(G)* облысын 2-пункттегі қарастырылған облысқа келтірдік.

---

[1] Бұл жөнінде анықталған интегралдар теориясына арналған тарауды қараңыз.

Сондықтан

$$\iint\limits_{(G)} f(x,y)dx\,dy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (24)$$



125-чертеж

Егер интегралдау облысы координаталар осьтеріне параллель түзулер мен саны екіден артық нүктелерде қилысатын болса, онда мұндай облысты бірнеше бөлікке бөлеміз. Әрбір бөлікті қоршап тұрған контур координаталар осьтеріне параллель түзулермен екі-ақ нүктеде қилысатын болуы керек. Бұдан кейін сол бөліктер бойынша алынған қос интегралдардың барлығын қосып, бастапқы берілген облыс бойынша алынған қос интегралдың мәнін табамыз.

Енді бірнеше мысалдар келтірейік.

1-мысал. Мына

$$\iint\limits_{(D)} (x^2+y^2)dxdy$$

қос интегралды есептеп шығару керек. Мұнда интегралдау облысы (D) келесі $y=0, y=-x+1, y=x+1$ түзулермен қоршалынған үшбұрыш (125- чертёж).

Үшбұрыштың бүйір қабырғаларының теңдеулерін $x$ бойынша шешіп, интегралдау облысын төмендегі теңсіздіктер

$$y-1 \le x \le -y+1; 0 \le y \le 1$$

түрінде құрамыз.

Енді (23) формуланы қолданамыз, сонда

$$\iint\limits_{(D)} (x^2+y^2)dx\,dy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y-1}^{-y+1} (x^2+y^2)dx.$$

Ішкі интегралды жеке алайық:

$$\int\limits_{y-1}^{-y+1} (x^2+y^2)dx = \frac{x^3}{3} + xy^2 \Big|_{y-1}^{-y+1} = -\frac{2}{3}(y-1)^3 - 2y^3 + 2y.$$

Бұдан кейін

$$\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)dxdy=-\frac{2}{3}\int\limits_0^1(y-1)^3\,dy-2\int\limits_0^1 y^3dy+2\int\limits_0^1 y^2dy=$$

$$=-\frac{2}{12}(y-1)^4\Bigg|_0^1-\frac{1}{2}y^4\Bigg|_0^1+\frac{3}{2}y^3\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}.$$

Енді осы интегралдың, интегралдау ретін өзгертейік. Ол үшін алдымен интегралдау облысын тағайындайық.

Үшбұрышты үстіңгі жағынан қоршап тұрған сынық сызық мынадай түрлі екі теңдеумен

$$y=x+1, \text{(егер } -1\leq x\leq 0)$$
$$y=-x+1, \text{(егер } 0\leq x\leq 1)$$

берілген.

Бұл сынық сызықтың, яғни мына $y=1-|x|$ функцияның, анықталу облысы: $-1\leq x\leq 1$.

Сонымен, интегралдау облысы (D) екі үшбұрыштан тұрады: $\Delta AOB$ және $\Delta OBC$. Олай болса

$$\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)dx\,dy=\iint\limits_{\Delta AOB}(x^2+y^2)dx\,dy+\iint\limits_{\Delta OBC}(x^2+y^2)dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_0^{x+1}(x^2+y^2)dy+\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(x^2+y^2)dy=$$

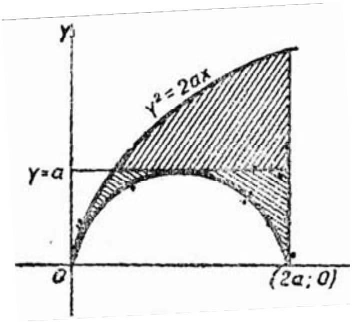
$$=\int\limits_{-1}^{0}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{x+1}dx+\int\limits_0^1\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{0}\left[x^3+x^2+\frac{(x+1)^3}{3}\right]dx+\int\limits_0^1\left[-x^3+x^2+\frac{(1-x)^3}{3}\right]dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{(x+1)^4}{12}\right]_{-0}^{1}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{(1-x)^4}{12}\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

*2-мысал.* Мына

$$\iint\limits_{(D)}f(x,y)dxdy$$



126-чертеж

қос интегралды қайталанған интегралға келтіру керек. Мұнда интегралдау облысы (D) төмендегі қисықтармен $y^2 = 2ax$, $y = \sqrt{2ax - x^2}$ қоршалынған фигура.

Бұл облыс жоғарғы жағынан $y^2=2ax$ параболамен, төменгі жағынан $x^2+y^2=2ax$ шеңбердің жоғарғы жартысымен және оң жағынан $x=2a$ түзумен қоршалынған (126-чертёж).

Олай болса,

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dx\,dy = \int\limits_{0}^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy.$$

Енді интегралдау ретін өзгертейік. Ол үшін интегралдау облысын үш бөлікке бөлеміз:

$$\frac{y^2}{2a} \leq x \leq a\sqrt{a^2 - y^2}, 0 \leq y \leq 2a,$$

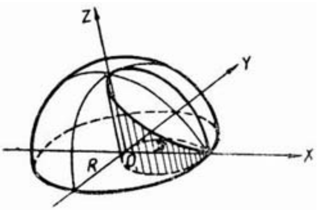
$$\frac{y^2}{2a} \leq x \leq 2a,\ \ 0 \leq y \leq 2a.$$

$$a + \sqrt{a^2 - y_2} \leq x \leq 2a,\ \ 0 \leq y \leq a.$$

Енді

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dx\,dy = \int\limits_{0}^{a} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx +$$

$$+\int\limits_{0}^{2a} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{a} dy \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx.$$



127-чертеж

*3-мысал.* Берілген $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сферадан $x^2 + y^2 = Rx$ цилиндрмен кесілген дененің көлемін табу керек (127-чертёж).

Бұл есепті Вивиани есебі деп атайды.

Дененің бірінші октантта ғана жатқан бөлігін қарайық, былайша айтқанда, іздеп отырған көлемнің төрттен бірін ғана табайық.

(2) формула бойынша дененің көлемі төмендегі формуламен

$$v=\iint\limits_{(D)} f(x,y)dx\,dy=\iint\limits_{(D)} z\,dx\,dy$$

табылады.

Ізделініп отырған көлем

$$v=4\iint\limits_{(D)}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dx\,dy.$$

Мұнда интегралдау облысы *(D)* мына сызықтармен $y$=0, $x^2+y^2=Rx$ қоршалынған жарты дөңгелек. Енді алдымыздағы қос интегралды (18) формула бойынша қайталанған интегралға келтіреміз:

$$v=4\int_0^R dx\int^{\sqrt{Rx-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dy.$$

Ішкі интегралды жеке алайық:

$$\int_0^{\sqrt{Rx-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dy=\frac{R^2-x^2}{2}arc\sin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}+$$

$$+\frac{y}{2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\Big|_0^{\sqrt{Rx-x^2}}=\frac{R^2-x^2}{2}\arcsin\sqrt{\frac{x}{R+x}}+$$

$$+\frac{\sqrt{Rx-x^2}}{2}\sqrt{R^2-Rx}.$$

Кейінгі теңдіктің оң жағында тұрған екінші интегралды жеке алып интегралдайық:

$$\int_0^R(R-x)\sqrt{x}\,dx=\left(\frac{2}{3}Rx^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^R=\frac{14}{15}R^{\frac{5}{2}}.$$

Енді

$$v=2\int_0^R(R^2-x^2)arc\sin\sqrt{\frac{x}{R+x}}dx+\frac{8R^3}{15}.$$

Кейінгі интегралды есептеп шығару үшін бөлімшелеп интегралдау формуласын қолданамыз:

$$\int_0^R (R^2 - x^2) arc\sin\sqrt{\frac{x}{R+x}}dx = \left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right) arc\sin\sqrt{\frac{x}{R+x}}\ \Big|_0^R -$$

$$-\int_0^R \frac{\sqrt{R}}{2}\cdot\frac{3R^2x - x^3}{3\sqrt{x}(R+x)}dx = \frac{2}{3}R^3\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{R}}{6}\int_0^R \frac{3R^2\sqrt{x} - x^{\frac{5}{3}}}{R+x}dx.$$

Сонымен,

$$v = \frac{\pi R^3}{3} - \frac{\sqrt{R}}{3}\int_0^R \frac{3R^2\sqrt{x} - x^2\sqrt{x}}{R+x}dx + \frac{8R^3}{15}.$$

Кейінгі интегралға мынадай $x = Rt^2$ ауыстыру жасап келесі нәтижені табамыз:

$$v = \frac{2\pi R^3}{3} - \frac{8}{9}R^3.$$

*4-мысал.* $y^2 + z^2 = 4ax$ айналу параболоидынан $x^2 + y^2 = 2ax$ цилиндрмен кесілген дененің көлемін табу керек.

$$v = \iint_{(D)} zdx\,dy = \iint_{(D)} \sqrt{4ax - y^2}dx\,dy$$

Интегралдау облысы *(D)* мына сызықтармен $y = 0, x^2 + y^2 = 2ax$ қоршалған жарты дөңгелек. Көлемнің төрттен бірін іздейік. Сонда толық көлем

$$v = 4\iint_{(D)} \sqrt{4ax - y^2}dx\,dy = 4\int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} \sqrt{4ax - y^2}dy.$$

Ішкі интегралды жеке алайық:

$$\int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} \sqrt{4ax - y^2}dy = \left(\frac{4ax}{2} arc\sin\frac{y}{\sqrt{4ax}} + \right.$$

$$\left. + \frac{y}{2}\sqrt{4ax - y^2}\right) \Big|_0^{\sqrt{2ax - x^2}} = 2ax\, arc\sin\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{4a}} + \frac{x}{2}\sqrt{4a^2 - x^2}$$

$$v = 8a\int_0^{2a} x\, arc\sin\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{4a}}dx + 2\int_0^{2a} x\sqrt{4a^2 - x^2}dx =$$

$$= a^3\left(2\pi + \frac{16}{3}\right).$$

## §4. Грин формуласы

1. Кисық сызықты интеграл мен қос интегралдың арасында тиісті байланыс бар. Бұл параграфтағы біздің мақсатымыз осы байланысты табу.

Контуры *ОУ* осіне параллель түзулер екі-ақ қана (одан артық емес) нүктеде қиятын (D) облысын қарайық және бұл облыстың контурын (C) деп белгілейік. Айтылып отырған контур (C) төмендегі теңдеулермен

$$x = a, \qquad x = b, \qquad y = \varphi(x), \qquad y = \psi(x),$$

(мұнда $a < b$; $\varphi(x) \geq \psi(x)$)
кескінделсін (120-чертёж).

Осы *(D)* облысында анықталған *P(x,y)* функциясы берілсін. Бұл функция турасында мынадай ұйғару жасаймыз: функцияның өзі, онымен бірге оның $y$ бойынша алынған дербес туындысы $\frac{\partial P}{\partial y}$ осы *(D)* облысында үздіксіз. Олай болса, мына қос интеграл

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy$$

бар болады. Осы интегралдың мәнін іздейік:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b [P(x,y)] \Bigg| \begin{matrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{matrix}\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b [P(x,\varphi(x)] - P(x,\psi(x)]\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b P[x,\varphi(x)]dx - \int\limits_a^b P[x,\psi(x)]dx. \qquad (25)$$

(25) теңдіктің оң жағында тұрған бірінші анықталған интегралды $y = \varphi(x)$ қисықтың бойымен, ал екінші анықталған интегралды $y = \psi(x)$ қисықтың бойымен алынған II-типті қисық сызықты интеграл деп қарауға болады. Олай болса,

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int\limits_{(DC)} P(x,y)dx - \int\limits_{(AB)} P(x,y)dx =$$

$$= \int\limits_{(DC)} P(x,y)dx + \int\limits_{(BA)} P(x,y)dx.$$

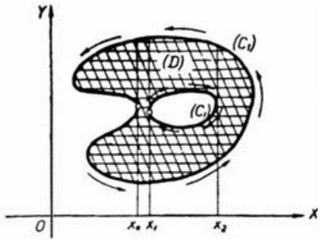
Егер кейінгі теңдіктің оң жағына *(AD)* және *(CB)* кесінділер бойымен алынған *P(x,y)*-тің қисық сызықты интегралын қоссақ, одан теңдік өзгермейді, өйткені жаңағы кесінділер *OX* осіне перпендикуляр. Сондықтан

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int\limits_{(AD)} P(x,y)dx + \int\limits_{(DC)} P(x,y)dx +$$

$$+ \int\limits_{(CB)} P(x,y)dx + \int\limits_{(BA)} P(x,y)dx = \int\limits_{(ADCBA)} P(x,y)dx.$$

Дұрыстап көңіл жіберіп қарасақ, кейінгі теңдіктің оң жағы *P(x,y)* функцияның контур (C) бойынша алынған қисық сызықты интегралы. Бірақ бұл интеграл теріс бағытта алынған. Сондықтан

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = - \int\limits_{(CD)} P(x,y)dx \qquad (26)$$



128-чертеж

Біз бұл формуланы сол бағыттағы (ориентациядағы) координаталар осьтерінде қорытып шығардық.

Формула оң бағыттағы (ориентациядағы) координаталар осьтері үшін де дұрыс болатындығына көз жеткізу қиын емес (мұның дұрыстығын көрсету оқушылардың өздерінің де қолдарынан келеді). Тағы да бір ескерте кететін мәселе мынау: (26) формула қарастырған облыстан да гөрі күрделі түрдегі облыс үшін де дұрыс болады. Айталық, қарастырып отырған функция *P(x,y)* 128-чертёжде көрсетілген облыста анықталсын. Бұл облыстың контуры деп біз оны сырттан және іштен қоршап тұрған тұйық ($C_1$) және ($C_2$) сызықтардың жиынын түсінеміз: $(C) = (C_1) + (C_2)$.

Мұнда және былай: ($C_1$) қисық бойынша оң бағыт үшін сағат тіліне (стрелкасына) қарсы бағытты, ал ($C_2$) қисықтағы оң бағыт үшін сағат стрелкасының бағытына қарайғы бағытты аламыз. Тек осы жағдайда ғана жанағы екі қисықпен қоршалып тұрған облыс (D) бақылаушы үшін сол жақта қалып қойып отырады.

*ОУ* осіне параллель түзулер жүргізіп, біз күрделі облысты бұрынғы қарастырған қарапайым түрге келтіреміз. Біздің чертёжде облыс бірнеше бөлікке бөлініп тұр. Мына

$$\iint \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy$$

қос интегралды барлық бөліктерге таратып сонан кейін олардың бәрін қоссақ, онда (26) формуланың сол жағында тұрған бүкіл (D) облысы бойынша қос интеграл

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy$$

шыққан болар еді. *ОУ* осіне бағанағы параллель етіп жүргізген түзулер бойынша алынған мына $\int P(x, y)dx$ қисық сызықты интегралдың мәндері нольге тең болады, сондықтан (26) теңдіктің оң жағында тұрған, $(c)=(c_1)+(c_2)$ контур бойынша алынған қисық сызықты интеграл

$$\int\limits_{(C)} P(x, y)dx$$

келіп шығады. Олай болса, мұндай облыс үшін де (26) формула дұрыс болады екен.

121-чертёжде көрсетілген *(D)* облысында анықталған *Q(x,y)* функциясы берілсін. Бұл облыста *Q(x,y)* функцияның өзі және оның *x* бойынша алынған дербес туындысы $\frac{\partial Q}{\partial x}$ үздіксіз болсын. Онда бұл облыс үшін төмендегі формуланың

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int\limits_{(C)} Q(x, y)dy \qquad (27)$$

дұрыстығын дәлелдеуге болады.

(26) формуланың дұрыстығын қалай дәлелдесек, (27) формула да солай дәлелденеді.

Егер облыс 121-чертёжде көрсетілген облыстан гөрі күрделірек болса, мәселен, ол бірнеше саны шекті қисықтармен қоршалынған болса, онда да (27) формула дұрыс болады.

Енді осы айтылған шарттарды қанағаттандыратын айтылып отырған (D) облысында анықталған екі *P(x,y)* және *Q(x,y)* функциялар берілсін. Бұл облыста функциялардың өздерімен бірге сәйкес дербес туындылары $\frac{\partial P}{\partial y}$ және $\frac{\partial Q}{\partial x}$ үздіксіз деп ұйғарсақ, (26) формуламен (27) формула орындалады.

(27) формуладан (26) формуланы алып мынаны табамыз:

$$\int\limits_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,fy. \qquad (28)$$

Осы қорытылып шыққан (28) формуланы Грин формуласы деп атайды.

## § 5. Қисық сызықты интегралдың интегралдау қисығына тәуелсіздігі

1. Қисық сызықты интеграл үшін қандай жағдайда интегралдау қисығының түрі (формасы) әсер етпейді. Міне, біздің ендігі мақсатымыз осыны зерттеу.

Тұйық контурмен қоршалынған (D) облысы берілсін. Осы облыста анықталған *P(x, y)* және *Q(x, y)* функцияларын қарайық. (D) облысының ішінде жатқан кез келген екі *A* және *B* нүктелерін, облыстың сыртына шығып кетпейтін кез келген *(K₁)* қисықтың бойына таралған төмендегі қисық сызықты интегралды

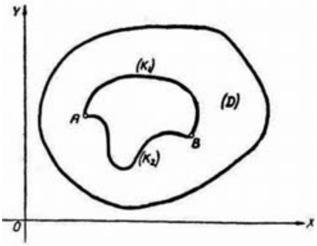
$$\int\limits_{(K_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (29)$$

қарайық (129-чертёж).

Бұл екі нүктені бір-бірімен басқа бір кез келген *(K₂)* қисықпен қосып, мына

$$\int_{(K_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (30)$$

қисық сызықты интегралды да қарауға болады.



129-чертеж

Осы екі қисық сызықты интеграл бір-бірімен тең болу үшін функциялар *P(x,y)* және *Q(x,y)* қандай шарттарды қанағаттандыруы керек деген сұрақ туады.

Егер (29) және (30) интегралдар бір-біріне тең болса, онда қисық сызықты интеграл

$$\int\limits_{(K)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

интегралдау *(K)* қисығының түріне (формасына) тәуелді емес дейді.

Жаңағы осының алдында қойылған сұрақтың орнына мынадай сұрақты қоюға болады.

*(D)* облысының ішінде жатқан кез келген тұйық (С) контурдың бойымен алынған қисық сызықты интеграл

$$\int_{(c)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

нольге тең болу үшін функциялар *P(x, y)* және *Q(x, y)* қандай шарттарды қанағаттандыруы керек?

Енді осы қойылған екі сұрақтың парапарлығын дәлелдейік.

Айталық,

$$\int_{(c)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (31)$$

мұнда (С) − (D) облысының ішінде жатқан кез келген тұйық контур.

(D) облысының ішінде жатқан екі *A* мен *B* нүктелерін алып, оларды *(K₁)* және *(K₂)* қисықтармен біріктірейік (129-чертёж). Бұл екі қисықтың өзара ортақ нүктелері жоқ. Осы екі қисық *(AK₁BK₂ A)* контурын құрады. Қойылған шарт бойынша:

$$\int_{(AK_1BK_2A)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

немесе

$$\int_{(K_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{(K_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \qquad (32)$$

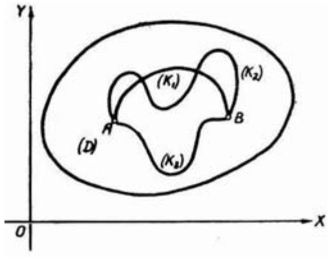
(K₂) қисықтың бағыты В-ден А-ға қарай алынған.

(32) теңдіктен мына теңдік келіп шығады:

$$\int_{(K_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(K_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (33)$$

(33) теңдіктің орындалуы қисық сызықты интегралдың интегралдау қисығының түріне тәуелсіздігін көрсетеді.

Егер *A* нүктесі мен *B* нүктесінің арасында қисықтар *(K₁)* және *(K₂)* өзара бірнеше нүктелерде қиылысса (130-чертёж), онда да бәрібір (32)



130-чертеж

теңдік орындалады. Мұны былай дәлелдеуге болады: *A* нүктесі мен *B* нүктесін, *(K$_1$)* және *(K$_2$)* қиықтармен қиылыспайтын үшінші *(K$_3$)* қисықпен біріктіреміз. Сонда

$$\int_{(K_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(K_3)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

$$\int_{(K_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(K_3)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Бұл арадан

$$\int_{(K_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(K_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Егер (33) теңдік орындалса, онда бәрібір (32) теңдік орындалады, ал (32) теңдіктің орындалуынан (31) теңдік орындалады.

Сонымен, бағанағы қойылған екі сұрақтың бір-біріне парапарлығы дәлелденді.

Енді осы сұрақтарға жауап іздейік.

*(D)* облысының ішінде толығымен жатқан тұйық *(C)* контурын қарайық және осы контурмен қоршалынған облысты *(G)* арқылы белгілейік. Сонда Грин формуласы бойынша

$$\int_{(c)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{(G)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Егер (C) контурдың бойымен алынған қисық сызықты интеграл нольге тең болса, яғни

$$\int_{(c)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \qquad (34)$$

онда

$$\iint_{(G)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = 0. \qquad (35)$$

Егер (G) облысының барлық нүктелерінде мына шарт

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (36)$$

орындалса, онда (35) теңдік орындалады.

Егер $D$ облысының барлық нүктелерінде (36) шарт орындалса, онда ($G$) облысы қандай болса да (35) теңдік орындалады. Демек, контур (С) қандай болса да (34) теңдік орындалады.

Сонымен, қисық сызықты интеграл, интегралдау қисығының түріне тәуелсіз болып, тек қисықтың ұштарының координаталарына ғана тәуелді болу үшін (36) шарт орындалу керек. Ол үшін бұл шарттың жеткіліктілігін біз дәлелдедік. Енді осы шарттың қажеттілігін дәлелдейік.

Қарастырып отырған облыстың бір ($x_o$, $y_o$) нүктесінде (36) шарт орындалмасын, яғни бұл нүктеде мына айырма

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=q(x,y)$$

нольден айрықша болсын, мәселен оң болсын. Енді $(x_o,\ y_o)$ нүктесін центрі үшін алып радиусы $\delta$-ға тең облыстың ішінде жататын дөңгелек құрайық, бұл дөңгелектің өзін (σ), ал оның шеңберін (γ) арқылы белгілейік.

Туындылар $\frac{\partial P}{\partial y}$ және $\frac{\partial Q}{\partial x}$ үздіксіз болғандықтан, жаңағы айтылып отырған айырма немесе бәрібір мына функция $g(x,\ y)$ құрылған (σ) дөңгелекте оң болады.

Функцияның осы дәңгелектің бойымен қос интегралын қарайық:

$$\iint\limits_{(\sigma)} q(x,y)dxdy=\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy \qquad (37)$$

(37) теңдіктің сол жағында тұрған қос интегралға, оның орта мәні турасындағы теореманы қолданып, мына теңдікті табамыз:

$$\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=q(\bar{x},\bar{y})\,\pi\delta^2>0, \qquad (38)$$

мұнда $(\bar{x},\bar{y})$ құрылған (σ) дөңгелектің бір тиісті нүктесі.

Кейінгі (38) теңсіздіктің орындалуы (35) теңдіктің орындалуына қайшы келеді. Бұл қайшылық (36) шарт орындалмасын деген ұйғарудың дұрыс емес екендігін көрсетеді.

(σ) дөңгелек үшін Грин формуласын құрайық.

$$\int\limits_{(\gamma)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

(38) теңсіздікті еске алсақ, онда

$$\int_{(\gamma)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy > f(\bar{x},\bar{y})\pi\delta^2.$$

Бұл арадан мынадай қорытындыға келеміз: кез келген тұйық сызықтың бойымен алынған қисық сызықты интеграл нольге тең бола бермейді. Сонымен, егер (36) шарт орындалса, онда ең болмағанда бір тұйық сызық табылып, осы тұйық сызықтың бойымен алынған қисық сызықты интеграл нольден айрықша болады,

Сөйтіп, (*AB)* доғасының бойымен алынған қисық сызықты интеграл

$$\int_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

өзінің интегралдау қисығына тәуелді болмай, тек *A* мен *B* нүктелерінің координаталарына ғана тәуелді болу үшін (36) шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті.

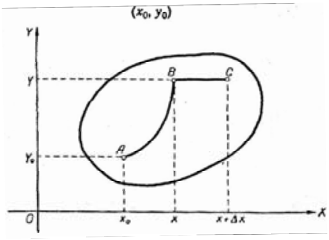
Енді $A(x_0,y_0)$ нүктесі берілген болсын, ал $B(x,y)$ нүктесі айнымалы (жылжымалы) болсын, онда жаңағы *(AB)* доғасының бойымен алынған қисық сызықты интегралды $B(x,y)$ нүктесінің функциясы деп қараймыз:

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(x,y).$$

Енді осы функцияның қасиеттерін зерттейік. Ол үшін осы функциядағы $y$-ті тұрақты деп қарап, $x$-ке өсімше берейік, онда

$$u = (x + \Delta x, y) - u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy -$$

$$- \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (39)$$



131-чертеж

Қисық сызықты интегралдың мәні интегралдау қисығына тәуелсіз болғандықтан, (39) теңдіктің оң жағында тұрған бірінші интегралды қандай қисықтың бойымен интегралдасақ та бәрібір. Міне, осыны еске алып жаңағы айтылып отырған интегралды *A* мен *B* нүктесін біріктіретін бұрынғы *AB* доғасынан және *OX* осіне параллель *BC* кесіндісінен тұратын сызықтың бойымен алайық (131-чертёж).

Сонда *AB* доғасы бойынша алынған интегралдар бір-бірімен жойылып кетеді де, тек *BC* бойынша алынған интеграл қалып қояды. Сонымен,

$$u(x+\Delta x, y) - u(x,y) = \int\limits_{(BC)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{(BC)} P(x,y)dx + \int\limits_{(BC)} Q(x,y)dy.$$

Кесінді *(ВС), ОУ* осіне параллель болғандықтан,

$$\int\limits_{(BC)} Q(x,y)dy = 0,$$

олай болса,

$$u(x+\Delta x, y) - u(x,y) = \int\limits_{(BC)} P(x,y)dx = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx.$$

Орта мән жөніндегі теореманы қолданып мына теңдікті табамыз:

$$u(x+\Delta x, y) - u(x,y) = P(x+\theta\Delta x, y)\Delta x,$$

мұнда $0 < \theta < 1$ бұл арадан

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} P(x+\Theta\Delta x, y) = P(x,y),$$

немесе

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y). \qquad (40)$$

Дәл осы жолмен келесі теңдікті

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \qquad (41)$$

тағайындауға болады.

(40) және (41) теңдіктерден мынадай қорытындыға келеміз:

$$du = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Сонымен, егер (36) шарт орындалса, онда интеграл таңбасы астында тұрған мына өрнек $P(x, y)\ dx + Q(x, y)\ dy,\ u(x, y)$ функцияның толық дифференциалы болатын болды.

2. АВ доғасының бойымен алынған қисық сызықты интеграл

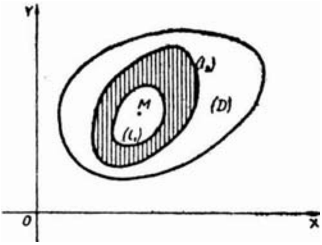
$$\int\limits_{(AB)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

осы доғаның түріне тәуелді болмай, тек оның ұштарының координаталарына ғана тәуелді болу үшін (36) шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті екенін біз дәлелдедік. Егер көңіл жіберіп байқасақ, бұл дәлелдеу келесі жағдайларға негізделген: а) *P(x, y)* және *(Q)(x, y)* функциялардың өздері және олардың туындылары $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ қарастырып отырған облыста үздіксіз: б) егер осы қарастырып отырған *(D)* облысының ішіне бір тұйық контур *(l)* сызылса, сол контурдың ішінде жатқан аудан түгелімен (36) шарт орындалатын облыстың ішінде жатуы керек. Кейінгі пікірді мына түрде де айтуға болады: облыстың ішіне сызылған әрбір тұйық контурды осы облыстың сыртына шықпай үздіксіз тарылту жолымен нүктеге айналдыруға болады немесе бәрібір облыстың жыртық-тесігі жоқ, ол тұтас жатқан фигура деп қарауға болады.

Қарастырылып отырған *(D)* облысының ішінде жатқан бір *M* нүктесінде (36) шарт орындалмайтын болсын. Онда *(D)* облысының ішінде жатқан және *M* нүктесін қамтымайтын әрбір контурының бойымен алынған қисық сызықты интеграл

$$\int\limits_{(l)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \qquad (42)$$

нольге тең болатыны мәлім. Егер нүкте *M* осы (*l)* контурдың ішінде жатса, онда (42) интегралдың нольге тең болмауы мүмкін.



132-чертеж

$M$ нүктесін қоршап тұрған түрлі тұйық контурдың бойымен алынған қисық сызықты интегралдар өзара тең болады.

Бұл ойды дәлелдеу үшін бір-бірімен қиылыспайтын $M$ нүктесін қоршап тұрған екі *$(l_1)$* және *$(l_2)$* контурларын қарайық (132-чертёж). Бұл екі контурдың арасындағы фигура күрделі облыс болып табылады және осы облыстың барлық нүктелерінде (36) шарт орындалады. Олай болса,

$$\int\limits_{(l_1-)+(l_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

мұнда $(\overline{l_1})$ сағат стрелкасы бағыты бойынша алынған бағытты көрсетеді.

Бұл арадан

$$\int\limits_{(l_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{(l_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

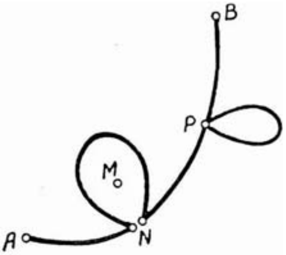
Міне, бізге осыны тағайындау керек еді.

(36) шарт орындалмайтын нүктені ерекше нүкте деп атайық.

*$A(x_0,y_0)$* және *$B(x, y)$* − кез келген нүктелер. Осы екі нүктені өзімен-өзі қилыспайтын ерекше $M$ нүктені басып өтпейтін *(AB)* доғасымен біріктірейік. Сонымен, ерекше нүкте *M, (AB)* доғасының сыртында жатады. Осы доғаның бойымен алынған

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

қисық сызықты интегралдың тиісті мәні болады. Енді жаңағы ($AB$) доғасына ілмек қосып, интегралдау қисықты түрлендірейік (133-чертёж).



133-чертеж

Егер ілмектің ішінде ерекше нүкте $M$ болмаса (мәселен, 133-чертёждегі $P$ нүктесіндегі ілмек сияқты), онда ($AB$) қисықтың бойымен алынған интегралдың мәні ілмекті қосқаннан ешбір өзгермейді. Егер ілмектің ішінде ерекше нүкте $M$ жатса (мәселен, 133-чертёжде көрсетілген *N* нүктесіндегі ілмек сияқты), онда (*AB)* доғасының бойымен алынған қисық сызықты интегралдың мәні басқаша болады. Және мұнда былай: егер біз ерекше *M* нүктені қоршап тұрған тұйық (С) контурдың оң бағыты бойынша алынған мына

$$\int_{(C)} (x,y)dx+Q(x,y)dy$$

қисық сызықты интегралдың мәнін $\omega$ арқылы белгілесек, онда *(AB)* доғасы бойымен алынған

$$\int_{(AB)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

интегралдың мәніне не $\omega$ саны қосылады, не одан ол алынады (бұл $\omega$ санының таңбасына байланысты).

Сонымен,

$$\int_{(AB)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

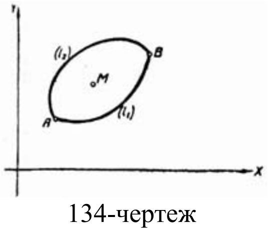
қисық сызықты интегалдың мәні *(AB)* қандай қисық екеніне тәуелді болатын болды.

*A,B* нүктелерін екі *(l₁)* және *(l₂)* доғалармен қосайық. Ерекше нүкте *M* осы екі қисықпен қоршалынған облыстың ішінде жататын болсын (134-чертёж). Онда

$$\int_{(l_1)+(l-_2)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\infty,$$

немесе

$$\int_{(l_1)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{(l_2)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+\omega.$$



134-чертеж

Бұл арадан мынадай қорытындыға келеміз: егер бір тиянақты *(AB)* қисығын сайлап алып, осы қисықтың бойымен алынған интегралдың мәнін *I* арқылы белгілесек, онда сол *A* мен *B* нүктелерін біріктіретін басқа бір *(k)* қисықтың бойымен алынған интегралдың мәні

$$\int_{(k)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = J + n\omega, \text{болады,}$$

мұнда $n -$ анықталмаған бүтін коэффициент (оң да, теріс те және ноль де болуы мүмкін). Және осы жағдайда мына интегралмен

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

өрнектелетін функция *(D)* облысының *$(x_0, y_0)$* нүктесінен басқа нүктелерінің барлығында анықталған, үздіксіз, дифференциалданатын функция болып табылады, бірақ көп мәнді.

Егер бірнеше, мәселен *m,* ерекше нүктелер *$M_1, M_2,\ldots, M_m$* болса, онда

$$\int_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = J + n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \cdots + n_m\omega_m.$$

мұнда $\omega_k -$ ерекше *$M_k$* нүктені қоршап тұрған тұйық *$(l_k)$* контурдың бойымен алынған

$$\int_{(l_k)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

қисық сызықты интегралдың мәнін көрсетеді, ал *$n_1, n_2,\ldots,\ldots,Nn$* $-$ бүтін коэффициенттер.

Мысал үшін Гаусс интегралын қарайық. Бұл интегралды II типті қисық сызықты интегралға түрлендірген болатынбыз (XIX тарау, §5), сонда

$$T = \int_{(k)} \frac{\cos\,(\widehat{r,n})ds}{r} = \int_{(k)} -\frac{y-\eta}{r^2}dx + \frac{x-\xi}{r^2}dy. \qquad (43)$$

Ендеше, мұнда $P(x,y) = \frac{y-\eta}{r^1}, Q(x,y) = -\frac{x-\xi}{r^1}$. Бұл функциялардың өздері және олардың туындылары *XOY* жазықтығының *r* нольге айналатын (яғни r=0) *M* нүктесінен басқа нүктелерінің барлығында үздіксіз. Енді осы нүктелерде функциялар *P(x,y)* және *Q(x,y)* (36) шартты қанағаттандыратынын көрсетейік. Ол үшін жаңағы функциялардан тиісті туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y-\eta}{r^2}\right) = \frac{(y-\eta)^2 - (x-\xi)^2}{r^4};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-\eta}{r^2}\right)=\frac{(y-\eta)^2-(x-\xi)^2}{r^4}.$$

Сонымен, (36) шарт орындалатын болды. Сондықтан жоғарыдағы баяндалған теория бойынша, егер қисық *(k)* тұйық болса және нүкте *M* бұл қисықтың ішінде жатпаса немесе қисық бұл нүктені басып өтпесе, онда

$$T=0.$$

Егер ерекше нүкте *M* тұйық *(K)* қисықтың ішінде жатса, онда Гаусс интегралы нольден өзгеше болады. Енді осының мәнін табайық. Ол үшін *(K)* қисықтың орнына радиусы *R*-ге тең, центрі *M* нүктесінде жатқан шеңберді алайық. Сонда $r=R\cos(\widehat{r,n})=1$, өйткені *r* − радиус-вектормен нормаль *n* бір түзудің бойымен бағытталған. Демек,

$$T=\int\limits_{(k)}\frac{ds}{R}=\frac{1}{R}2\pi R=2\pi.$$

Сөйтіп, ерекше нүкте ішінде жатқан әрбір тұйық *(K)* қисықтың бойымен алынған Гаусс интегралы *2π*-ге тең болатын болды.

**3.** Тағы бір мысал келтірейік. Идеал газдың күйі (V *P)* жазықтығында *(K)* қисығымен сипатталса, онда газдың өзіне сіңіретін жылуының мөлшері төмендегі қисық сызықты

$$u=\int\limits_{(k)}\frac{c_p}{R}pdv+\frac{c_v}{R}vdp$$

интегралмен анықталатыны бізге белгілі (XIX тарау, §3,) (17). Бұл интеграл таңбасы ішіндегі $C_p$ мен $C_v$-ні тұрақты деп қарап, интегралдық өрнектің толық дифференциал емес екенін көрсетуге болады. Ол үшін $\frac{\partial P}{\partial p}$ мен $\frac{\partial Q}{\partial v}$-ні табайық.

$$\frac{\partial P}{\partial p}=\frac{c_p}{R};\ \ \frac{\partial Q}{\partial v}=\frac{c_v}{R}.$$

$C_p\neq C_v$ сондықтан (36) орындалмайды, олай болса, интеграл өрнек $\frac{c_p}{R}p\,d\,v+\frac{c_v}{R}v\,d\,p$ толық дифференциал емес.

Бұл арадан мынадай қорытындыға келеміз: газдың берілген массасы сіңіретін жылу оның күйінің функциясы болып табылмайды.

Егер интегралдық өрнекті $\frac{1}{T}$-ге (мұнда $T = \frac{PV}{R}$ − абсолют температура) көбейтсек, онда мынадай өрнекке келген болар едік:

$$C_p \frac{dv}{v} + C_v \frac{dp}{p},$$

ал бұл өрнек толық дифференциал болып табылатынын тексеру қиын емес және ол мынадай $u = \ln\left(v^{Cp} \cdot p^{Cv}\right)$ функцияның толық дифференциалы.

Енді мына түрдегі

$$\int_{(P_0,V_0)}^{(P,V)} \frac{du}{T}$$

қисық сызықты интеграл (мұнда $du = \frac{C_p}{R} p\, d\, v + \frac{C_v}{R} v\, d\, p$), $(p_0, v_0)$ нүктемен $(p, v)$ нүктені біріктіретін қисықтың формасына тәуелді болмайды. Осы кейінгі интегралмен анықталатын физикалық шаманы энтропия деп атайды. Бұл шама газ күйінің функциясы болып табылады.

## § 6. Қос интегралдар арқылы жазық фигуралардың ауданын табу

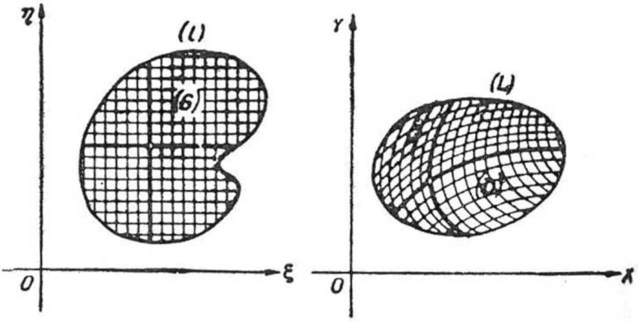
1. Координаталардың екі жазықтығын қарайық, оның біреуі *ХОУ*, екінші $\xi\, 0\, \eta$ болсын. *ХОУ* жазықтығында тұйық контур *(L)*, *(D)* облысын, ал $\xi\, 0\, \eta$ жазықтығында тұйық контур *(l)*, *(G)* облысын қоршасын (135-четреж).

Төмендегі формулаларды

$$x = \varphi(\xi, \eta)$$
$$y = \psi(\xi, \eta) \qquad (44)$$

қарайық.

(44) формулалармен берілген функциялар системасы *(G)* облысының әрбір $(\xi, \eta)$ нүктесінде *(D)* облысының тиянақты бір ғана $(x, y)$ нүктесін сәйкес келтіретін болсын. Мұнымен бірге (44) формулалар $\xi$ және $\eta$ бойынша бірмәнді түрде шешілетін болсын және $\xi$ мен $\eta$-ның табылған мәндері *(G)* облысына жататын болсын.



135-чертеж

Егер осы айтылған жағдайлар орындалса, онда (44) формулалрмен анықталған функциялар системасы *(G)* облысын өзара бірмәнді түрде *(D)* облысында түрлендіреді дейміз немесе бұл екі облыстың арасында өзара бірмәнді сәйкестік бар дейміз.

(44) формулалардың $\xi$ және $\eta$ бойынша бірмәнді шешілуінің арқасында:

$$\xi = \lambda(x, y),$$
$$\eta = \mu(x, y). \qquad (45)$$

Жаңағы баяндалған сәйкестік бойынша облыстардың біреуінің ішінде жатқан қисыққа екіншісінің ішінде жатқан қисық сәйкес келеді. Мәселен, *(G)* облысының ішінде жатқан төмендегі параметрлік теңдеулермен

$$\xi = \xi(t),$$
$$(\alpha \leq t \leq \beta).$$
$$\eta = \eta(t),$$

берілген қисыққа, $(D)$ облысында жатқан мына параметрлік теңдеулермен

$$x = \varphi[\xi(t), \eta(t)],$$
$$x = \psi[\xi(t), \eta(t)]$$

анықталатын қисық сәйкес келеді.

Керісінше, $(D)$ облысының ішінде жатқан сызықтың белгілі теңдеулері бойынша (45) формулалар арқылы *(G)* облысында жатқан, оған сәйкес сызықтың теңдеулерін табуға болады.

$\xi$ және $\eta$ сандарын $(D)$ облысы нүктелерінің қисық сызықты координаталары деп атайды.

*(G)* облысында жатқан $\xi = \xi_0$ және $\eta = \eta_0$ түзулерді қарайық. Мәселен, $\eta = \eta_0$ түзуге $(D)$ облысында мына қисық ($\xi$ – параметр)

$$x = \varphi(\xi, \eta_0),$$

$$y = \psi(\xi, \eta_0) \qquad (46)$$

сәйкес келеді, бұл қисықты координаталық сызық деп атайды. Сол сияқты *(G)* облысындағы $\xi = \xi_0$ түзуге *(D)* облысындағы мына қисық ($\eta$ – параметр)

$$x = \varphi(\xi_0, \eta),$$
$$y = \psi(\xi_0, \eta) \qquad (47)$$

сәйкес келеді.

Сонымен, *(G)* облысындағы түзулер $\xi = \xi_0$ және $\eta = \eta_0$ *(D)* облысындағы (47) және (46) сызықтар тобына түрленеді. Бұл топтар *(D)* облысында қисық сызықты тор құрады (135-чертеж). Бір топтың қисықтары өзара қиылыспайды.

*(G)* облысының $(\xi_0, \eta_0)$ нүктесінің берілуімен *(D)* облысының $(x_0, y_0)$ нүктесі $[x_0 = \varphi(\xi_0, \eta_0),\ y_0 = \psi(\xi_0, \eta_0)]$ анықталады.

Мысалдар келтірейік:

1-мысал. Мынадай түрлендіруді

$$x = \xi\,\eta, y = \frac{\eta}{\xi} (\xi > 0, \eta > 0)$$

қарастырайық. Бұларға кері түрлендіру

$$\xi = \sqrt{\frac{x}{y}}, \eta = \sqrt{xy}$$

болады.

$\xi\ 0\ \eta$ жазықтығының бірінші квадранты, *XOY* жазықтығының бірінші квадратына түрлендіреді. Мәселен, *XOY* жазықтығындағы жарты түзу $x = a\ \xi o \eta$ жазықтығындағы $\xi\eta = a$ гиперболаға түрлендіріледі. Ал *XOY* жазықтығындағы түзу $y = c$.

$\xi o \eta$ жазықтығындағы координаталардың бас нүктесінен шығатын сәулеге түрлендіріледі.

*XOY* жазықтығындағы тік төртбұрыш

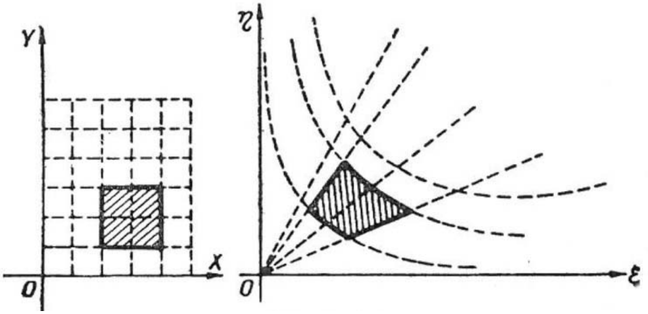
$$a \le x \le b, \qquad c \le y \le d.$$

136-чертежде көрсетілген қисық сызықты төртбұрышқа түрлендіріледі:

2-мысал. Төмендегі түрлендіруді

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta \qquad (46)$$

қарайық. Бұл түрлендіру $\Theta_0\rho$ жазықтығының әрбір нүктесіне *XOY* жазықтығының тиянақты $(x, y)$ нүктесін сәйкес келтіреді. Бірақ бұл сәйкестік бүкіл $\Theta_0\rho$ жазықтығында бірмәнді емес. Мәселен,



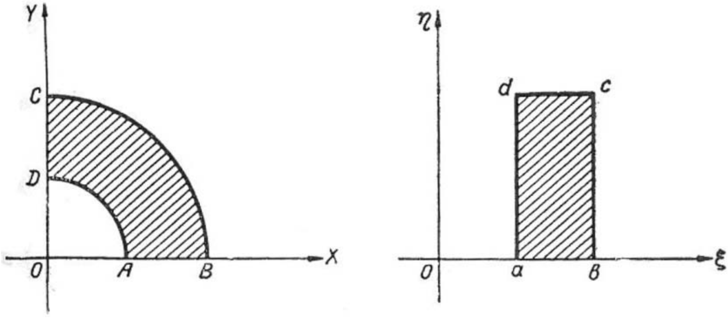
136-чертеж

егер $\Theta_1 = \Theta + 2\pi k$ болса (мұнда $k \neq 0$ бүтін сан), онда $\Theta_0\rho$ жазықтығындағы $(\Theta, \rho)$ және $(\Theta_1, \rho)$ нүктелерге, *XOY* жазықтығында бір-ақ қана $(x, y)$ нүкте сәйкес келеді.

Берілген түрлендіруден ρ мен Θ-ні *x*-пен *y* арқылы өрнектесек:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = arc\, tg \frac{y}{x}.$$

Айталық, нүкте $(\varrho, \Theta)$, $\Theta o \varrho$ жазықтығында $abcd$ тік төртбұрыштың контурында жатсын, мұнда $Oa = r, Ob = R, ad = = bc = \frac{\pi}{2}$ болсын (137-чертеж). Сонда бұл нүктеде сәйкес нүкте $(x, y)$ *XOY* жазықтығында қандай контурды бейнелейді, міне, соны іздейік.



137-чертеж

$ab$ сызығының бойында $\Theta = 0$, ал $\rho$, $r$-ден $R$-ге дейін өзгереді. (46) формулалар бойынша $x = \rho; y = 0$. Олай болса, $x$, $r$-ден $R$-ге дейін өзгереді және нүкте $(x, y)$ *OX* осінде жатқан *AB* кесіндіні бейнелейді. $bc$ сызығының бойында $\rho = R$, ал $\theta$, мен $\frac{\pi}{2}$ ге дейін өзгереді. (46) формулалар бойынша

$x = R\cos\theta,\ y = R\sin\theta,$ бұл арадан $x^2 + y^2 = R^2$.

Демек, нүкте $(x, y)$ дөңгелектің *BC* доғасын бейнелейді.

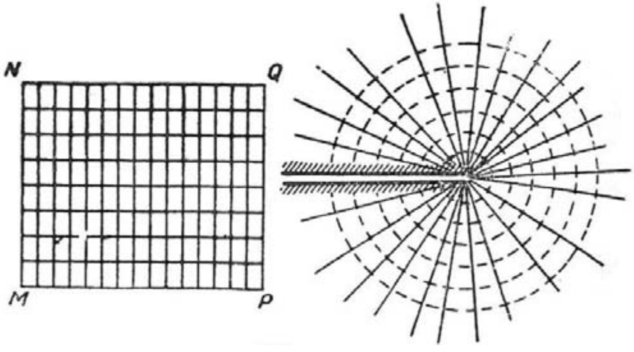
$cd$ сызығының бойында $\Theta = \frac{\pi}{2}$, ал $\rho$, $R$-ден $r$-ге дейін өзгереді; сондықтан (46) формулалар бойынша $x = 0; y = \rho$ сәйкес нүкте $(x, y)$ *OУ* осіндегі *CD* кесіндіні бейнелейді.

$da$ сызығының бойында $\rho = r$, $\Theta$, $\frac{\pi}{2}$-ден 0-ге дейін өзгереді (46) формулалар бойынша $x = r\cos\Theta$, $y = r\sin\Theta$, бұл арадан $x^2 + y^2 = r^2$. Олай болса, сәйкес нүкте $(x, y)$ дөңгелектің *DA* доғасын бейнелейді.

Сонымен, $\Theta o \varrho$ жазықтығында нүкте $(\varrho, \Theta)$ тік төртбұрыш контурын бейнелегенде, оған сәйкес нүкте $(x, y)$ *XOУ* жазықтығында $ABCD$ контурын бейнелейді. $\Theta o \varrho$ жазықтығындағы тікбұрышты төртбұрыш $abcd$ облысын (46) формулалардың көмегімен *XOУ* жазықтығындағы мына дөңгелектер $x^2 + y^2 = r^2$, $x^2 + y^2 = R^2$ доғалармен және *OX, OУ* осьтерімен қоршалынған *АВСД* облысында түрлендіруге болатын болды.

*XOУ* жазықтығы мен $\Theta o \varrho$ жазықтығының арасындағы байланыстың бір ерекшелігін бағана айтып кеттік. Оны тағы да еске түсірейік, ол мынау еді: егер аргумент $\Theta$, $2\pi$-ге еселі шамаға өзгерсе, онда x те және y те ешбір өзгермейді. Сондықтан *XOУ* жазықтығының біртіндеп барлық нүктелерін қамту үшін $(\varrho, \Theta)$ нүктені ені $2\pi$-ге тең тілкемнің ішінде өзгерту керек, мәселен $0 \le \Theta < 2\pi$, немесе $-\pi < \theta \le \pi$.

Аргумент $\Theta$-нің мына $\Theta = 2\pi$ мәніне тілкемнің сәйкес келетін шетін оның өзіне енгізбеу (есептемеу) керек.



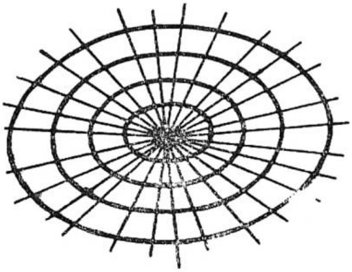
138-чертеж

$\Theta o \varrho$ жазықтығында мына $-\pi \leq \theta \leq \pi,\ \varrho > 0$ теңсіздіктермен кескінделетін *NMPQ* тілкемді қарайық (138-чертеж). (46) формулалар бұл тілкемді ХОУ жазықтығына (аударады) түрлендіреді. Мұнда былай: түзулер *MN* және *PQ* $(\Theta = \pm\pi)$ абсциссалар осінің теріс бөлігіне түрлендіріледі де, кесінді МР $(\varrho, 0)$ координаталардың бас нүктесіне аударылады. ХОУ жазықтығынан мына $x \leq 0, y = 0$ түзулерді шығарып тастағандағы оның қалған барлық нүктелерінің жиынына тілкемнің іш жағы түрлендіріледі.

Енді мына формулаларды

$x = a\,\rho\cos\theta,\ \ y = b\,\rho\sin\theta$ (47)

қарайық. Мұнда $a > 0, b > 0$ – тұрақты сандар.



139-чертеж

(47) формулалардың көмегі-мен *NMPQ* тілкемдегі торды эллипстерден және түзу сызықты сәулелерден тұратын торға түрлендіруге болады. Егер $\varrho = с$ болса, онда оған эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = C^2$ сәйкес келеді, егер $\Theta = k$ болса, онда оған сәуле $y = x\frac{b}{a}tgk$ сәйкес келеді (139-чертеж).

**2.** Енді қисық сызықты координаталарда аудан қос интеграл арқылы қалай өрнектелетінін көрсетейік.

ХОУ және $\xi 0 \eta$ жазықтықтарында $(D)$ облысымен $(G)$ облысының арасында өзара бірмәнді сәйкестік болсын және бірінші облыстың $(L)$ контурына екінші облыстың $(l)$ контуры сәйкес келетін болсын.

(44) формулалар мына шарттарды қанағаттандыратын болсын:

а) $\xi$ және $\eta$ бойынша (44) формулалар бірмәнді болып шешілетін болсын;

б) функциялар $\varphi(\xi, \eta)$ және $\psi(\xi, \eta)$ өздерінің бірінші ретті туындыларымен бірге $(G)$ облысында үздіксіз болатын болсын;

в) $(G)$ облысында $\psi(\xi, \eta)$ функциясының екінші ретті үздіксіз аралас $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\,\xi\,\partial\,\eta}$ және $\frac{\partial^2\psi}{\partial\,\eta\,\partial\,\xi}$ туындылары болатын болсын;

г) якобиан

$$J(\xi,\eta) = \frac{D(\varphi,\psi)}{D(\xi,\eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} & \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\xi} & \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \end{vmatrix}$$

$(G)$ облысында өзінің таңбасын өзгертпейтін болсын (бұл облыстың кейбір жеке нүктелерінде ол нольге айналып кетуі мүмкін).

Егер осы саналған шарттар орындалса, онда *(D)* облысының ауданы төмендегі формуламен

$$u = \iint\limits_{(G)} \left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(\xi,\eta)}\right| d\xi d\eta = \iint\limits_{(G)} |J(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta \qquad (48)$$

өрнектеледі.

Бұл пікірді дәлелдеместен бұрын, бір айта кететін мәселе мынау: жоғарыда айтылған якобиан $I(\xi,\eta), \xi$ және $\eta$ айнымалылардың $(G)$ облысында анықталмаған үздіксіз функциясы болып табылады, сондықтан (48) теңдіктің оң жағында тұрған интеграл әрқашан да бар болады.

Облыстың ауданы төмендегі II типті қисық сызықты интегралмен

$$u = \int\limits_{(L)} x\, d\, y \qquad (49)$$

кескінделетіні бізге белгілі (XIX тарау, §4, формула (26)).

Айталық, $(G)$ облысының контуры $(l)$ төмендегі параметрлік теңдеулермен

$$\xi = \xi(t), \qquad \eta = \eta(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

берілсін. Онда $(L)$ контурдың параметрлік теңдеулері

$$x = \varphi[\xi(t), \eta(t)],$$
$$\eta = \psi[\xi(t), \eta(t)]$$
$$(\alpha \le t \le \beta)$$

болады.

Параметр t-нің, $\alpha$-дан $\beta$-ға дейін өзгеруіне контурдың оң бағыты сәйкес келсін, ал бұл жағдайда $(l)$ контурдың бағыты не оң, не теріс болуы мүмкін.

(49) қисық сызықты интегралды анықталған интегралға келтіреміз:

$$u = \int_{a}^{\beta} \varphi[\xi(t), \eta(t)]\ \psi'[\xi(t), \eta(t)]dt,$$

ал

$$\psi'[\xi(t), \eta(t)] = \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \cdot \frac{d\eta}{dt}.$$

Олай болса,

$$u = \int_{a}^{\beta} \varphi[\xi(t), \qquad \eta(t)]\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \cdot \frac{d\eta}{dt}\right)dt, \quad (50)$$

Көңіл жіберіп қарасақ, (50) анықталған интеграл $(l)$ контурдың бойымен алынған мына түрдегі

$$u = \pm \int_{(l)}^{\beta} \varphi[\xi, \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}d\xi + \varphi(\xi, \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}d\eta \qquad (51)$$

қисық сызықты интеграл. Бұл интегралдың алдына ± тұрған себебі параметр $t$-нің $a$-дан $\beta$-ға қарай өзгеруіне $(l)$ контурдың қай бағыты сәйкес келетіні бізге белгісіз.

Енді (51) қисық сызықты интегралды қос интеграл арқылы өрнектейік, ол үшін Грин формуласын еске түсірейік:

$$\int_{(l)} P[\xi, \eta)d\xi + Q(\xi, \eta)d\eta = \iint_{(G)} \frac{\partial Q}{\partial\xi} - \frac{\partial P}{\partial\eta}d\xi d\eta.$$

(51) қисық сызықты интегралда:

$$P[\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}; \quad Q(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\psi}$$

Бұл арадан

$$\frac{\partial Q}{\partial\xi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \varphi(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\xi}; \quad \frac{\partial P}{\partial\eta} = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \cdot \frac{\partial}{\partial\xi} + \varphi(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\xi} - \frac{\partial P}{\partial\eta} = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\eta} - \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\xi} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} & \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\xi} & \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \end{vmatrix} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\xi, \eta)} = J(\xi, \eta).$$

Грин формуласына сүйеніп, келесі теңдікті жазамыз:

$$\int_{(l)} \varphi(\xi, \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}d\xi + \varphi(\xi, n)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}d\eta = \iint_{(l)} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\xi, \mu)}d\xi d\eta.$$

Сонымен,

$$u = \pm \iint\limits_{(l)} \frac{D(\varphi,\psi)}{D(\xi,\eta)} d\xi d\eta.$$

Шарт г) бойынша якобиан $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(\xi,\eta)}$ таңбасын өзгертпеу керек және оның үстіне аудан $u$ әрқашан да оң сан болу керек, сондықтан жаңағы шыққан қос интеграл оң болу керек.

Міне, осыларды еске алып мынаны табамыз:

$$u = \iint\limits_{(G)} \frac{D(\varphi,\psi)}{D(\xi,\eta)}\Bigg| d\xi d\eta = \iint\limits_{(D)} |J(\xi,\eta)| d\xi d\eta. \qquad (48)$$

Егер $(L)$ контурдың оң бағытына $(l)$ контурдың оң бағыты сәйкес келсе, онда якобиан алдындағы таңба оң болады, егер олардың бағыты түрліше болса, онда якобиан алдындағы таңба теріс болады.

(48) теңдіктің оң жағында тұрған қос интегралға оның орта мәні турасындағы теореманы қолдансақ, сонда:

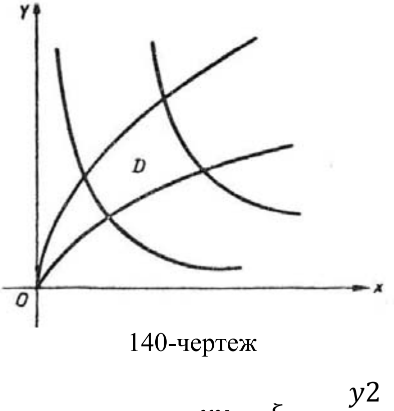
$$u = |\, J(\xi,\eta)| \cdot \sigma, \qquad (49)$$

мұнда $\varsigma$ – (G) облысының ауданы, $(\xi,\bar{\eta})$ осы облыстың бір тиянақты нүктесі.

Бұл арадан

$$J|(\xi,\eta)| = \lim \frac{u}{\sigma}.$$

Бұл арадан мынадай қорытындыға келеміз: $\xi 0 \eta$ жазықтығын (44) формулалардың көмегімен $XOУ$ жазықтығына түрлендіруде якобианның абсолют шамасы $[I(\xi,\eta)]$, $\xi o \eta$ жазықтықты не созу, не қысу коэффициентінің ролін атқарады.



140-чертеж

Мысалдар келтірейік.

*1-мысал.* Мына $xy = a, xy = b$ екі гиперболамен $(o < a < b)$ және $y^2 = kx, y^2 = mx$ екі параболамен $(o < k < m)$ қоршалынған фигураның ауданын табу керек (140-чертеж).

Бұл есепті шешу үшін былай ұйғарайық:

$$xy = \xi, \qquad \frac{y2}{x} = \eta; \quad \xi > 0, \qquad \eta > 0.$$

$XOY$ жазықтығындағы $(D)$ облысын қоршап тұрған гиперболаларға $\xi o \eta$ жазықтығында мына $\xi = a$ және $\xi = b$ координаталық түзулер сәйкес келеді, ал параболаларға мына $\eta = k$ және $\eta = m$ түзулер сәйкес келеді. Сондықтан облыс $(G)$ төмендегі теңсіздіктермен

$$a \leq \xi \leq b, \;\; k \leq \eta \leq m$$

Сипатталынатын тік төртбұрыш болады (141-чертеж).

Енді бізге $I(\xi, \eta)$ якобианды табу керек, ол үшін бұл мысалда мына өрнекті

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = 3\frac{y^2}{x} = 3\eta.$$

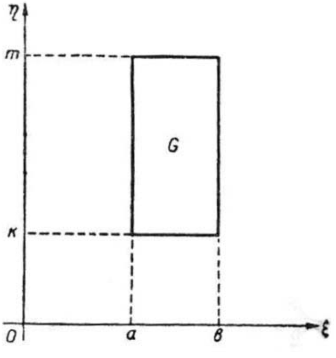
тапқан қолайлы.

Бұл арадан

$$J(\xi,\eta) = \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = \frac{1}{3\eta}.$$

Енді (48) формуланы қолдансақ, сонда

$$u = \iint\limits_{(G)} |J(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta = \frac{1}{3}\int_a^b d\xi \int\limits_k^m \frac{d\eta}{\eta} = \frac{1}{3}(b-a) ln \frac{m}{k}.$$



141-чертеж

*2-мысал.* Төмендегі теңдеумен

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{xy}{c^2}$$

кескінделген қисықпен қоршалынған фигураның ауданын табу керек.

Берілген фигураны түрлендіреміз, ол үшін мына формулаларды

$$x = apCos\theta,$$
$$y = bpSin\theta$$

қолданамыз. Сонда жаңа координаталар системасында контурдың теңдеуі

$$p^2 = \frac{ab}{c^2} Sin\theta \, Cos\, \theta$$

болады.

Енді якобианды табайық.

$$\frac{\partial x}{\partial p} = aCos\,\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -ap\,Sin\,\theta,$$
$$\frac{\partial y}{\partial p} = b\,Sin\,\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = bp\,Cos\,\theta,$$
$$J(p,\theta) = \begin{vmatrix} a\,Cos\,\theta & -ap\,Sin\,\theta \\ b\,Sin\,\theta & bp\,Cos\,\theta \end{vmatrix} = abp.$$

(48) формуланы пайдалансақ, сонда

$$u = ab\iint\limits_{(G)} pdpd\theta.$$

Поляр координаталарға көшкенде, егер координаталардың бас нүктесі $(D)$ облысының ішінде жатса, онда өзара бірмәнді сәйкестік шарт бұзылады. Бірақ дегенмен формула бұл жағдайда да дұрыс болады. Мұны былай дәлеледеуге болады. $X$ОУ жазықтығында координаталардың бас нүктесін тым кішкентай дөңгелекпен қоршаймыз да, облыстан бұл дөңгелекті шығарып тастаймыз. Сонда қалған аудан (48) формуламен өрнектеледі, бірақ $(G)$ облысынан жаңағы кішкентай дөңгелектің $\xi 0\eta$ жазықтығындағы бейнесін, яғни біздің қарастырып отырған жағдайымызда мына теңсіздіктермен $0 \leq p \leq \delta; 0 \leq \theta\_2\pi$ ($\delta$ – оң құнарсыз аз сан) кескінделетін тік төртбұрышты шығарып тастау керек. Егер дөңгелектің радиусы $\delta$ нольге ұмтылатын болса, онда онымен бірге жаңағы тік бұрышты төртбұрыштың да ауданы нольге ұмтылады. Міне, осыны еске алып, шекке көшсек, қайтадан (48) формулаға келеміз.

Бұл мәселелерді айтып отырғандағы себеп мынау: ХОУ жазықтығындағы координаталардың бас нүктесі қарастырылып отырған облысқа жатады, ал Θоρ жазықтығында бұл нүктеге ось $\varrho = 0$ сәйкес келеді, демек, өзара бірмәнді сәйкестік шарты бұзылады.

Сонымен, ауданын табайық деп отырған облыс Θо$\varrho$ жазықтығында мына сызықтармен

$$p = 0, \quad p = \sqrt{\frac{ab}{c^2 Sin\,\theta\,Cos\,\theta}}$$

қоршалынған.

Түбір нақты сан болу үшін $Sin\,\Theta\,Cos\Theta\;0$. Бұл теңсіздік осылай болу үшін аргумент Θ мына шектерде өзгеру керек:

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{1}$ және $\pi \le \theta \le \frac{3}{2}\pi.$ Бұдан мынадай қорытынды жасауға болады: ауданын табайық деп отырған фигура екі тілімнен тұрады. Сондықтан

$$u = \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int^{\sqrt{\frac{ab}{c^2}Sin\theta Cos\theta}} abpdp + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} d\theta \int_{0}^{\sqrt{\frac{ab}{c^2}Sin\theta Cos\theta}} abpdp =$$

$$= \frac{a^2b^2}{2c^2}\int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Sin2\theta}{2}d\theta + \frac{a^2b^2}{2c^2}\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{Sin2\theta}{2}d\theta = \frac{a^2b^2}{2c^2}$$

## § 7. Қос интегралдағы айнымалыларды ауыстыру

$(D)$ облысында анықталған үздіксіз $f(x,y)$ функцияның осы облыс бойынша алынған қос интегралын қарайық:

$$\iint\limits_{(D)} (f,y)\,dxdy.$$

$(D)$ облысы $\xi 0\eta$ жазықтығындағы $(G)$ облысымен (44) формулалар арқылы байланысты болсын. Осы формулалар §6-та келтірілген а), б), в), г) шарттарды қанағаттандыратын болсын.

Жоғарыда келтірілген

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dxdy$$

қос интегралды (G) облысы бойынша алынған қос интеграл арқылы өрнектеу керек. Міне, осы мақсатпен $(D)$ облысын қисық сызықтармен бөлшек облысқа бөлеміз: $(D_1), (D_2), \dots, (D_n)$. Онда $(G)$ облысы да сәйкесті сызықтармен $n$ бөлшек $(G_1), (G_2), \dots, (G_n)$ облыстарға бөлінеді.

Енді интегралдық қосындыны құрайық:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_\imath}, y_i)\,P_i.$$

Егер барлық бөлшек облыстардың диаметрлері нольге ұмтылса, онда интегралдық қосындының шегі жаңағы қос интеграл болатыны бізге мәлім. Өткен параграфтағы (49) формуланы қолдансақ сонда:

$$P_i = \left|J(\overline{\xi_\iota}, \overline{\eta_\iota})\right|\Delta_i,$$

мұнда $(\overline{\xi_{1,}\,\eta_1})$ – бөлшек $(G_1)$ облысының бір тиянақты ішкі нүктесі, ал $\Delta_i$ – осы облыстың ауданы.

Интегралдық қосындыдағы $P_i$-дің орнына оның жаңағы өрнегін қойсақ, онда

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_\iota}, y_i)\,|J(\xi_i, \eta_i,)|\Delta_{\mathrm{i}}.$$

Интегралдық қосындыдағы $(\overline{x_\iota}, \overline{y_\iota})$ бөлшек $(D_i)$ облысының еркімізше алған кез келген нүктесі, сондықтан оны былай ұйғарайық:

$$x_i = \varphi(\xi_i, \eta_i), \;\; y_i = \psi(\xi_i, \eta_i).$$

Сонда

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f[\varphi(\xi_i, \eta_i), \psi(\xi_i, \eta_i)]|\,J(\xi_i, \eta_i)|\Delta_{\mathrm{i}}.$$

Егер барлық бөлшек $(G_i)$ облыстардың диаметрлерін нольге ұмтылтып, кейінгі қосындыдан шек алсақ, онда

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{(G)} f[\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)]|\,J(\xi, \eta)|d\xi d\eta. \quad (50)$$

Осы шыққан формуланы *қос интегралдағы айнымалыларды ауыстыру формуласы* деп атайды.

Енді осы формуланы есеп шығару ісінде қалай қолдану керек, соны көрсету үшін бір-екі мысал келтірейік.

1-мысал. Төмендегі беттермен

$$z = x^2y^2\sqrt[3]{1 - x^3 - y^3}, \; x \geq 0, \;\; y \geq 0$$

қоршалынған дененің көлемін табу керек.

Дененің көлемі келесі формуламен анықталады:

$$V = \iint\limits_{(D)} zdxdy = \iint\limits_{(D)} x^2y^2\,\sqrt[3]{1 - x^3 - y^3}\,dxdy$$

мұнда мына шарт $x^3 + y^3 \leq 1$ орындалуы тиіс. Қос интегралдағы айнымалыдарды мына теңдеулер арқылы ауыстырамыз:

$$x = pCos^{\frac{2}{3}}\theta, \;\; y = p\,Sin^{\frac{2}{3}}\theta.$$

Сонда жаңа интегралдау облысы мынадай теңсіздіктермен $0 \le p \le 1$; $0 \le p \le \frac{\pi}{2}$сипатталынатын тік төртбұрыш болады. Енді якобианды табамыз, ол үшін

$$\frac{\partial x}{\partial p} = Cos^{\frac{2}{3}}\theta; \quad \frac{\partial y}{\partial p} = Sin^{\frac{2}{3}}\theta;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\frac{2}{3}\ Cos^{-\frac{1}{3}}\theta \cdot Sin\theta; \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{2}{3}pSin^{-\frac{1}{3}}\,\theta \cdot Cos\,\theta;$$

$$J(p,\theta) = \begin{vmatrix} Cos^{\frac{2}{3}}\,\theta & -\frac{2}{3}p\,Cos^{-\frac{1}{3}}\,Sin\theta \\ Sin^{\frac{2}{3}}\,\theta & \frac{2}{3}pSin^{-\frac{1}{3}}\,Cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{3}pCos^{\frac{5}{3}}\theta \cdot Sin^{-\frac{1}{3}}\theta + \frac{2}{3}pSin\theta Cos^{-\frac{1}{3}}\theta = \frac{2}{3}pSin^{-\frac{1}{3}} \cdot Cos^{-\frac{1}{3}}.$$

Енді (50) формуланы қолданып, мына теңдікті табамыз:

$$V = \frac{2}{3}\int_o^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_o^1 p^5\sqrt[3]{1-p^3}\ Sin\theta \cdot Cos\,\theta dp =$$

$$= \frac{2}{3}\int_o^{\frac{\pi}{2}} Sin\,\theta \cdot Cos\theta d\theta \int_o^1 p^5\sqrt[3]{1-p^3}\,dp;$$

ішкі интегралды жеке алып интегралдаймыз,

$$\int_0^1 p^5\sqrt[3]{1-p^3}\,dp = -\frac{1}{3}\int_o^1 p^3\sqrt[3]{1-p^3 d\,(1-p^3);}$$

бұл интегралды бөлімшелеп интегралдаймыз

$$u = p^3 f\ dv = \sqrt{1-p^3}\ d(1-p^3); du = 3p^2dp; \quad v = \frac{3}{4}(1-p^3)^{\frac{4}{3}}$$

$$\int_o^1 p^5\sqrt[3]{1-p^3dp = -\frac{1}{3}p^3 \cdot \frac{3}{4}(1-p^3)^{\frac{4}{3}}}\Bigg|_o^1 +$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot 3\int_o^1 p^2\sqrt[3]{(1-p^3)^4}\,dp = -\frac{1}{4}\int_o^1 (1-p^3)^{\frac{4}{3}}d(1-p^3) =$$

$$= -\frac{3}{28}(1-p^3)^{\frac{7}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{28}.$$

Бұдан кейін

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{28} \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} Sin\,\theta\,Cos\,\theta d\theta = \frac{1}{28} Sin^2\theta \Bigg|_{o}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{28}.$$

*2-мысал.* Төмендегі беттермен

$$z' = 2xy, \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{2xv}{c^2}; \qquad x > 0,\ y > 0,\ \ z > 0$$

қоршалынған дененің көлемін табу керек.

Бірінші теңдеу конусты кескіндейді, екінші теңдеу табаны лемниската, осі OZ осіне параллель цилиндрді кескіндейді.

(50) формуланы қолданамыз, ол үшін келесі ауыстыруларды жасаймыз:

$$x = ap\,Cos\theta,\ \ y = bp\,Sin\,\theta.$$

Сонда

$$z = p\sqrt{ab\,Sin\,2\theta},\ \ p = \frac{1}{c}\sqrt{2ab\,Cos\,\theta\,Sin\,\theta = \frac{1}{c}}\ \sqrt{ab\,Sin\,2\,\theta}.$$

Түбір нақты болу үшін sin $2\Theta \geq 0$ болуы керек, олай болса, $0 \geq 2\theta \geq \frac{\pi}{2}$ немесе $0 \geq \theta \geq \frac{\pi}{4}$. Сонымен, $0 \geq p \geq \frac{1}{c}\sqrt{ab \sin 2\theta}$; $l(\varrho, \Theta) = a\ b\ \varrho$. Енді (50) формула бойынша

$$V = \frac{ab\sqrt{ab}}{c} \int_{o}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{Sin2\theta d\theta} \int_{o}^{\frac{1}{c}\sqrt{ab\,Sin\,2\theta}} p^2 dp =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{ab\sqrt{ab}}{c} \int_{o}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{Sin2\theta}\ p^3 \Bigg|_{o}^{\frac{1}{c}\sqrt{ab\,Sin\,2\theta}} d\theta =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{ab}{c}\right)^3 \int_{o}^{\frac{\pi}{4}} Sin^2\,2\theta d\theta = \frac{1}{3}\left(\frac{ab}{c}\right)^3 \int_{o}^{\frac{\pi}{4}} 1 - \frac{Cos4\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{24}\left(\frac{ab}{c}\right)^3.$$

Біздің бұл тапқанымыз – дененің көлемінің жартысы. Оның толық көлемін табу үшін шыққан нәтижені екіге көбейтеміз; сонда іздеп отырған көлем мынадай болады:

$$V = \frac{\pi}{12}\left(\frac{ab}{c}\right)^3$$

*3-мысал.* Төмендегі теңдеумен

$$z = a^2x^4 - 6abx^2y^2 + b^2y^4 + c$$

берілген бетпен (мұнда $a, b$ – оң сандар), ХОУ жазықтығымен және мынадай теңдеумен

$$a(x-\lambda)^2 + b(y-\mu)^2 = h$$

кескінделген цилиндрмен қоршалынған дененің көлемін табу керек.

Ауыстыруды мына түрде жүргіземіз:

$$x - \lambda = \frac{\rho}{\sqrt{a}}\text{Cos}\,\theta, \;\; y - \mu = \frac{\rho}{\sqrt{b}}Sin\,\theta\,;$$

сонда

$$J(\rho,\theta) = \frac{\rho}{\sqrt{ab}}\,d\,\rho\,d\,\theta; \qquad 0 \le \theta \le 2\pi; \qquad 0 \le \rho \le \sqrt{h}.$$

$$z = [(\lambda + \frac{\rho}{\sqrt{a}}\text{Cos}\,\theta)^4\,a^2 - 6ab(\lambda + \frac{\rho}{\sqrt{a}}\text{Cos}\,\theta)^2 \times$$
$$\times\,(\mu + \frac{\rho}{\sqrt{b}}\text{Sin}\,\theta)^2 + b^2(\mu + \frac{\rho}{\sqrt{b}}\text{Sin}\,\theta)^4 + c].$$

Енді

$$V = \frac{1}{\sqrt{ab}}\int\limits_{o}^{\sqrt{h}}\rho d\rho\int\limits_{o}^{2\pi}[(\lambda + \frac{\rho}{\sqrt{a}}\text{Cos}\,\theta)^4\,a^2 - 6ab(\lambda + \frac{\rho}{\sqrt{a}}\text{Cos}\,\theta)^2 \times$$
$$\times\,(\mu + \frac{\rho}{\sqrt{b}}\text{Sin}\,\theta)^2 + b^2\,(\mu + \frac{\rho}{\sqrt{b}}\text{Sin}\,\theta)^4 + c]d\theta.$$

Тақ дәрежелі синустар мен косинустардан алынған интегралдар нольге айналады. Міне, осыны еске алсақ, сонда

$$V = \frac{\pi h}{\sqrt{ab}}(a^2\lambda^4 + b^2\mu^4 - 6ab\lambda^2\mu^2 + c).$$

## § 8. Қисық беттің ауданын табу

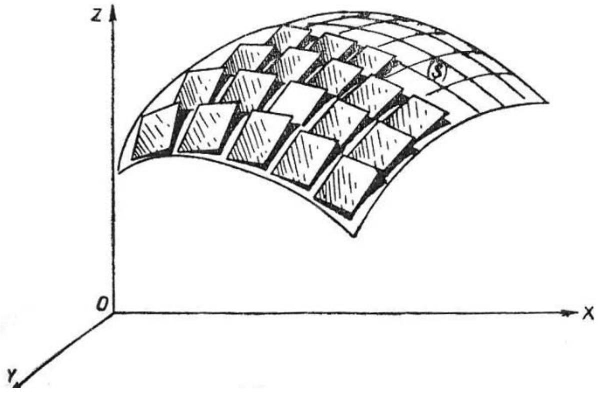
**1.** Бет ауданы ұғымы мен қисық ұзындығы ұғымының бір-бірімен анықталу мағынасында ұқсастығы бар. Мәселен, доғаның ұзындығын анықтауда біз доғаға іштей сынық сызық сыздық. Сонан соң сынық сызықтың барлық звеноларының ұзындықтарын нольге ұмтылтып, оның периметрінің шегін іздедік. Егер осы шек бар болатын болса, онда оны біз қисықтың ұзындығы үшін аламыз. Міне, бұл мәселе бізге белгілі.

Қисық беттің ауданын дәл осы сияқты етіп анықтауға болмай ма деген сұрақ туады. Былайша айтқанда, қисық бетке көпжақты іштей сызып, сонан кейін барлық жақтардың аудандарын нольге ұмтылтып көпжақ ауданының шегін тапсақ болмай ма, яғни осы шекті бет ауданы үшін алсақ қайтеді деген сұрақ келіп шығады.

Беттің ауданын дәл осылай етіп анықтауға болмайтындығы өткен ғасырдың аяғында байқалды. Мұны бірінші байқаған адам – неміс математигі Шварц.

Бет ауданының басқаша түрдегі жарамды анықтамасын берейік.

*ХОУ* жазықтығындағы $(D)$ облысының үстіңгі жағынан орналасқан бет $(S)$ берілсін. $OZ$ осіне параллель түзу бұл бетті бір-ақ қана нүктеде қиятын болсын. $(D)$ облысын еркінше жүргізілген жай қисық сызықтармен $n$ бөлшек $(D_1)$, $(D_2)$, $(D_3)$, ..., $(D_n)$ облыстарға бөлеміз. Әрбір бөлшек $(D_i)$ облыстың контурын бағыттаушы есебінде алып жасаушыларын $OZ$ осіне параллель етіп түзу цилиндр құрамыз. Осы құрылған цилиндр берілген $(S)$ беттен $(S_i)$ ауданшаны ояды. Жаңағы айтылып отырған цилиндрдің санын $n$-ге жеткізуге болады. Олай болса ауданшалардың саны да $n$ болады, былайша айқанда берілген бет $(S)$ $n$ бөлшек $(S_1)$, $(S_2)$, ..., $(S_n)$ беттерге жіктеледі (142-чертеж).



142-чертеж

Енді әрбір бөлшек $(S_i)$ беттің ішінде жатқан кез келген $M_i$ нүктені сайлап аламыз да, осы нүкте арқылы берілген $(S)$ бетке жанама жазықтық жүргіземіз. Егер бағанағы құрылған цилиндрдің жасаушыларын жоғары қарай жаңағы жанама жазықтықпен қиылысқанша созсақ, онда осы цилиндр жанама жазықтықтан жазық ($T_i$) ауданшаны ояды. Мұндай ауданшалардың саны да $n$ болады. Енді осы ауданшалардың қосындысын қарайық

$$\sum_{i=1}^{n} T_i,$$

бұл қосынды бастапқы берілген беттің ауданының жуық мәнін береді. Оның дәл мәнін табу үшін барлық бөлшек ($D_i$) облыстардың диаметрлерін нольге ұмтылтып әлгі қосындыдан шек аламыз, егер осы шек бар болатын болса, онда оны беттің ауданы деп атаймыз.

Сонымен, егер беттің ауданын $Q$ арқылы белгілесек, онда берілген анықтама бойынша

$$Q = \lim \sum_{i=1}^{\text{n}} T_i.$$

Ауданы бар бетті *квадратталатын бет* деп атайды.

Енді осы ауданды аналитикалық жолмен есептеп көрейік. ($D$) облысы жабайы қисықпен қоршалынсын, бет ($S$) төмендегі теңдеумен берілсін:

$$z = f(x, y);$$

$f(x, y) - (D)$ облысында үздіксіз және онда үздіксіз $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$ дербес туындылары бар функция. Бұл ұйғаруға геометрия тілінде былай мағына беруге болады: беттің әрбір нүктесінде оған өзінің жағдайын жанау нүктесінің өзгеруімен байланысты үздіксіз өзгертіп отырған жанама жазықтық жүргізуге болады.

Бағанағыдай ($D$) облысын $n$ бөлшек ($D_1$), ($D_2$), ..., ($D_n$) облыстарға жіктеп, цилиндрлер құрамыз. Сонда бөлшек облыс ($D_i$) (мұның ауданы $P_i$ болсын) $T_i$ ауданшаның $XOУ$ жазықтығына түсірілген проекциясы болып табылады. $M_i$ ($x_i$, $y_i$, $z_i$) нүктесінде ($S$) бетке жүргізілген жанама жазықтықпен $XOУ$ жазықтығының арасындағы бұрышты $\alpha_i$ деп белгілесек, онда

$$P_i = T_i \operatorname{Cos} \alpha_i.$$

Жанау $M_i$ ($x_i$, $y_i$, $z_i$) нүкте арқылы ($S$) бетке нормаль (жанама жазықтыққа перпендикуляр) жүргізейік және осы нормальдың координаталар осьтерімен жасайтын сәйкес бұрыштарын $\lambda_i, \mu$ және $\gamma_i$ арқылы белгілейік. Сонда $\alpha_i = \gamma_i$ өйткені екі жазықтықтың арасындағы бұрыш олардың нормальдарының арасындағы бұрыштармен өлшенеді. Жүргізілген нормаль мен OZ осінің арасындағы бұрышты сүйір бұрыш деп есептейік.

Сонымен,

$$T_i = \frac{P_i}{\mathrm{Cos}\,\gamma_i},$$

олай болса,

$$Q = lim\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i}{\mathrm{Cos}\,\gamma_i}.$$

*M$_i$* (*x$_i$, y$_i$, z$_i$*) нүктесінде $z = f(x,y)$ теңдеумен берілген бетке жүргізілген нормальдың теңдеуі:

$$\frac{x-x_i}{p_i} = \frac{y-y_i}{q_i} = \frac{z-z_i}{-1}$$ болады.

Мұнда

$$p_i = \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x}, \quad q_i = \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y}.$$

Нормальдың бағыттаушы косинустары

$$\mathrm{Cos}\,\lambda_i = \frac{p_i}{\pm\sqrt{1 + {p_i}^2 + {q_i}^2}}; \qquad \mathrm{Cos}\,\mu_i = \frac{q_i}{\pm\sqrt{1 + {p_i}^2 + {q_i}^2}};$$

$$\mathrm{Cos}\,\lambda_i = \frac{-1}{\pm\sqrt{1 + {p_i}^2 + {q_i}^2}}$$

болады.

Кейінгі теңдікті еске алсақ, сонда

$$Q = lim\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 + {p_i}^2 + {q_i}^2}\ p_i$$

немесе

$$Q = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1 + {p_i}^2 + {q_i}^2}\ dxdy = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 dxdy} \quad (51)$$

(51) формуланы мына түрде жазуға болады:

$$Q = \iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{\mathrm{Cos}\,\gamma}. \qquad (52)$$

мұнда $\gamma$ – нормаль мен *OZ* осінің арасындағы бұрыш. Егер нормальға тиянақты бағыт тағайындалмаса, онда

$$Q = \iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{|\mathrm{Cos}\,\gamma|}, \tag{53}$$

Бет (*S*) төмендегі теңдеумен

$$F(x,y,z) = 0$$

берілсін. Бұл теңдеудің сол жағында тұрған үш айнымалының функциясы $F(x,y,z) = 0$ жабық функцияның бар болу теоремасының барлық шарттарын қанағаттандыратын болсын. Онда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Дербес туындылардың осы мәндерін (51) формулаға апарып қоямыз; сонда

$$Q = \iint\limits_{(D)} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)}}{\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|} dxdy \tag{54}$$

(51) формуладағы болсын немесе осы кейінгі формуладағы болсын интегралдау облысы (*D*) беттің ауданы ізделіп отырған бөлігінің *XOY* жазықтығына түсірілген проекциясы болып табылады.

**2.** Енді бет (*S*) төмендегі параметрлік теңдеулермен

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v) \tag{55}$$

берілсін.

(55) теңдіктердің оң жағында тұрған функциялардың анықталу облысы (*G*) болсын. Бұл облыста функциялардың өздері және олардың $u, v$ бойынша алынған дербес туындылары үздіксіз болсын. Берілген беттің ерекше нүктелері жоқ деп ұйғарамыз. Параметрлердің біреуін, мәселен $v$-ні, тұрақты деп $(v = v_0)$ қарасақ, онда координаталар *x, y, z* бір ғана параметрге, яғни $u$-ға ғана тәуелді және олар беттің бойындағы бір қисық сызықты кескіндейді. Бұл қисықтың параметрлік теңдеулері болады:

$$x = x(u, v_0), \qquad y = y(u, v_0), \qquad z = z(u, v_0).$$

Бұл сызық өзімізге белгілі координаталық сызықтар болады. Егер u-ды тұрақты деп қарасақ $(u = u_0)$, онда басқа бір координаталық сызықты

$$x = x(u_0, v), \qquad y = y(u_0, v), \qquad z = z(u_0, v).$$

тапқан болар едік.

Беттің$(x_0, y_0, z_0)$ нүктесін басып жүретін координаталық $v = v_0, u = u_0$ қисықтардың осы нүктедегі жанамаларының теңдеуін құрайық:

$$\frac{x - x_0}{x'_u} = \frac{y - y_0}{y'_u} = \frac{z - z_0}{z'_u},$$
$$\frac{x - x_0}{x'_v} = \frac{y - y_0}{y'_v} = \frac{z - z_0}{z'_v},$$

бұл қатыстарда тұрған $x'_u, y'_u, z'_u, x'_v, y'_v, z'_v$ дербес туындылардың мәндері $(u_0, v_0)$ нүктесінде алынған.

Берілген беттің $(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінде оған нормаль жүргізейік. Сонда бұл нормальдың теңдеуі мынадай болады:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Осы құрылған нормаль координаталық сызықтарға $(x_0, y_0, z_0)$ нүктеде жүргізілген жанамаларға перпендикуляр. Аналитикалық геометриядан белгілі перпендикулярлық шарттарды жазайық:

$$l\,x'_u + my'_u + nz'_u = 0,$$
$$l\,x'_v + my'_v + nz'_v = 0.$$

Бұл екі теңдеуді *l, m, n* жөніндегі алгебралық теңдеулер системасы деп қарауға болады. Жоғары алгебра пәнінен белгілі теорема бойынша бұл теңдеулердің шешулері мына анықтауыштарға

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

пропорционал болады, яғни

$$l = kA; \quad m = kB; \quad n = kC$$

мұнда $K$ – тұрақты пропорционалдық коэффициент.

*l, m, n* – нормальдың бағыттаушы косинустары болғандықтан,

$$k^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1,$$ бұл арадан

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^3 + C^2}}.$$

$\lambda, \mu, \gamma$ – нормальдың координаталар осьтерімен жасайтын сәйкес бұрыштары болсын. Онда

$$Cos\lambda = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \; Cos\mu = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$
$$\mathrm{Cos}\, v = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{56}$$

(*G*) облысында анықтауыш *C* нольге тең емес деп ұйғарайық. Онда беттің ашық $z = f(x, y)$ теңдеуін табуға болады. Олай болса, (53) формуланы қолдануға әбден болады.

(53) қос $\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{|\cos v|}$ интегралдағы айнымалыларды (55)

теңдіктердің алдыңғы екі формулалары бойынша *u, v* айнымалылар арқылы ауыстырайық. Сонда (*D*) облысы (*G*) облысына ауысады, ал $\cos\gamma$-ді (56) формула бойынша ауыстырамыз, сонда якобиан мынаған тең:

$$J = (u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_u \\ y'_v & v \end{vmatrix}.$$

Сонымен,

$$Q = \iint\limits_{(D)} \frac{\frac{|C| d\,u\,d\,v}{|C|}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \iint\limits_{(D)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\; d\,u\,d\,v =$$

$$= \iint\limits_{(G)} \sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}^2}\; d\,u\,d\,v.$$

Аналитикалық геометриядан белгілі, *Лагранж теңбетеңдігі* деп аталатын, төмендегі теңбе-теңдікті

$$(a^2 + b^2 + c^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 =$$
$$= (a\gamma - \alpha c)^2 + (b\gamma - \beta c)^2 + (a\beta - \alpha b)^2$$

пайдаланып, мына теңдікті табамыз:

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2,$$

мұнда

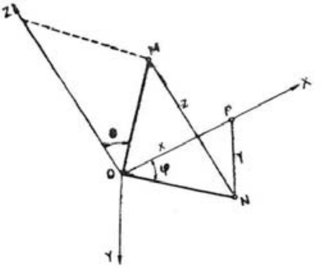
$$x'^2{}_u + y'^2{}_u + z'^2{}_u = E;\quad x'^{\overline{2}}{}_V + y'^{\overline{2}}{}_V + z^{2\prime}{}_V = G;$$
$$x'_u\, x'_V + y'_u\, y'_V + z'_u\, z'_V = F.$$

Енді

$$Q = \iint\limits_{(G)} \sqrt{EG - F^2}\, dudv \qquad (57)$$

Интеграл таңбасы астындағы $\sqrt{EG - F^2}$ өрнекті қисық сызықты координаталардағы бет ауданының элементі деп атайды. *E, F, G* сандарын беттің гаустық коэффициенттері дейді.

**3.** Сфералық координаталар туралы біраз мәлімет берейік. *M* – кеңістіктегі бір нүкте болсын, *OM* – оны координаталардың бас нүктесімен біріктіретін бас кесінді, бұл кесіндінің ұзындығын *r* деп белгілейік. Енді нүкте *M* және *OZ* осі арқылы жазықтық жүргізейік. Сонда осы жазықтық $XOZ$ координаталар жазықтығымен $\varphi$ бұрышын құрады.



143-чертеж

$OM$ радиусы-вектор мен $OZ$ осі оң бағытының арасындағы бұрышты Θ белгілейік (143-чертеж).

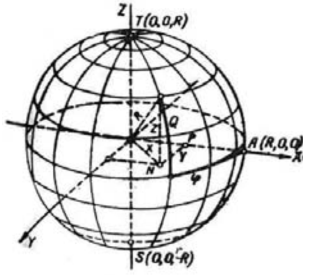
Мына үш шама: $r, \Theta, \varphi$ кеңістіктегі $M$ нүктесінің жағдайын әбден анықтайды.

$\Delta\, ONP$ тік бұрышты үшбұрыштан: $x = ON \cos\varphi,\ y = ONsin\varphi$ $\Delta ONM$ тік бұрышты үшбұрыштан: $ON = r \sin\Theta,\ z = r\cos\Theta$. Олай болса,

$$x = r\, Sin\, \Theta\, Cos\, \varphi, \qquad y = r\, Sin\, \Theta\, Sin\, \varphi, \qquad z = r\, Cos\, \Theta.$$

Мұнда $0 \leq r \leq \infty,\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ \ 0 \leq \Theta \leq \pi.$

Осы $r, \Theta, \varphi$ үш шаманы нүктенің сфералық координаталары немесе кеңістіктегі поляр координталары деп атайды. Кейде Θ бұрышы үшін радиус-вектор $OM$ мен оның $XOY$ жазықтығына түсірілген проекциясы $ON$-нің арасындағы бұрышты алады.



144-чертеж

Жаңағы сфералық координаталарды «географиялық» координаталар деп те атайды. Олардың бұлай аталу себебі: $\varphi$ бұрышы географиялық бойлыққа, ал Θ – географиялық ендікке, $r$ – жердің радиусына сәйкес келеді (144-чертеж).

Кейде, әсіресе есептер шығарғанда, берілген бетті сфералық координаталарда қараған өте қолайлы болады. Нүктенің декарттық координаталары мен сфералық координаталарының арасындағы байланысты таптық, ол мынау еді:

$$x = r\,\mathrm{Sin}\,\Theta\,\mathrm{Cos}\,\varphi,\ \ y = r\,\mathrm{Sin}\,\Theta\,\mathrm{Sin}\,\varphi,\ \ z = r\,\mathrm{Cos}\,\Theta. \qquad (58)$$

$$(0 \leq r \leq +\infty, \qquad 0 \leq \Theta \leq \pi, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

Радиус-вектор r-ді Θ мен φ-дің функциясы деп қарайық: $r = r(\Theta, \varphi)$. Бұл функция беттің поляр теңдеуі болып табылады.

Бет поляр теңдеумен берілсін. Осы беттің ауданының өрнегін табу керек. Ол үшін (57) формуланы қолданамыз және Θ мен $\varphi$-ді параметрлер үшін аламыз.

Жаңағы жазылған формулаларды былай жазуға болады:

$$x = r(\Theta, \varphi)\,\mathrm{Sin}\,\Theta\,\mathrm{Cos}\,\varphi, \quad y = r(\Theta, \varphi)\mathrm{Sin}\Theta\,\mathrm{Sin}\,\varphi$$
$$z = r(\Theta, \varphi)\,\mathrm{Cos}\,\Theta.$$

Міне, бұл беттің параметрлік теңдеулері болады. Ендеше

$$E = \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + r^2, \;\; F = \frac{\partial r}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial r}{\partial \varphi}, \qquad G = \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 + r^2 Sin^2\Theta,$$

$$EG - F^2 = \left[\left(r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\right) Sin^2\Theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right] r^2$$

$$Q = \iint\limits_{(G)} \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2\right] Sin^2\Theta + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2} \cdot r d\Theta d\varphi \qquad (59)$$

*1-мысал.* OX осінің қозғалысынан пайда болған қиғаш бұранда беттің теңдеуі мына түрде болады:

$$x = u\,Cosv, \quad y = u\,Sinv, \qquad z = cv.$$

Осы беттің биіктігі $2\pi c$ мына $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндрмен ойылған бөліктің ауданын табу керек.

Гаустық коэффициенттерді табамыз:

$$E = 1, \qquad F = 0, \quad G = u^2 + c^2.$$

Ендеше

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + c^2}.$$

Енді интегралдау облысын іздейміз: $u^2 = a^2$; сондықтан

$$0 \leq u \leq a, \quad \text{ал} \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

(57) формула бойынша

$$Q = \int\limits_o^{2\pi} dv \int\limits_o^{a} \sqrt{u^2 + c^2} du = 2\pi \left[\frac{u}{2}\sqrt{u^2 + c^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{c^2}{2} \ln\left(u + \sqrt{u^2 + c^2}\right)\right]_o^a = 2\pi \left[\frac{a}{2}\sqrt{a^2 + c^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{c^2}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + c^2}}{c}\right].$$

*2-мысал.* Мынадай $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2xy$ теңдеумен берілген беттің ауданын табу керек.

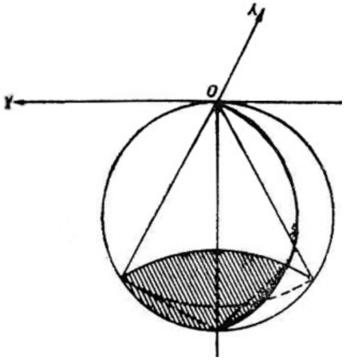
Беттің теңдеуін сфералық координаталарға көшіреміз, ол үшін (58) формулаларды пайдаланамыз. Сонда

$$r = a\,Sin\Theta\sqrt{Sin2\varphi}$$

$$\sqrt{\left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2\right]Sin^2\Theta+\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2}=\frac{a\,Sin\theta}{\sqrt{Sin2\varphi}}.$$

(59) формула бойынша

$Q=4a^2\int_o^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_o^{\frac{\pi}{2}}Sin^2\Theta d\Theta=\frac{1}{2}\pi^2a^2.$



145-чертеж

*3-мысал.* Мына $x^2+y^2+z^2=2Rz$ теңдеумен берілген сфераның төмендегі теңдеумен

$$z^2=ax^2+by^2$$

кескінделетін және төбесі бас нүктеде жататын конустың ішіндегі бөлігінің ауданын табу керек (145-чертеж).

(59) формуланы қолданамыз. Сфераның және конустың теңдеулерін сфералық коордиталарға көшіреміз. Ол үшін (58) формулаларды пайдаланамыз. Сонда

$$r=2RCos\theta;$$

$$(aCos^2\varphi+bSin^2\varphi)\,\mathrm{Sin}^2\,\theta=Cos^2\theta$$

$$Q=\iint\limits_{(G)}4R^2Sin\theta\;Cos\theta\;d\theta d\varphi.$$

Интегралдау облысы (*G*) мына $(a\,cos^2\varphi+b\,sin^2\varphi)sin^2\Theta=$ $=cos^2\Theta$ теңдеумен кескінделетін қисықпен қоршалынған.

Егер сфераның бірінші октанттағы бөлігінің ауданын табу керек болса, онда $\varphi, 0$ мен $\frac{\pi}{2}$-нің арасында өзгереді, яғни $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Ал Θ-ны алдымыздағы теңдеумен табамыз:

$tg^2\theta=\frac{1}{aCos^2\varphi+bSin^2\varphi}$ немесе $tg^2\theta_o=\frac{1}{aCos^2\varphi+bSin^2\varphi}.$

Енді

$$Q=16R\int_o^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_o^{\theta_o}Sin\,\theta d\,Sin\,\Theta.$$

Ішкі интегралды жеке алайық:

$$\int_{o}^{\theta_o} Sin\Theta \, d\, Sin\Theta = \frac{1}{2}Sin^2\Theta_o = \frac{1}{2}\cdot\frac{tg^2\theta_o}{1+tg^2\theta_o} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{aCos^2\varphi+bSin^2\varphi}}{1+\frac{1}{aCos^2\varphi+bSin^2\varphi}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+aCos^2\varphi+bSin^2\varphi}.$$

Бұдан кейін

$$Q = 8R^2\int_{o}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1+aCos^2\varphi+bSin^2\varphi} =$$

$$= 8R^2\int_{o}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{Sin^2\varphi+Cos^2\varphi+aCos^2\varphi+bSin^2\varphi} =$$

$$8R^2\int_{o}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(a+1)Cos^2\varphi+(b+1)Sin^2\varphi} = \frac{4\pi R^2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}.$$

*4-мысал.* Мына $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ эллипстік параболоидтың $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипстік цилиндрдің ішінде жатқан бөлігінің ауданын табу керек.

Эллипстік параболоидтың теңдеуінен мына теңдіктерді табамыз:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{b}.$$

Енді

$$Q = 4\iint\limits_{(D)}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy.$$

Интегралдау облысы ($D$) – эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$. Алдымыздағы қос интегралдағы айнымалыларды былай $x = a\varrho cos,\ y = b\varrho sin\Theta$ ауыстырамыз. Сонда

$$J(\rho,\Theta) = ab\rho; \quad 0\le\rho\le 1; \quad 0\le\Theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$Q = 4ab\int_{o}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_{o}^{1} \rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho = \frac{4ab}{2}\int_{o}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left(\frac{2}{3}\sqrt{(1+\rho^2)^3}\right)\Big|_{o}^{1} =$$

$$= \frac{4}{3}ab\left(2\sqrt{2}-1\right)\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\pi ab\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

## § 9. Меншіксіз қос интегралдар

**1.** Кейде қос интегралды шектелмеген облыстардың, мәселен бүкіл жазықтықтың немесе бұрыштың бойымен алуға тура келеді.

Айталық, (*P*) шекараланбаған облыс болсын, осы облыстың бойымен алынған мына

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$$

қос интегралды қарайық. Мәселе осы интегралды қалай анықтауда.

Интеграл таңбасы ішіндегі функция $f(x,y)$ жазықтықтың тұйық (*Г*) қисық сызықпен қоршалынған әрбір бөлігінде интегралданатын болсын.

Енді (*Г*) сызығын қоршаған, яғни оның сыртында жатқан және онымен ешбір ортақ нүктесі жоқ тұйық (*C*) сызығын алайық. Осы екі тұйық сызықтың арасында жатқан (*D*) облысы бойынша алынған қос

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$$

интегралдың шекті мәні болуға тиіс.

Егер тұйық қисық (*C*) жан-жаққа қарай шексіз алыстағанда, қос интеграл

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$$

бір тиянақты шекке ұмтылса, онда осы шекті біз тұйық (*Г*) сызықтың сыртында жатқан облыс бойынша алынған $f(x,y)$ функцияның қос интегралы деп түсінеміз.

Егер тұйық қисық (*C*), центрі бас нүктеде жатқан радиусы *R* кез келген үлкен санға тең шеңбердің сыртында жататын болса, ол тұйық қисықты жан-жаққа шексіз алыстайды дейміз. (*С*) және (*К*) – тұйық (*Г*) қисықты қоршаған кез келген тұйық сызықтар болсын. (*Г*) мен (*С*)-нің арасындағы облысты (*D*) арқылы, ал (*Г*) мен (*К*)-ның арасындағы облысты (*G*) арқылы белгілейік те, айырманы қарайық:

$$\delta(C,K) = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy - \iint\limits_{(G)} f(x,y)dxdy.$$

Жаңағы осының алдында айтылған шек бар болу үшін, қисықтар (*С*) және (*К*) жан-жаққа бір-біріне тәуелсіз шексіз алыстағанда айырма δ-ның нольге ұмтылуы қажетті және жеткілікті.

Мұны дәлелдеу қиын емес.

Тұйық (*Г*) қисықтың сыртында және оны қоршаған, бірінің ішінде бірі жатқан тұйық $(C_1), (C_2), \dots, (C_n), \dots$ сызықтар тізбегін қарайық.

Тұйық (*Г*) қисық пен $(C_m)$-нің арасындағы облысты $(D_m)$ деп, ал (*Г*) мен $(C_n)$-ның арасындағы облысты $(C_n)$ деп белгілесек (мұнда $m>n$ болсын), онда теореманың шарты бойынша $\delta(C_m,\ C_n)$ $m$ мен $n$ шексіздікке ұмтылғанда нольге ұмтылады, олай болса, (*G*) облысы бойынша алынған қос интеграл тиянақты шекке ұмтылады.

Осы айтылғандарға бір мысал келтірейік. Центрі бас нүктеде жатқан, радиусы *r*-ге тең дөңгелектің сыртында анықталған мына

$$f(x,y) = \frac{\psi(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

функцияны қарайық. Сандар *М* және *m* осы фукнцияның дәл жоғарғы шекаралығы мен дәл төменгі шекаралығы болсын. (*С*) қисықтар үшін жаңағы шеңбермен ортақ центрлес радиусы *R*-ге тең шеңберді алайық. Сонда осы екі шеңбердің арасында жатқан жазық облыс (сақина) бойынша алынған $f(x,y) = \frac{\psi(x,y)}{(x^2+y^2)^\alpha}$ функцияның қос интегралын мына түрге келтіреміз:

$$\int_o^{2\pi} d\Theta \int_r^R \frac{\psi(\rho Cos\theta, \rho Sin\theta)\rho d\rho}{\rho 2\alpha}.$$

Қос интегралдың қасиеті бойынша бұл интеграл мына екі интегралдың

$$2\pi m\int_{r}^{R}\frac{d\rho}{{\rho_2}^{\alpha-1}};\quad 2\pi M\int_{r}^{R}\frac{d\rho}{{\rho_2}^{\alpha-1}}$$

арасында жатады.

Егер мына теңсіздік $2^{\alpha-1} > 1$ немесе бәрібір $\alpha > 1$ орындалса, онда бұл екі интеграл *R* шексіздікке ұмтылғанда, тиісті шекке ұмтылатыны бізге белгілі. Сондықтан бұл жағдай орындалғанда қарастырып отырған функцияның қос интегралы бар болатын болады. Керісінше, егер $\alpha \leq 1$ болса, онда әлгі интегралдар *R* мен бірге шексіздікке ұмтылады.

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\,x\,d\,y$$

қос интегралдың шегі әрқашан да бар болады, егер мына

$$\iint\limits_{(D)} |f(x,y)|dx\,dy$$

қос интегралдың шегі бар болса.

**2.** Шектеулі (*D*) облысы бойынша алынған қос инетеграл таңбасы ішіндегі функция $f(x,y)$ осы облыстың бір $M_0$ нүктесінде немесе оның ішінде жатқан бір сызықтың бойында шексіздікке айналып кететін болсын.

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\,x\,d\,y$$

қос интегралға тиісті мағына беру үшін жаңағы $M_0$ нүктені немесе сызықты (*D*) облысынан шығаруымыз керек. Ол үшін $M_0$ нүктені немесе сызықты тым кішкентай (Δ) облысымен қоршаймыз да, мына

$$\iint\limits_{(D-\Lambda)} f(x,y)dxdy \qquad (60)$$

қос интегралды қараймыз.

Егер (Δ) облысының диаметрі нольге ұмтылғанда (60) интеграл бір белгілі шекке ұмтылса, онда бұл шекті $f(x,y)$ функцияның (*D*) облысы бойынша алынған *қос интегралы* деп атайды және оны бұрынғыша былай

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)d\,x\,d\,y \quad \text{белгілейміз.}$$

Бұл анықтаманы бергенде біз қаралып отырған $f(x,y)$ функцияның *M₀* нүктесінен немесе айтылған сызықтан басқа (*D*) облысының ешбір жерінде ерекшелігі жоқ деп ұйғарамыз.

Мысал үшін төмендегі

$$f(x,y)=\frac{\psi(x,y)}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^\alpha}$$

функцияның *D* облысы бойынша алынған қос интегралын қарайық.

Бұл функция (*D*) облысының $M_0$ (*a, b*) нүктесінде шексіздікке айналады.

Мына сандар *M* және $m, \psi(x,y)$ функцияның облысындағы дәл жоғарғы және төменгі шекаралықтары болсын.

Жоғарыда берілген анықтама бойынша

$$\iint\limits_{(D)}\frac{\psi(x,y)dxdy}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^\alpha}=\lim\iint\limits_{(D-\Lambda)}\frac{\psi(x,y)dxdy}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^\alpha}.$$

Облыс (Δ) центрі $M_0$ (*a, b*) нүктесінде жатқан радиусы $\varepsilon$-ға тең дөңгелек болсын.

Сонда былай ұйғарып:

$$x-a=\rho Cos\Theta,\quad y-b=\rho Sin\Theta$$

мына $\iint\limits_{(\Delta)}\frac{\psi(x,y)dxdy}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^\alpha}$ қос интегралды мына түрге келтіреміз:

$$\int\limits_{o}^{2\pi}d\Theta\int\limits_{-\xi}^{\xi}\frac{\psi(\rho Cos\theta,\rho Sin\theta)\rho dp}{\rho^{2\alpha}}.$$

Бұл интеграл мына екі интегралдың

$$2\pi m\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}};\quad 2\pi M\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}$$

арасында жатады.

Егер $\alpha<1$ болса, онда бұл интегралдар нольге ұмтылады. Олай болса, бұл жағдайға ($\alpha<1$ болғанда)

$$\lim_{\delta\to0}\iint\limits_{(\Lambda)}\frac{\psi(x,y)dxdy}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^\alpha}=0.$$

Сонымен,

$$\iint\limits_{(D)}\frac{\psi(x,y)dxdy}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^\alpha}$$

қос интегралдың, егер $\alpha < 1$ болса ғана, мағынасы болады.

Бұл қаралған қос интегралдарды ерекше немесе меншіксіз интегралдар дейміз.

### *Жаттығулар*

Төмендегі беттермен қоршалынған денелердің көлемдерін табу керек.

1. $(x-a)^2+y^2=R,\ y+z=R,\ z=0$ Жауабы: $\pi R^3$.
2. $y^2+z^2=x,\ y=x,\ x=1,\ y=0,\ z=0$ Жауабы: $\frac{7\pi}{64}$.
3. $x=\cos x\cos y,\ x+y=\frac{\pi}{2},\ x-y=\frac{\pi}{2},$

$$-x-y=\frac{\pi}{2},\ -x+y=\frac{\pi}{2},\ z=0$$ Жауабы: $\pi$.

4. $x^2+y^2=\alpha z^2, x^2+y^2=ax,\ z=0$ Жауабы: $\frac{4}{9}\cdot\frac{a^3}{\sqrt{\alpha}}$.
5. $x^2+y^2+z^2=2x,\ x^2+y^2=z$ Жауабы: $\frac{z}{6}\pi$.
6. $2cz=y^2-x^2+2x\,y\,c\,t\,\mathrm{g}\,\alpha,\ (0<\alpha<\pi), x^2+y^2=R^2,$

$$x=0,\qquad z=0,\qquad y=0$$

Жауабы: $\frac{R^4}{16c}ctg\frac{\alpha}{2}$.

7. $z=\frac{a^2x+b^2y}{x+y},\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

Жауабы: $\frac{3}{8}\pi(a^2+b^2)$.

8. $z=e^{-x^2-y^2}, z=0.$

Шешуі. Айнымалылар *x* пен *y* үшін интегралдау шектерін – ∞-тен +∞-ке дейін аламыз. Сонда

$$v=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2-y^2}dy=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dx=$$

$$=4\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}dx\int_{0}^{\infty}e^{-y^2}=4\left[\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}dx\right]^2=4\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2=\pi.$$

9. $x^2+y^2+z^2=a^2,\ (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=a(x^2-y^2)$

Жауабы: $\frac{2}{9}(3\pi-4)a^3$.

10. $z=x^2+y^2,\ z^2=xy$

Жауабы: $\frac{\pi}{96}$.

11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

Жауабы: $\left[\frac{2}{3}\pi-\frac{8}{9}(4\sqrt{5}-5)\right]a\,b\,c.$

12. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{4x\,y}{c^2},\ z=0.$

Жауабы: $\frac{\pi}{8}\cdot\frac{a^3b^3}{c^4}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right).$

13. $cz=xy;\ \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{xy}{ab},\ z=0,\ x>0,\ y>0.$

Жауабы: $\frac{1}{560}\ \frac{(ab)^2}{c}.$

Келесі тұйық сызықтармен қоршалынған фигураның аудандарын табу керек:

14. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$

Жауабы: $\frac{\pi\,a\,b}{2}\left(\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}\right).$

15. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{2\,x\,y}{c}$

Жауабы: $\frac{3}{2}\cdot\frac{a^3b^3}{c^4}.$

16. $y^2=ax,\ y^2=b\,x,\ x^2=m\,y,\ x^2=n\,y,\ (a>b,\ m>n)$

Жауабы: $\frac{1}{3}(a-b)(m-n).$

17. $(x^2+y^2)^3=x^4+y^4$

Жауабы: $\frac{3}{4}\pi.$

18. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2y}{c^3}$

Жауабы: $\frac{a^5b^3}{32\,c^6}$

19. $(x+y)^4=x^2y$

Жауабы: $\frac{1}{210}.$

20. $x^3+y^3=x^2+y^2$

Жауабы: $\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.$

21. Мына $y^2+z^2=x^2$ теңдеумен берілген беттің $y^2+y^2=a^2$ цилиндрмен ойылған бөлігінің ауданын табу керек.

Жауабы: $2\pi a^2.$

22. $x^2+y^2+z^2=3a^2$ теңдеумен берілген беттің $x^2+y^2=2\,a\,z$ бетпен ойылған бөлігінің ауданын табу керек.

Жауабы: $2\pi a^2(3-\sqrt{3}).$

*Нұсқау:* (59) формуланы пайдаланған қолайлы.

23. Мына $cz=xy$ теңдеумен берілген беттің $(x^2+y^2)^2=2\,x\,y$ бетпен ойылған бөлігінің ауданын табу керек.

Жауабы: $\frac{1}{9}c^2(20-3\pi).$

24. $x^2+y^2+z^2=2z$ беттің $z^2=2x+y^2$ бетпен ойылған бөлігінің ауданын табу керек.

Жауабы: $\frac{4\pi}{\sqrt{6}}$

25. Мынадай $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3(x^2-y^2)$ теңдеумен берілген беттің ауданын табу керек.

Жауабы: $\frac{a^2\pi^2}{2}$.

Нұсқау: сфералық координаталарға көшіп, (59) формуланы қолданған дұрыс.

26. $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z$ беттің $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ бетпен ойылған бөлігінің ауданын табу керек.

Жауабы: $\frac{1}{9}(20-3\pi)ab$.

27. $(x+y)^2+2z^2=2a^2$ беттің $x=0,\ y=0,\ z=0$ координаталық жазықтықтармен ойылған бөлігінің ауданын табу керек.

Жауабы: $2a^2$.

28. $(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2+z^2=a^2$ беттің $x=0,\ y=0,\ z=0$ координаталық жазықтықтармен ойылған бөлігінің ауданын табу керек.

Жауабы: $\frac{a^2}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$.

# XXI ТАРАУ
# БЕТ БОЙЫНША АЛЫНҒАН ИНТЕГРАЛДАР (БЕТТІК ИНТЕГРАЛДАР)

## § 1. Бірінші типті беттік интеграл

Айталық, $(S)$ – берілген дұрыс бет[1] болсын. Осы беттің барлық нүктелерінде анықталған және беттің $M$ нүктесінің жағдайының өзгеруімен бірге үздіксіз өзгеруші $F(x,y,z)=F(M)$ функция берілсін.

Берілген $(S)$ бетті $n$ бөлшек $(S_1),(S_2),\dots,(S_n)$ беттерге жіктейік, бұл бөлшек беттердің аудандары $S_1,S_2,\dots,S_n$ болсын. Әрбір бөлшек $(S_i)$ беттің бойында жатқан кез келген $M_i(x_i,y_i,z_i)$ нүктені алайық та, осы нүктедегі функцияның мәнін тауып, келесі қосындыны құрайық:

---

[1] Дұрыс бет деп ерекше нүктелері жоқ, квадратталынатын бетті айтамыз.

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\, s_i. \qquad (1)$$

Егер бетті бөлшектеу саны шексіздікке, ал барлық бөлшек беттердің диаметрлері нольге ұмтылғанда (1) қосынды бір белгілі шекке ұмтылса, онда осы шекті $F(x, y, z)$ функцияның (*S*) бетке тараған немесе (*S*) бет бойынша алынған I типті беттік интегралы деп атайды және оны былай белгілейді:

$$\iint_{(S)} F\,(x, y, z) ds \quad \text{немесе} \quad \iint_{(S)} F(M) ds. \qquad (2)$$

Егер бет (*S*) тұйық болса, онда бұл бойынша алынған беттік интегралды физикада былай белгілейді:

$$\oint_{(S)} F\,(x, y, z) ds \quad \text{немесе} \quad \oint_{(s)} F(M) ds.$$

Айталық, бет (*S*) төмендегі параметрлік теңдеулермен

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

берілсін.

Егер параметрлердің өзгеру (*G*) облысында функциялар $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ және олардың $u, v$ бойынша алынған дербес туындылары $x'_u, x'_V, y'_u; y'_V; z'_u, z'_V$ үздіксіз болса, онда үздіксіз $F\,(x, y, z)$ функция қандай болса да, жоғарыда анықталған (2) беттік интеграл (*G*) облысы бойынша алынған келесі

$$\iint_{(G)} F[x\,(u, v), y\,(u, v), z\,(u, v)] \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

қос интеграл арқылы өрнектеледі, яғни

$$\iint_{(S)} F(x, y, z) ds = \iint_{(G)} F[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \times \qquad (3)$$

$$\times \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Енді бет (*S*) ашық түрдегі $z = f(x, y)$ теңдеумен берілсін, мұнда $f(x, y)$ – *XOY* жазықтықтағы (*D*) облысында анықталған және ол облыстың нүктесінде үздіксіз $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ дербес туындылары бар функция.

Бұл жағдайда (2) беттік интеграл, (*D*) облысы бойынша алынған мына

$$\iint\limits_{(D)} F[x,y,f(x,y)]\ \sqrt{1+p^2+q^2}dx\,dy$$

қос интеграл арқылы өрнектеледі, яғни

$$\iint\limits_{(S)} F(x,y,z)ds = \iint\limits_{(D)} F[x,y,f(x,y)]\sqrt{1+p^2+q^2}dx\,dy. \quad (4)$$

Мұндағы (*D*) облысын берілген (*S*) беттің *XOY* жазықтыққа түсірілген проекциясы деп қарауға болады. Ал $\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{1}{\cos\upsilon}$, олай болса, (4) формула мына түрге көшеді:

$$\iint\limits_{(S)} F(x,y,z)ds = \iint\limits_{(D)} F[x,y,f(x,y)]\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}, \quad (5)$$

мұнда $\gamma$ – бетке жүргізілген нормаль мен *OZ* осінің оң бағытының арасындағы бұрыш.

Енді (4) формуланы іс жүзінде қалай пайдалану керек, соған бір мысал келтірейік.

*1-мысал.* Мына $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоид бойынша алынған келесі $\iint\limits_{(S)}\frac{ds}{r}$ беттік интегралдың мәнін табу керек. Мұнда $ds$ беттің элементі, $r$ – эллипсоидтың центрінен осы элементке жүргізілген жазықтыққа дейінгі арақашықтық.

(5) формула бойынша:

$$J = \iint\limits_{(D)} \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r}dx\,dy.$$

Эллипсоид теңдеуінен z-ті және оның дербес туындыларын табамыз:

$$z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}};$$

$$p = -\frac{c^2x}{a^2z}; \qquad q = -\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{y}{z};$$

бұл арадан

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{c^2}{z}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}.$$

Ал

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Енді

$$J = c^2 \iint\limits_{(D)} \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right) \frac{dx\,dy}{z}.$$

Интегралдау облысы (*D*) – эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Сондықтан

$$J = \int\limits_o^a dx \int\limits_o^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1 + \frac{c^2-a^2}{a^4}x^2 + \frac{c^2-b^2}{b^4}y^2}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dx\,dy =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{abc}.$$

## § 2. Бірінші типті беттік интегралға келтірілетін физикалық есептер

1. Айталық, берілген (*S*) беттің бойында белгілі бір масса үздіксіз бір қалыпты түрде таралсын және осы массаның тығыздығы $\mu(x, y, z)$ болсын. Кеңістіктегі $A(\xi, \eta, \zeta)$ нүкте массасы бірге тең материалды нүкте болсын.

Осы нүктені материалды бет (*S*) қандай күшпен өзіне тартады? Бұл мәселені шешу үшін беттің бойындағы кішкентай $ds$ элементті қараймыз, бұл элементтің координатасы $(x, y, z)$ болсын. Элементтің массасы $\mu(x, y, z)\ ds$ болады.

$A(\xi, \eta, \zeta)$ нүктеден $ds$ элементке дейінгі екі ара болады:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Ньютон заңы бойынша элемент $ds$-тің *A* нүктені өзіне тарту күші тең:

$$\frac{\mu(x, y, z)}{r^2} ds$$

Өлшем бірліктері осы көбейтіндінің алдында тұратын пропорционалдық коэффициент бірге тең болатындай етіп сайланып алынған болсын.

Тарту күші $A(\xi, \eta, \zeta)$ нүктеден $ds$ элементке қарай бағытталған, сондықтан осы күштің векторымен *OX* осінің арасындағы бұрыштың косинусы

$\frac{x-\xi}{r}$ болады.

Олай болса, тарту күштің OX осіне проекциясы мына

$$\mu(x,y,z)\frac{x-\xi}{r^3}ds$$

көбейтіндіге тең болады.

Бүкіл $(S)$ беттің $A(\xi,\eta,\zeta)$ нүктені өзіне тарту күшінің OX осіне түскен проекциясы

$$F_x=\iint\limits_{(s)}\mu(x,y,z)\frac{x-\xi}{r^3}ds \quad \text{болады.} \qquad (6)$$

Міне, дәл осы сияқты тарту күштің $OУ$ және $OZ$ осьтеріне түскен проекциялары

$$F_у=\iint\limits_{(s)}\mu(x,y,z)\frac{x-\eta}{r^3}ds\ , \qquad F_z=\iint\limits_{(s)}\mu(x,y,z)\frac{x-\varsigma}{r^3}ds \qquad (7)$$

болады.

Сонымен, беттің нүктені өзіне тарту күші (6), (7) теңдіктермен өрнектелген I типті беттік интегралдарға келтірілген болады.

2. Енді потенциал ұғымын анықтайық. Кеңістікте жатқан массасы $m$-ге тең материалды $\mu(x,y,z)$ нүктені қарайық.

Егер $N(\xi,\eta,\varsigma)$ – осы кеңістіктегі массасы бірге тең материалды нүкте болса, онда $N$ нүктенің $\mu$ нүктесіне қарай тартылу күшінің коррдинаталық осьтерге түскен проекциялары

$$m\frac{x-\xi}{r^3},\ m\frac{y-\eta}{r^3},\ \ m\frac{z-\varsigma}{r^3} \quad \text{болады,}$$

мұнда $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}$.

Енді мынадай $H(\xi,\eta,\varsigma)=\frac{m}{r}$ функцияны алайық та, оның $\xi,\eta,\varsigma$ бойынша алынған дербес туындыларын табайық:

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial\xi}=m\frac{x-\xi}{r^3},\quad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial\eta}=m\frac{y-\eta}{r^3},\quad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial\xi}=m\frac{x-\xi}{r^3}.$$

Бұл арадан мынадай қорытындыға келеміз: $\mu$ нүктенің $N$ нүктені өзіне тарту күшінің координаталық осьтерге түскен проекциялары жаңағы $H(\xi,\eta,\varsigma)=\frac{m}{r}$ функцияның $\xi,\eta,\varsigma$ бойынша алынған дербес туындыларына тең болатын болды. Міне, осы функцияны $\mu$ нүктесі өрісінің ньютондық потенциалы деп атайды.

Енді бірнеше материалды нүктелер $M_1,M_2,\dots,M_n$ бір белгілі физикалық өріс жасайтын болсын және бұл нүктелердің массалары $m_1,m_2,\dots,m_n$ болсын. Бұл өріс үшін ньютондық потенциал былай анықталады:

$$H(\xi, \eta, \varsigma) = \sum_{t=1}^{n} \frac{m_i}{r_i}.$$

Егер физикалық өріс $(S)$ беттің бойында үздіксіз бірқалыпты таралған, тығыздығы $\mu(x, y, z)$ массамен жасалатын болса, онда бұл өрістің ньютондық потенциалы $H(\xi, \eta, \zeta)$ келесі I типті беттік интеграл арқылы өрнектеледі:

$$H(\xi, \eta, \varsigma) = \iint\limits_{(s)} \mu(x, y, z) \frac{ds}{r}. \qquad (8)$$

Енді бір-екі мысал келтірейік.

1-мысал. Біртектес сфера нүктелерінің, массасы бірге тең материалды нүктені өзіне тарту күшін есептеу керек.

Сфера біртектес болғандықтан, оның тығыздығы тұрақты, оны бірге тең болсын деп ұйғарайық. Сфераның центрі координаталардың бас нүктесінде болсын, ал тартылушы нүкте $N, OZ$ осінің оң жақтағы бойында жатсын; олай болса бұл нүктенің координаталары $(0;\ 0;\ \zeta)$ болады.

(6) және (7) формулалар бойынша тарту күшінің координаталар осьтеріне түскен проекциялары

$$F_x = \iint\limits_{(s)} \frac{x}{r^3} ds, \quad F_y = \iint\limits_{(s)} \frac{y}{r^3} ds, \qquad F_z = \iint\limits_{(s)} \frac{z - \varsigma}{r^3} ds,$$

мұнда $r = \sqrt{x^2 + y^2 - (z - \zeta)^2}$.

Алдымен бірінші беттік интегралды есептеп шығарайық. Ол үшін сфералық координаталарға көшеміз:

$$x = R \sin u \, \cos v, \quad y = R \ \sin u \ \sin v, \qquad z = R \ \ \cos \ u.$$

Енді (3) формуланы қолданамыз, ол үшін

$$E = R^2, \qquad F = o, \quad G = R^2 sin^2 \ u, \ \sqrt{EG - F^2 = R^2} \ \sin u,$$

$$Fx = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} \frac{R \sin u \cos v}{[R^2 sin^2 u + (R cos\, u - \ \xi)^2]^{3/2}} R^2 sin\, u\, du = 0,$$

өйткені

$$\int_0^{2\pi} cos\, v dv = 0.$$

Осы сияқты $F_{\bar{y}} = 0$ болады.

$$F_z = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} \frac{(R \cos u - \varsigma)\, R^2 \ \sin u \, du}{[R^2 sin^2 u + (R\, cos\, u - \ \varsigma)^2]^{3}/_{2}} =$$

$$= 2\pi \int_{0}^{\pi} \frac{(R\cos u - \varsigma)\, R^2\ \sin u\, du}{(R^2 + \varsigma^2 - 2\, R\, \varsigma\, cos\, u)^{3}/_{2}} \qquad (9)$$

Енді кейінгі интегралдағы айнымалыны былай ауыстырсақ: $\cos u = t$, онда

$$F_z = 2\pi R^2 \int_{-1}^{1} \frac{(Rt - \varsigma)dt}{(R^2 + \varsigma^2 - 2R\varsigma t)^{3}/_{2}}.$$

Бұл интегралдағы айнымалыны тағы да былай ауыстырайық:

$$R^2 + \varsigma^2 - 2R\varsigma t = z^2.$$

Сонда жаңа айнымалы $z$-тің өзгеру облысы болады:

$$R + \varsigma < z < |R - \varsigma| \ \text{және}\ dt = -\frac{zdz}{R\varsigma}.$$

$$F_z = \frac{\pi R^2}{\varsigma^2} \int_{|R-\varsigma|}^{R+\varsigma} \frac{R^2 + \varsigma^2 - z^2}{z^2} dz.$$

Бұл арадан

$$F_z = \frac{\pi R^2}{\varsigma^2} [R + \varsigma + |R - \varsigma|] \left[\frac{R^2 - \zeta^2}{|R^2 - z^2|} - 1\right].$$

Енді кейінгі шыққан формуланы зерттейік.

а) егер $R > \zeta$ болса, онда $|R^2 + \zeta^2| = R^2 - \zeta^2$, сондықтан $F_z = 0$. Бұл арадан мынадай қорытынды шығады: біртектес сфераның ішінде жатқан нүктеге, сфера тарапынан тарту күші ешбір әсер етпейді;

б) егер $R < \zeta$ болса, онда

$$F_z = \frac{\pi R^2}{\varsigma^2} (R + \zeta - \zeta + R) \cdot \left(\frac{R^2 - \zeta^2}{\zeta^2 - R^2} - 1\right) = -\frac{4\pi R^2}{\zeta^2}.$$

Бұл арадан мынадай қорытындыға келеміз: біртектес сфераның бүкіл массасы центріне жиылып, нүктеге қандай тартушы күшпен әсер етсе, оның сыртында жатқан сол нүктеге сфера тарапынан сондай тарту күші әсер етеді;

в) егер $R = \zeta$ болса, онда (9) формула мына түрге көшеді:

$$F_z = 2\pi \int_{0}^{\pi} \frac{(Rcos\, u - R)R^2 \sin u}{(2R^2 - 2R^2 \cos u)^{3}/_{2}} du = \frac{8\pi}{\sqrt{8}} \int_{0}^{\pi} \frac{d \cos u}{(1 - \cos u)^{1}/_{2}} = -2\pi.$$

Бұл арадан мынадай қорытынды туады: егер тартылушы нүкте сфераның бетінде болса, онда тарту күші үзілісті функция болады.

2-мысал. Осы сфераның ньютондық потенциалын табу керек.

Бұл есепті шешу үшін (8) формуланы қолданамыз:

$$H(\zeta) = \iint\limits_{(s)} \frac{ds}{r}. \text{ Мұнда } r = \sqrt{x2} + \sqrt{y2 + (z-\zeta)^2}$$

Жаңағы, алдыңғы, есептегідей сфералық координаталарға көшеміз; сонда

$$H(\zeta) = \int\limits_{(0)}^{2\pi} dv \int\limits_{0}^{\pi} \frac{R_2 \sin u \, du}{\sqrt{R^2 \, sin^2 \, u + (R \cos u - \zeta)^2}} =$$

$$= 2\pi R^2 \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin u \, du}{\sqrt{R^2 + \zeta^2 - \; 2R \, \zeta \cos u}} = \frac{2\pi R}{\zeta} [R + \zeta - |R - \zeta|]$$

Егер $R > \zeta$ болса, онда $H(\zeta) = 4\pi \, R$, яғни сфераның ішінде оның потенциалы тұрақты.

Егер $R > \zeta$ болса, онда $H(\zeta) = \frac{H\pi \, R^2}{\zeta}$.

Бұл арадан шығатын қорытынды: сыртқы кеңістікте сферамен жасалған потенциал, егер оның бүкіл массасын центріне жинаса, өзгермейді.

Егер $R = \zeta$ болса, онда $H(\zeta) = 4\pi \, R,$ яғни нүктені сфера бойымен жылжытқанда да бәрібір, потенциал үздіксіз болады.

## § 3. Екінші типті беттік интеграл

**1.** Бұл интеграл ұғымына көшпестен бұрын бір айта кететін қажетті мәселе бар, ол – беттің жағы туралы.

Егер қандай болсын бір денені алсақ, ол дене бетпен қоршалынған. Осы қоршаушы беттің екі жағы бар, біреуі – дененің сырт жағы (денені қоршап тұрған кеңістікке қараған жағы), екіншісі – ішкі жақ, ол дененің өзіне тиіп тұрған жақ.

Беттің жағы деп математикада нені айтады, соған анықтама берейік.

Әрбір нүктесі арқылы жанама жазықтық жүргізуге болатын бет берілсін. Бұл бетті (*S*) деп белгілейік. Осы бетке оның әрбір нүктесінде жүргізілген жанама жазықтықтың жағдайы жанау нүктесімен бірге үздіксіз өзгеріп отырады деп ұйғарамыз.

Беттің бойында жатқан бір $M_0$ нүктені алып, осы нүкте арқылы оған нормаль жүргіземіз және бұл нормальға тиісті бағыт береміз. Беттің бойында осы $M_0$ нүктені бастыра, беттің өзін шетінен айнала қоршап тұрған қисықпен (беттің шекарасымен) қиылыспайтындай етіп контур жүргіземіз.

Егер нүкте $M_0$ жаңағы контурдың бойымен оны орап қайтадан өзінің бастапқы жағдайына келсе, онда мынадай екі жағдай болу мүмкін: а) нүкте $M_0$ өзінің бұрынғы орнына сызылған контурдың бойымен қайтып келгенде осы нүктедегі нормальдың бағыты бастапқы ($M_0$ нүктесі қозғалмай тұрғандағы) бағытына қарама-қарсы болуы; б) нүкте $M_0$ өзінің бұрынғы орнына контурдың бойымен қайтып келгенде нормальдың бағыты өзінің бастапқы $M_0$ нүктесіндегі бағытымен дәлме-дәл келуі мүмкін.

Егер а) жағдай орындалса, онда бетті біржақты бет дейміз; егер б) жағдай орындалса, онда бетті екіжақты бет дейміз.

Біржақты бетке мынадай мысал келтіруге болады: тік төртбұрыш *ABCD* қағазды алып, *A* нүктесі *C* нүктесімен, ал *B* нүктесі D нүктесімен дәл келетіндей етіп бір ғана рет бұрап желімдесек, онда біржақты бет келіп шығады. Бұл бетті Мебиус беті деп атайды.

Екіжақты бетті алып, оның бір жағын қызыл, екінші жағын көк бояумен боясақ, онда бетті жан-жақ шетінен қоршап тұрған сызықты қиып өтпей, оның бойындағы жолмен қызылға боялған жағынан көк жағына көшуге болмайды. Мебиус беті бұл шартты қанағаттандырмайды, өйткені оны бір түске ғана бояуға болады.

Екіжақты беттердің мысалдары сфера, эллипсоид, цилиндр, конус, жазықтық т.т. болып табылады.

Мына түрдегі $z = f(x, y)$ ашық теңдеумен берілген бет әрқашан да екіжақты бет болады, мұнда $f(x, y)$ өзінің $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$, дербес туындыларымен бірге үздіксіз функция. Геометрия тілімен айтқанда, OZ осіне параллель түзумен бір-ақ нүктеде қиылысады және бет өзінің әрбір нүктесінде үздіксіз өзгеріп отыратын жанамаға ие болады.

Бетке – жүргізілген нормальдың бағыттаушы косинустары былай өрнектелетіні:

$$\cos\lambda = \frac{p}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \qquad \cos\mu = \frac{q}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos\upsilon = \frac{-1}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

бізге белгілі. Радикалдың алдында екі таңба тұр, олардың бірін ғана сайлап алып, біз нормальға тиісті бағытты береміз. Радикалдың алдындағы таңба плюс болсын, онда

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Осы жазылған өрнектер бет нүктелері координаталарының үздіксіз функциясы болып табылады, олай болса, нормальға жанағы берілген бағыт нүктенің жағдайына үздіксіз тәуелді болады.

Егер радикал алдына минус таңбасын қойсақ, онда беттің барлық нүктелерінде $\cos\gamma \geq 0$ болады, яғни нормальдың $OZ$ осімен құратын бұрышы сүйір. Радикалдың осы таңбасына беттің сәйкес келетін жағын оның жоғары жағы деп атаймыз.

Егер радикал алдына + таңбасын қойсақ, онда $\cos\gamma \leq 0$ болады, яғни бетке жүргізілген нормальдың $OZ$ осімен құратын бұрышы доғал. Радикалдың осы таңбасына беттің сәйкес келетін жағын оның төменгі жағы деп атаймыз.

Сонымен, екіжақты беттің жоғарғы және төменгі жақтары болатын болды. Жоғарғы жағында $\cos\gamma \geq 0$, төменгі жағында $\cos\gamma \leq 0$.

2. Екіжақты $(S)$ беттің барлық нүктелерінде анықталған $F(x, y, z)$ функция берілсін.

Берілген $(S)$ бетті еркінше жүргізілген қисықтармен $n$ бөлшек $(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$ беттерге бөлеміз. Сонан кейін әрбір бөлшек $S_1$ беттің бойында жатқан кез келген $M_i(x_i, y_i, z_i)$ нүктені алып, осы нүктедегі функцияның мәнін табамыз да, оны бөлшек $S_1$ беттің ХОУ жазықтығына түскен проекциясына (оның ауданын $P_1$ арқылы белгілейік) көбейтіп, келесі қосындыны

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\, P_i \tag{10}$$

құрамыз.

Осы құрылған қосындыдағы $P_i$-дің таңбасы не оң, не теріс болуы мүмкін. Бөлшек $(S_1)$ беттің нүктелерінде оған жүргізілген нормаль $OZ$ осімен сүйір бұрыш құрса, онда $P_i$-дің таңбасы оң, доғал бұрыш құрса, онда оның таңбасы теріс.

Егер барлық бөлшек $(S_1)$ беттердің диаметрлері нольге ұмтылғанда (10) қосынды бір белгілі шекке ұмтылса, онда осы шекті $F(x, y, z)$ функцияның бет $(S)$ бойынша алынған II типті беттік интегралы деп атайды және оны былай белгілейді:

$$\iint\limits_{(s)} F(x,y,z)\ dx\, dx. \qquad (11)$$

Анықтамада айтылып отырған шек бетті бөлшектеу тәсіліне және $M_i$ нүктелердің сайланып алынуына ешбір тәуелді болмауы керек.

Егер (11) беттік интеграл беттің жоғарғы жағы бойынша алынса, онда оның таңбасы оң болады, егер беттің төменгі жағы бойынша алынса, онда оның таңбасы теріс болады.

(11) интеграл сияқты, төмендегі екі беттік интегралды да

$$\iint\limits_{(s)} F(x,y,z)\ dz\, dx, \iint\limits_{(s)} F(x,y,z)\ dy\, dz$$

анықтауға болады.

$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ $(S)$ беттің барлық нүктелерінде үздіксіз функциялар болсын. Сонда ІІ типті беттік интегралдың жалпы түрі мынадай болады:

$$\iint\limits_{(s)} P(x,y,z)\ dy\, dz + Q(x,y,z)\, dx\, dz + R(x,y,z) dx\, dy \qquad (12)$$

3. Қарастырып отырған $(S)$ бетті $OZ$ осіне параллель әрбір түзу тек бір-ақ нүктеде қиятын болсын және бұл бет ХОУ жазықтығына жай контурмен қоршалған $(D)$ облысына проекциялансын.

Айталық, осы бет

$$z = f(x,y)$$

теңдеумен берілсін. Мұнда $f(x,y) - (D)$ облысында анықталған және онда үздіксіз $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ туындылары бар функция.

Осы бет бойынша алынған ІІ типті (11) беттік интегралды $(D)$ облысы бойынша алынған қос интегралға келтіруге болады.

Берілген $(S)$ беттің жоғарғы жағын қарайық. Бұл бетті бөлшек беттерге жіктеп, (10) қосындыны құрамыз және ол қосындыны мына түрге келтіруге болады:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} F[x_i, y_i, f(x_i, y_i)]\, P_i.$$

Ал бұл қосынды мына

$$\iint\limits_{(D)} F[x,y,f(x,y)]dx\,dy$$

қос интеграл үшін интегралдық қосынды болып табылады.

Сонымен, егер функция $F(x,y,z)$ $(S)$ беттің бойында үздіксіз болса, онда

$$\iint\limits_{(s)} F(x,y,z)\ dx\,dy = \iint\limits_{(D)} F[x,y,f\ (x,y)]\,dx\,dy \quad (13)$$

Егер $(S)$ беттің төменгі жағын қарайтын болсақ, онда

$$\iint\limits_{(s)} F(x,y,z)\ dx\,dy = -\iint\limits_{(D)} F[x,y,f\ (x,y)]\,dx\,dy \quad (14)$$

Тағы бір ескерте кететін мәселе мынау: егер $(S)$ – жасаушылары $OZ$ осіне параллель цилиндрлік бет болса, онда

$$\iint\limits_{(s)} F(x,y,z)\ dx\,dy = 0, \quad (15)$$

бұлай болу себебі: бөлшек $(S_i)$ беттердің XOУ жазықтығына түскен проекцияларының ауданы нольге тең.

## § 4. I және II типті беттік интегралдардың арасындағы байланыс

Бет $(S)$ ашық $z = f(x,y)$ теңдеумен берілсін, осы беттің жоғарғы жағы бойынша алынған II типті (11) интегралды қарайық:

$$\iint\limits_{(s)} F(x,y,z)\ dx\,dy \quad (11)$$

Анықтама бойынша бұл интеграл мына

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} F(x_i,y_i,z_i)P_i \quad (10)$$

интегралдық қосындының шегі.

XX тараудың 8-параграфындағы (53) формула бойынша

$$s_i = \iint\limits_{(D_i)} \frac{dx\,dy}{cos\ \nu},$$

мұндағы $\gamma - (S_i)$ бетке жүргізілген нормаль мен $OZ$ осінің арасындағы сүйір бұрыш. Осы интегралға орта мән турасындағы теореманы қолданып, мынаны табамыз:

$$P_i = s_i \cos \nu_i$$

мұнда $\cos \nu_i, (D)$ облысының бір белгілі нүктесінде табылған. Осы мәнді (10) қосындыға апарып қойып, төмендегіні табамыз:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} F[x_i, y_i, z_i] \cos\ \nu_i \cdot s_i.$$

Барлық бөлшек $(S_i)$ беттердің диаметрлерін нольге ұмтылтып, алдымыздағы қосындыдан шек аламыз. Сонда

$$\iint\limits_{(s)} F(x,y,z)\ dx\, dy = \iint\limits_{(s)} F(x,y,z) \cos \nu\, ds. \qquad (16)$$

Осы қорытылып шыққан формула екі типті беттік интегралдардың арасындағы байланысты береді.

Беттік интегралдардың арасындағы байланыстың жалпы формуласы мына түрде болады:

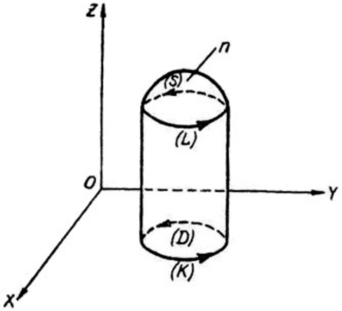
$$\iint\limits_{(s)} P(x,y,z)\ dy\, dz + Q(x,y,z) dz\, dx + R(x,y,z) dx\, dy =$$

$$\iint\limits_{(s)} P(x,y,z)\ \cos \lambda + Q(x,y,z) \cos \mu + R(x,y,z) \cos \nu] ds. \qquad (17)$$

## § 5. Стокс формуласы

**1.** Кеңістіктегі тұйық $(L)$ қисықпен қоршалынған дұрыс екіжақты бетті қарайық және оны $(S)$ арқылы белгілейік. $OZ$ осіне параллель түзулер осы қарастырылып отырған $(S)$ бетпен тек бір-ақ нүктеде қиылысатын болсын.

$(L)$ контурдың XOY жазықтығына түскен проекциясын $(K)$ арқылы белгілейік (146-чертеж). $(K)$ контурдың оң бағыты үшін сағат стрелкасына қарсы бағытты аламыз.



146-чертеж

$(L)$ контурдың бұған сәйкес бағытын оның оң бағыты деп аламыз.

Берілген $(S)$ бетке жүргізілген нормаль $OZ$ осімен сүйір бұрыш жасайтын болсын. Бұл бұрышты былай белгілейік:

$$\nu = (\widehat{\bar{n}, z}).$$

Өзінің ішіне $(S)$ бетті алып жатқан бір облыстың барлық нүктелерінде үздіксіз және үздіксіз бірінші ретті туындылары бар $P(x, y, z)$ функцияны қарайық.

Бет $(S)$ ашық $z = f(x, y)$ теңдеумен берілсін, мұнда $f(x, y)$ – контур $(K)$ мен қоршалынған ХОУ жазықтығында жатқан $(D)$ облысында анықталған үздіксіз және үздіксіз

$d = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ туындылары бар функция. Сонда

$$cos\lambda = \cos\left(\widehat{\bar{n}, X}\right) = \frac{p}{-\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$cos\mu = \cos\left(\widehat{\bar{n}, У}\right) = \frac{q}{-\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$cos\nu = \cos\left(\widehat{\bar{n}, Z}\right) = \frac{1}{+\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Бұл арадан

$$\cos\left(\widehat{\bar{n}, X}\right) = -p \cos(\widehat{\bar{n}, Z})\,; \ \cos\left(\widehat{\bar{n}, У}\right) = -q \cos(\widehat{\bar{n}, Z}). \qquad (18)$$

Контур $(L)$ бойынша алынған $P(x, y, z)$ функцияның кисық сызықты интегралын қарайық:

$$\int\limits_{(L)} P(x, y, z)\, dx \qquad (19)$$

Контур $(L)$ беттің бойында жатқандықтан, (19) интегралдың таңбасы ішіндегі $z$-ті $f(x, y)$ арқылы ауыстыруға болады. Сонда интеграл таңбасы ішіндегі функция мына түрге көшеді:

$P[x, y, f(x, y)]$, ал бұл функция тек екі $x, y$ айнымалының ғана функциясы болып табылады. $(K)$ контурдың айнымалы нүктелерінің абсциссаларымен ординаталары қандай болса, $(L)$ контурдың оларға сәйкес нүктелерінің абсциссалары мен ординаталары да сондай болады. Сондықтан контур $(L)$ бойынша интегралдауды контур $(K)$ бойынша интегралдаумен ауыстыруға болады:

$$\int\limits_{(L)} P(x, y, z) dx = \iint\limits_{(k)} P[x, y, f(x, y)]\, dx. \qquad (20)$$

(20) теңдіктің оң жағында тұрған интегралға Грин формуласын қолданайық. Сонда бұл интегралда

$P = P[x, y, f(x, y)]$, ал $Q = 0$.

$P[x, y, f(x, y)]$ – күрделі функция, олай болса,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, f(x, y))}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P(x, y, f(x, y))}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

Бұдан кейін Грин формуласы бойынша

$$\int_{(L)} P(x, y, z)dx = \iint_{D} \left[\frac{\partial P(x, y, f(x, y))}{\partial y} + q\frac{\partial P(x, y, f(x, y))}{\partial z}\right] dP.$$

Элемент $dP$ элемент $ds$-тің ХОУ жазықтығына түскен проекциясы, сондықтан

$$dP = ds \cdot \cos\left(\widehat{\bar{n}, Z}\right).$$

Ендеше

$$\int_{(L)} P(x, y, z)dx = -\iint_{(s)} \left[\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y}\cos\left(\widehat{\bar{n}, Z}\right) + \right.$$

$$\left. +\text{q}\cos\left(\widehat{\bar{n}, Z}\right)\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}\right] ds.$$

(18) формулалардың екіншісін еске алсақ, сонда

$$\int_{(L)} P(x, y, z)\, dx = \iint_{(s)} \left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos\left(\widehat{\bar{n}, \text{У}}\right) - \frac{\partial P}{\partial y} cos\ (\widehat{\bar{n}, Z})\right] ds. \qquad (21)$$

Егер $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – қаралып отырған бетті өзінің ішіне алып жатқан облыста үздіксіз және бірінші ретті үздіксіз дербес туындылары бар функциялар болса, онда (21) формула сияқты келесі формулаларды

$$\int_{(L)} Q(x, y, z)\, dy = \iint_{(s)} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\left(\widehat{\bar{n}, Z}\right) - \frac{\partial Q}{\partial z} cos\ (\widehat{\bar{n}, X})\right] ds, \qquad (22)$$

$$\int_{(L)} R(x, y, z)\, dz = \iint_{(s)} \left[\frac{\partial R}{\partial y}\cos\left(\widehat{\bar{n}, X}\right) - \frac{\partial R}{\partial x} cos\ (\widehat{\bar{n}, \text{У}})\right] ds, \qquad (23)$$

жазамыз.

Енді (21), (22) және (23) формулаларды қосып, келесі Стокс формуласын табамыз:

$$\int_{(L)} P(x, y, z)\, dx = Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)dz =$$

$$\iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\left(\widehat{\bar{n},X}\right)+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\left(\widehat{\bar{n},\text{У}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\widehat{\bar{n},Z}\right] ds. \qquad (24)$$

Бұл формула бетті қоршап тұрған тұйық контур бойымен алынған қисық сызықты интегралды сол беттің өзі бойынша алынған беттік интегралмен ұштастырады.

(24) теңдіктің оң жағында тұрған бірінші типті беттік интегралды II типті беттік интегралға көшіретін болса, онда

$$\int\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx = Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)dz =$$

$$\iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dz\,dx\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy. \qquad (25)\right.\right.$$

**2.** Стокс формуласын пайдаланып, кеңістіктегі қисық бойынша алынған қисық сызықты интегралдың интегралдау қисығының түріне тәуелсіздігін көрсетейік.

Кеңістіктегі (Т) облысында анықталған үздіксіз және үздіксіз дербес туындылары бар үш $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ функциялар берілсін. Осы (Т) облысында жатқан екі $A$ және $B$ нүктелерді алып, оларды $(C)$ қисықпен біріктірейік те, осы қисықтың бойымен алынған төмендегі қисық сызықты интегралды қарайық:

$$J = \int\limits_{(C)} P(x,y,z)\,dx = Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)dz. \qquad (26)$$

Егер $A$ мен $B$-ні сол облыстың ішінде жатқан басқа бір қисықпен біріктірсек, бұл (26) интегралдың мәніне әсер етпей ме? Міне, осыны шешу керек.

Кеңістіктегі қисықтың бойымен алынған қисық сызықты интеграл интегралдау қисығының түріне тәуелді болмай, тек ол қисықтың ұштарының координаталарына ғана тәуелді болу үшін, жазықтықтағы сияқты, кеңістіктегі $T$ облысының ішінде жатқан тұйық $(L)$ контурдың бойымен алынған мына

$$\int\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx = Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)dz \qquad (27)$$

қисық сызықты интегралдың нольге тең болуы қажетті және жеткілікті.

Осы тұйық контур $(L)$ арқылы бет жүргізейік, бұл бетті $(S)$ арқылы белгілейік. Сонда Стокс формуласы бойынша

$$\int\limits_{(L)} P(x,y,z)\,dx = Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dx \quad =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \Big[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \Big[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Жаңағы осының алдында айтылған ескертпе бойынша бұл теңдіктің сол жағы нольге тең болуы керек, сондықтан теңдіктің оң жағы да нольге тең. Ал теңдіктің оң жағы нольге тең болу үшін $(T)$ облысының барлық нүктелерінде төмендегі теңдіктер

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\,; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \tag{28}$$

орындалу керек.

Егер (28) шарттар орындалса, онда (27) интеграл нольге тең болады, демек, (26) интегралдың мәні интегралдау қисығының түріне тәуелді болмай, тек оның ұштарының координаталарына ғана тәуелді болу үшін (28) шарттар жеткілікті болып табылады. Бұл шарттардың қажетті екендігіне көз жеткізу қиын емес. Мәселен, $T$ облысының $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінде (28) шарттардың біреуі орындалмасын деп ұйғардық. Айталық, бұл нүктеде

$$\frac{\partial R}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial z} \quad \text{яғни} \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 2\sigma > 0.$$

$M_0$ нүктені кішкентай $(\Delta_0)$ аймақпен қоршайық. Сонда осы аймақтың барлық нүктелерінде мына теңсіздік

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} > \sigma$$

орындалуға тиіс, өйткені туындылар $\frac{\partial R}{\partial y}$ және $\frac{\partial Q}{\partial z}$ үздіксіз.

Енді $M_0$ нүкте арқылы $YOZ$ жазықтығына параллель етіп $x = x_0$ жазықтығын жүргізейік те, осы жазықтықта жатқан радиусы $\delta$, кішкентай $(CL_0)$ шеңберін қарайық. Осы шеңбер қоршап тұрған сфераны $(S_0)$ деп белгілесек, онда

$$\iint\limits_{(S_0)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz > \sigma \cdot 4\pi\delta^2 > 0,$$

мұнда $(S_0)$, $(T)$ облысының ішінде жатады.

Стокс формуласы бойынша

$$\int\limits_{(L_0)} P(x,y,z)\,dx = Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)dz =$$

$$\iint\limits_{(s_0)} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz,$$

бұлай болу себебі (28) шарттар бойынша басқа мүшелер нольге тең.

Сонымен, кейінгі теңсіздіктен мынадай қорытындыға келеміз: тұйық $(CL_0)$ контур бойынша алынған қисық сызықты интеграл нольге тең болмайды. Осы жағдайдың орындалуы (28) шарттардың қажеттілігін дәлелдейді.

Сөйтіп, $(T)$ облысының ішінде жатқан тұйық $(L)$ контуры бойынша алынған қисық сызықты интеграл

$$\int\limits_{(1)} P(x,y,z)\,dx = Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)dz$$

нольге тең болу үшін $(T)$ облыстың барлық нүктелерінде (28) шарттардың орындалуы қажетті және жеткілікті.

1-мысал. Төмендегі қисық сызықты интегралды

$$I = \int\limits_{(L)} (y^2+z^2)dx + (x^2+z^2)dy + (x^2+y^2)\,dz$$

қарайық, мұнда $(L)$ мына $x^2+y^2+z^2 = 2R\,x$ сферамен, $x^2 + {}+ y^2 = 2ax$ цилиндрдің қиылысу сызығы $(R > a,\ z > 0)$. Стокс формуласын осы мысал жүзінде тексеру керек.

Алдымен берілген интегралдың мәнін есептеп шығарайық, ол үшін былай ұйғарайық:

$$x = a + a\,cost \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

Онда цилиндрдің теңдеуінен мынанын табамыз:

$$y = a\sin t.$$

Сфераның теңдеуінен

$$z = \sqrt{2Ra - a^2}\,\sqrt{1+\cos t}$$

$$J = \int_0^{2\pi} \{[a^2 sin^2 t + (2Ra - 2a^2)(1 + cost)](-a\sin t) +$$

$$+[a^2(1+\cos t)^2 + (2Ra - 2a^2)(1+\cos t)]\,a\,cos +$$

$$+[a^2(1+\cos t)^2+a^2sin^2t]\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2Ra-2a^2}{1+\cos t}(-\sin t)\}dt} =$$
$$= 2\pi Ra^2$$

Екінші жағына:

$$P(x,y,z)\ = y^2+z^2,\qquad Q(x,y,z) = x^2+z^2,$$
$$P(x,y,z)\ = x^2+y^2$$
$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=2(y-z),\ \ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}-2(z-x),$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2(x-y).$$

Стокс формуласы бойынша қарастырылған қисық сызықты интегралға сәйкес келетін беттік интеграл мынадай болады:

$$H=2\iint\limits_{(s)}(y-z)\ dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy.$$

Енді осы беттік интегралдың мәнін табайық, ол үшін оны бірінші типті беттік интегралға көшірсек, сонда

$$H=2\iint\limits_{(s)}[(y-z)\,cos\lambda+(z-x)cos\mu+(x-y)cos\,\nu]\,ds,$$

ал

$$cos\lambda=\frac{x-R}{R},\qquad cos\mu=\frac{y}{R},\qquad cos\,\nu=\frac{z}{R}.$$

Олай болса

$$H=2\iint\limits_{(s)}(z-y)\ ds.$$

$XOZ$ жазықтығына қарағанда бет $(S)$ симметриялы, сондықтан

$$\iint\limits_{(s)}yds=0.$$

Ендеше

$$H=2\iint\limits_{(s)}zds.$$

Қайтадан екінші типті беттік интегралға көшейік. Сонда:

$$H = 2\iint\limits_{(s)} \frac{z}{cos\ v} dxdy = 2\iint\limits_{(s)} \frac{z}{\frac{z}{R}}\ dxdy = 2R\iint\limits_{(s)} dxdy = 2\pi a^2 R.$$

Сонымен, $H = J$. Стокс формуласы орындалады.

### *Жаттығулар*

**1. Мына интеграл**

$$\int\limits_{(D)} \frac{(x + y + 2z)dx + ax + by + cz) + dy + (bx + my + nz)dz}{(x + y + z)^2}$$

кез келген тұйық $(L)$ контурдың бойымен нольге тең болатындай етіп $a, b, c, l, m, n$ коэффициенттерін сайлап алу керек.

Жауабы: $a = b = n = 1;\ \ i = m = 0;\ \ c = 2.$

**2.** Мына интеграл

$$\int\limits_{(L)} ydx + zdy + xdz$$

үшін Стокс формуласын тексеру керек. $(L)$ – төмендегі теңдеулерден $x = Rcos^2 t, y = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin 2\ t,\ z = R\ sin^2 t$ берілген шеңбер.

3. Мына

$$\iint\limits_{(S)} \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}$$

беттік интегралды есептеп шығару керек. $(S)$ беті $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоидтың сыртқы жағы.

Жауабы: $\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$

4. Мына

$$\iint\limits_{(S)} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$$

беттік интегралды есептеу керек. $(S)$ – төмендегі теңдеумен $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ берілген сфера.

Жауабы:$\frac{8}{3}\pi(a + b + c)R^3.$

5. $\iint\limits_{(S)} x^2y^2zdxdy$

беттік интегралдың мәнін табу керек, егер $(s)$ – келесі теңдеумен $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ берілген сфераның төменгі жағы болса.

6. $\iint\limits_{(s)} z^2dxdy, (s) - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

эллипсоидтың сыртқы жағы болса.

7. Тік біртектес дөңгелек конустың бүйір беті оның табанының центріндегі нүктені қандай күшпен тартады?

Жауабы: $F_x = F_{\bar{y}} = 0, Fz = \frac{2\pi}{l}(R + h) - \frac{2\pi Rh}{l^I} ln \frac{h(l+h)}{R(l-R)}$,

мұнда $l = \sqrt{h^2 + R^2}$.

8. Біртектес тік дөңгелек цилиндрдің бүйір беті оның табанының центріндегі нүктені қандай күшпен тартады, соны есептеу керек.

Жауабы: $F_x = F_y = 0, F_z = 2\pi\ R\ \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$.

9. Тік дөңгелек цилиндр осінің ортасына түскен бүйір бетінің ньютондық потенциалын табу керек.

Жауабы: $2\pi\ R\ ln\ \left(\frac{4R^2+h^2+h}{4R^2+h^2-h}\right)$.

10. Тік дөңгелек конус табанының ортасына бүйір бетінің ньютондық потенциалын табу керек.

Жауабы: $\frac{2\pi\ R}{l}(R - h) + \frac{2xRh^2}{l^2} ln \frac{R(R+l)}{h(l-h)}$

мұнда $l = \sqrt{R^2 + h^2}$.

# XXII ТАРАУ
# ҮШ ЕСЕЛІК ИНТЕГРАЛДАР

## § 1. Үш еселік интегралдың анықтамасы және оның болу шарттары

1. Қос интеграл қалай анықталса, үш еселік интеграл да дәл солай анықталады.

Қос интегралдағы ауданның ролін, мұнда көлем атқарады. Сондықтан көлем деп біз нені түсінуіміз керек, соған біраз тоқтауға тура келеді.

Әрбір тұйық бет $(S)$ бүкіл кеңістікті екі түрлі облысқа бөледі: ішкі облыс $(T)$, сыртқы облыс $(T')$ бір облыстың түрлі екі нүктесін оның сыртына шықпай сынық сызықпен біріктіруге болады, ал түрлі екі облыстың нүктелерін біріктіруші сынық сызықтың $(S)$ бетпен ең болмағанда бір ортақ нүктесі болады.

Міне, осы сияқтанған облыстың көлемін анықтауға көшейік.

Шекарасы саны шектеулі жазық көпбұрыштардан тұратын шектелген әрбір облысты көпжақты облыс деп атаймыз.

Осы жазық көпбұрыштарды жақтар деп атайды.

Көпжақты облыстардың көлемдерін анықтау және есептеп шығару бізге орта мектепте жүретін элементар математикадан белгілі.

Бізге $(P)$ және $(R)$ екі көпжақты облыс берілсін, бұлардың біріншісінің ішінде облыс $(T)$ жататын болсын, ал $(T)$ облыстың ішінде $(Q)$ көпжақты облыс жатсын.

$V_p$ – көпжақты $(P)$ облысының көлемі, ал $V_q$ – көпжақты $(Q)$ облысының көлемі болсын.

Әрқашан да $V_q < V_p$ бұл өзінен-өзі айқын. Осы теңсіздіктен мынадай қорытындыға келуге болады: мына $V_q$ сандарынан тұратын жиынның дәл жоғарғы шекаралығы болады, оны $l$ арқылы белгілейік, ал $V$ сандарынан құрылатын жиынның дәл төменгі шекаралығы болады, оны $(L)$ деп белгілейік, сонда $l \leq L$.

Егер $l = L = V$ болса, онда бұл $V$ санын $(T)$ облысының көлемі үшін алады.

$(T)$ *облысының көлемі болу үшін алдын ала берілген оң* $\varepsilon$ *саны қаншама аз болса да осыған сәйкес екі көпжақты облыстар* $(P)$ *және* $(Q)$ *табылып, екеуінің көлемдерінің айырмасы* $V_p - V_q$ *осы* $\varepsilon$ *санынан аз болуы (яғни* $V_p - V_q < \varepsilon$*) қажетті және жеткілікті.*

Ауданды анықтағанда осындай теореманы қалай дәлелдедік, бұл да солай дәлелденеді.

Мұнда $(T)$ облысы $(P)$ көпжақты облыстың ішінде жатады да, ал көпжақты облыс $(Q)$, $(T)$ облысының ішінде жатады.

Егер $(T)$ облысы бірнеше $(T_1), (T_2), (T_3), \dots, (T_n)$ облыстарға жіктелсе және бұл облыстардың көлемдері $V_1, V_2 \dots, V_n$ болса, онда $(T)$ облысының көлемі болады:

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n.$$

$(T)$ облысының көлемін былай анықтауға да болады.

Алдымен облыстың өзін координаталық системаға келтіреміз. Сонан кейін оны мынадай $R\,[a, b; c, d; e, k]$ параллелепипедпен қоршаймыз. Параллелепипедтаң қырлары координаталар осьтеріне параллель деп есептейміз.

$R\,[a, b; c, d; e, k]$ параллелепипедті координаталар осьтеріне параллель жазықтықтармен бірнеше мәселен $n$, параллелепипедтерге $Ri$ $(i = 1,2, \dots, n)$ бөлшектейміз.

Сонда осы бөлшек параллелепипедтердің арасында $(T)$ облысының шекарасы $(S)$ пен ешбір сүйкеспей, облыстың ішінде бүтіндей жататындары бар. Мұндай бөлшек параллелепипедтердің жиынын $\{M\}$ деп белгілейік.

Жаңағы айтылып отырған бөлшек параллелепипедтердің ішінде $(T)$ облысымен ең болмағанда бір ортақ нүктесі бар параллелепипедтер бар. Мұндай параллелепипедтің жиынын $\{N\}$ арқылы белгілейік.

$\{M\}$ жиынын құратын бөлшек параллелепипедтер көлемдерінің қосындысын $V_M$ арқылы, ал $N$ жиынын құратын параллелепипедтердің көлемдерінің қосындысын $V_N$ арқылы белгілесек, онда $V_M \leq V_N$, бұл теңсіздік өзінен-өзі айқын.

Егер $Sup\, V_M = inf\, V_N = V$, онда осы $V$ санын $(T)$ облысының көлемі үшін аламыз.

Ашық $z = f(x, y)$ теңдеумен кескінделетін әрбір бетті жай бет деп атаймыз, мұнда $f(x, y)$ екі $x, y$ айнымалылардың үздіксіз функциясы.

Жай бетпен қоршалынған дененің немесе облыстың әрқашанда шектеулі көлемі болады.

2. Жай $(S)$ бетпен қоршалынған $(T)$ облысында анықталған және облыстың ешбір нүктесінде шексіздікке айналмайтын $F(x, y, z)$ функцияны қарайық.

$(T)$ облысын жай беттердің көмегімен $n$ бөлшек $(T_1), (T_2), \dots, (T_n)$ облыстарға бөлейік. Бұл бөлшек облыстардың көлемдері $\upsilon_1, \upsilon_2 \dots, \upsilon_n$ болсын.

Әрбір бөлшек $(T_i)$ облысында жатқан $(x_i, y_i, z_i)$ нүктені еркімізше сайлап алайық та, $F(x, y, z)$ функцияның осы нүктедегі $F(x_i, y_i, z_i)$ мәнін тауып, сонан кейін оны $\upsilon_1$ көлемге көбейтіп, келесі қосындыны құрайық:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\, \upsilon_i. \tag{1}$$

Егер барлық бөлшек $(T_i)$ облыстардың диаметрлері нольге ұмтылғанда (1) қосынды белгілі бір шекке ұмтылса, онда осы шекті $F(x, y, z)$ функцияның $(T)$ облысы бойынша алынған үш еселік интегралы деп атайды, және оны белгілейді:

$$\iiint\limits_{(T)} F(x, y, z) dx\, dy\, d\upsilon,$$

немесе

$$\iiint\limits_{(T)} F(x,y,z)dx\,dy\,dz,$$

кейде

$$\iiint\limits_{(T)} F(M)dv.$$

Осы анықтамада айтылып отырған шек облысты жіктеу тәсіліне және $(x_i, y_i, z_i)$ нүктенің қалай сайланып алынуына ешбір тәуелсіз болуы керек.

3. Үш еселік интеграл механиканың физиканың және техниканың көп мәселелерінде кездеседі.

Жаңағы анықталған үш еселік интегралға тиісті мағына беру үшін келесі механикалық есепті қарайық.

Облыс $(T)$ – әртектес заттардан тұратын дене болсын және $\mu\ (x,y,z)$ оның тығыздығы болсын.

Осы дененің бүкіл массасын табу керек. Ол үшін $(T)$ денені бірнеше ұсақ $(T_1), (T_2), \dots (T_n)$ денелерге бөлшектейміз. Әрбір $(T_1)$ бөлшек дененің ішінде немесе бойында жатқан $(x_i, y_i, z_i)$ нүктені еркімізше сайлап аламыз. Егер бұл бөлшек дененің мөлшері тым аз болса, онда мұндағы массаның тығыздығын тұрақты деп қарауға болады. Олай болса, осы бөлшек $(T)$ дене массасының жуық мәні

$$\mu(x_i, y_i, z_i)v_i$$

болады.

Мұнда $v_i$ – дененің көлемі.

Бүкіл $(T)$ дене массасының жуық мәні

$$M = \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i, y_i, z_i)\ v_i. \qquad (2)$$

болады.

Дене массасының дәл мәнін табу үшін, барлық бөлшек денелердің диаметрлерін нольге ұмтылтып (2) қосындыдан шек аламыз. Сонда, жоғарыдағы берілген анықтама бойынша

$$M = \iiint\limits_{(T)} \mu(x,y,z)\ dv = \iiint\limits_{(T)} \mu(x,y,z)\ dx\,dy\,dz.$$

4. Енді үш еселік интегралдың бар болу шарттарын тағайындайық.

$$M_i = \sup_{(\mathrm{Ti})} F(x,y,z), \qquad mi = \inf_{(\mathrm{Ti})} F\,(x,y,z) \text{ болсын.}$$

Келесі екі қосындыны құрайық:

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i v_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i.$$

Бұл қосындыларды Дарбудың жоғарғы және төменгі қосындылары деп атайды.

Шектелген функция $F(x,y,z)$, $(T)$ облысында интегралдану үшін, барлық бөлшек $(T_i)$ облыстардың диаметрлері нольге ұмтылғанда Дарбу қосындылары айырмасының $S - s$ нольге ұмтылуы қажетті және жеткілікті шарт болып табылады.

Қос интеграл, немесе анықталған интегралдар үшін бұл теорема қалай дәлелденсе, үш еселік интеграл үшін де дәл солай дәлелденеді. Сондықтан келтірілген теореманың дәлелдеуіне тоқтамаймыз, керек болса, оқушылар өздері де дәлелдей алады.

Тұжырымдалған теоремадан келесі салдарлар шығады: *әрбір үздіксіз функцияның үш еселік интегралы әрқашан да болады; егер* $(T)$ *облысында функция* $F(x,y,z)$ *интегралданатын болса және ол функцияның мәндерін жай бет нүктелерінде еркімізше өзгертетін болсақ, онда мұның нәтижесінде пайда болған жаңа функция* $F_1(x,y,z)$ *интегралданатын болады және оның* $(T)$ *облысы бойынша алынған интегралы* $F(x,y,z)$ *функцияның осы облыс бойынша алынған интегралына тең болады.*

## § 2. Үш еселік интегралдардың жай қасиеттері

Анықталған және қос интегралдарға тән қасиеттер үш еселік интегралдарға да тән болады. Енді осы қасиеттерді санап шығайық.

а) Егер облыс $(T)$ жай бетпен қоршалынған болса, онда

$$\iiint\limits_{(T)} dv = \iiint\limits_{(T)} dx\,dy\,dz = v.$$

б) Интегралданатын функциялардың қосындысы да интегралданатын болады және

$$\iiint\limits_{(T)} [f(M) + \mathrm{g}(M)]dv = \iiint\limits_{(T)} f(M)dv + \iiint\limits_{(T)} \mathrm{g}(M)dv.$$

в) Тұрақты санды интеграл таңбасының сыртына шығаруға және оның ішіне енгізуге болады:

$$\iiint\limits_{(T)} kF(M)dv = k\iiint\limits_{(T)} F(M)dv.$$

г) Егер облыс $(T)$ екі $(T_1)$ және $(T_2)$ бөліктерге жіктелсе және функция $F(x, y, z)$ бүкіл $(T)$ облысында интегралданса, онда ол $(T_1)$ және $(T_2)$ облыстарында да интегралданатын болады; егер функция $F(x, y, z)$ жаңағы облыстардың әрқайсысында интегралданатын болса, онда ол бүкіл $(T)$ облысында интегралданатын болады, және

$$\iiint\limits_{(T)} F(M)\,dv = \iiint\limits_{(T_1)} F(M)dv + \iiint\limits_{(T_2)} F(M)dv.$$

д) Егер облысында анықталған және интегралданатын екі функция $f(x, y, z)$ және $\mathrm{g}(x, y, z)$ облыстың барлық нүктелерінде келесі теңсіздікті

$$f(x, y, z) \le \mathrm{g}(x, y, z)$$

қанағаттандыратын болса, онда

$$\iiint\limits_{(T)} f(x, y, z)\,dv \le \iiint\limits_{(T)} \mathrm{g}(x, y, z)dv.$$

е) Егер $(T)$ облысында интегралданатын функция $F(x, y, z)$ осы облыстың барлық нүктелерінде төмендегі теңсіздіктерді

$$m \le F(x, y, z) \le M$$

қанағаттандыратын болса, онда

$$\iiint\limits_{(T)} F(x, y, z)dv = \mu v,$$

мұнда $\mu$ мына $m$ мен $M$-нің арасында жатқан сан, яғни

$$m \le \mu \le M.$$

Егер функция $F(x, y, z), (T)$ облысында үздіксіз болса, онда

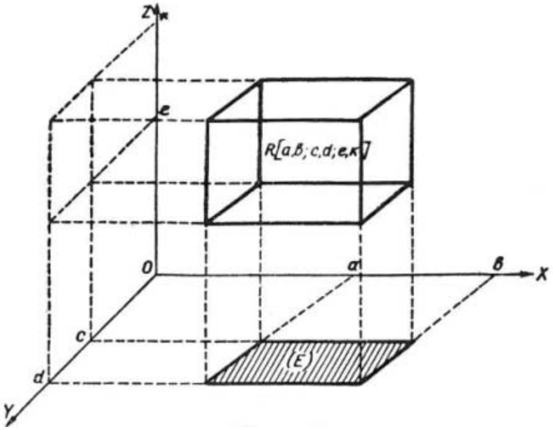
$$\iiint\limits_{(T)} F(x, y, z)dv = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})v,$$

мұнда $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$– $(T)$ облысының бір тиянақты нүктесі.

Осы кейінгі қасиетті үш еселік интегралдың орта мәні турасындағы теорема деп атайды.

## § 3. Үш еселік интегралды есептеп шығару тәсілі

1. Қарастырылып отырған функция $F(x, y, z)$ $R\ [a, b; c, d; e, k]$ параллелепипедтің нүктелерінде анықталсын (147-чертеж).



147-чертеж

**Теорема.** *Егер мына үш еселік интеграл*

$$J = \iiint\limits_{(R)} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

*және жай анықталған*

$$\int\limits_{e}^{k} F(x, y, z)\ dz$$

*интегралдың мына қос интегралы:*

$$H = \iint\limits_{(E)} dx\, dy \int\limits_{e}^{k} F(x, y, z) dz$$

*бар болса, онда бұл интегралдар өзара тең, яғни*

$$\iiint\limits_{(R)} F(x, y, z) dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(E)} dx\, dy \int\limits_{e}^{k} F(x, y, z) dz,$$

мұнда тік төртбұрыш $(E)$ параллелепипедтің $XOY$ жазықтығына түскен проекциясы болып табылады.

Бұл теореманы дәлелдеу үшін $[a, b], [c, d], [e, k]$ аралықтарын төмендегі тәртіппен

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d,$$
$$c = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{p-1} < z_p = k$$

орналасқан нүктелермен бөлшек сегменттерге бөлеміз. Егер әрбір бөлу $x_i, y_\lambda, z_j$ нүктелер арқылы координаталық осьтерге параллель жазықтықтар жүргізсек, онда параллелепипед $m \cdot n \cdot p$ бөлшек $R_i, \lambda, j$ параллелепипедтерге жіктеледі.

$mi, \lambda, j = \inf\limits_{R_i, \lambda, j} F(x, y, z), \quad Mi, \lambda, j = \sup\limits_{R_i, \lambda, j} F\,(x, y, z)$ болсын.

Егер $(x, y, z)$ бөлшек $R_{i,\lambda,j}$ параллелепипедтің кез келген нүктесі болса, онда төмендегі теңсіздіктер

$$m_1, \lambda, j \leq F(x, y, z) \leq M_i, \lambda, j$$

орындалады.

$x$ пен $y$-ті тұрақты деп қарап, осы теңсіздіктерді $z$ бойыша $z_j$-ден $z_{j+1}$-ге дейін интегралдасақ, онда

$$m_1, \lambda, j\Delta\, z_j \leq \int\limits_{z_j}^{z_{j+1}} F(x, y, z) \leq M_{m_1,\lambda,j}\, \Delta z_j.$$

$j$-ге 0-ден $p - 1$-ге дейін мәндер беріп кейінгі теңсіздіктерді қосындылаймыз. Сонда

$$\sum_{i=0}^{p-1} m_{1,\lambda,j}\, \Delta\, z_j \leq \int\limits_{e}^{k} F(x, y, z) dz \leq \sum_{j=0}^{p-1} M_{1,\lambda,j}\, \Delta\, z_j.$$

Бұл теңсіздіктер мына $E_{\mathrm{i},\lambda}\, [\mathrm{x_i}, \mathrm{x_{i+1}};\ \mathrm{y_\lambda}, \mathrm{y_{\lambda+1}}]$ тік бұрышты төртбұрыштың ішінде жатқан әрбір $(x, y)$ нүкте үшін дұрыс болады. Олай болса, жаңағы теңсіздіктердің барлық жақтарын $E_{\mathrm{i},\lambda}$ облысы бойынша интегралдауға болады. Сонда

$$\sum_{j=0}^{p-1} m_{1,\lambda,j} \Delta\, x_i\, \Delta y_\lambda \Delta z_j \leq \iint\limits_{(E_i,\lambda)} dx\, dy \int\limits_{e}^{k} F(x, y, z) dz \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{p-1} M_i \lambda, j \Delta x_i \Delta y_\lambda\, \Delta zj.$$

$i$-ге 0-ден $n - 1$-ге дейін, ал $\lambda$-ға 0-ден $m - 1$-ге дейін мәндеп беріп, сонан кейін қосындылап мынаны табамыз:

$$s \le \iint\limits_{(E)} dx\,dy \int\limits_{e}^{k} F(x,y,z)dz \le S,$$

мұнда $s$ және $S$ – Дарбу қосындылары.

Егер барлық бөлшек $R_{i,\lambda,j}$ параллелепипедтердің диагональдары нольге ұмтылса, онда қосындылар $s$ және $S$ бір шекке, яғни $J$-ге ұмтылады. Сондықтан

$$\iiint\limits_{(R)} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(E)} dx\,dy \int\limits_{e}^{k} F(x,y,z)dz.$$

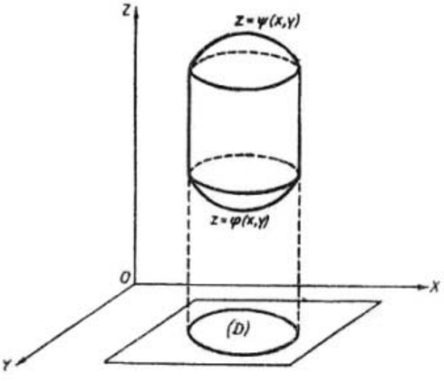
Егер функция $F(x,y,z)$ мына $R[a,b;c,d;e,k]$ параллелепипедте үздіксіз болса, онда

$$\iiint\limits_{(R)} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{e}^{k} F(x,y,z)\,dz. \qquad (3)$$

2. Төмендегі екі теңдеумен

$$z = \varphi(x,y),\ \ z = \psi(x,y)$$
$$[\varphi(x,y) \le \psi(x,y)]$$

берілген беттермен, жасаушылары $OZ$ осіне параллель цилиндрмен қоршалынған $(T)$ облысы берілсін (148-чертеж). Мұнда $\varphi(x,y)$ және $\psi(x,y)$ жай контурмен қоршалынған, $XOУ$ жазықтығындағы $(D)$ облысында анықталған және бұл облыста үздіксіз функциялар.



148-чертеж

$(D)$ облысының контуры, жаңағы осының алдында айтылып отырған цилиндрлік беттің бағыттаушысы болып табылады.

$F(x,y,z)$ – осы $(T)$ облысында берілген үздіксіз функция болсын. Келесі үш еселік интегралды

$$J = \iiint\limits_{(T)} F(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

және анықталған интегралдың қос интегралын

$$H = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} F(x, y, z)\, dz$$

құрайық.

Осы құрылған интегралдар бір-біріне тең:

$$\iiint\limits_{(T)} F(x, y, z)\ dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(D)} dx\, dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} F(x, y, z) dz \qquad (4)$$

Бұл формуланың дұрыстығын дәлелдеу үшін $(T)$ облысын, қырлары координаталар осьтеріне параллель $R[a, b; c, d; e, k]$ параллелепипедпен қоршаймыз да, келесі $F_1(x, y, z)$ көмекші функцияны былай анықтаймыз:

$$F_1(x, y, z) = \begin{cases} F\ (x, y, z), \text{егер нүктелер } (x, y, z)\ (T) \text{ облысына} \\ \text{ жатса,} \\ 0 \text{ егер нүктелер } (x, y, z)\ (T) \text{ облысының сыртында} \\ \text{болса, бірақ } R \text{ облысының ішінде жатса.} \end{cases}$$

Сонда

$$\iiint\limits_{(R)} F_1(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{(T)} F_1(x, y, z) dx\, dy\, dz + $$
$$+ \iiint\limits_{(R-T)} F_1(x, y, z) dz.$$

Көмекші $F_1(x, y, z)$ функцияның құрылуы бойынша

$$\iiint\limits_{(R)} F_1(x, y, z) dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{(T)} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \qquad (5)$$

Екінші жағынан

$$\iiint\limits_{(R)} F_1(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(E)} dx\, dy \int\limits_{e}^{k} F_1\, (x, y, z)\ dz. \qquad (6)$$

Ал

$$\int\limits_{e}^{k} F_1(x, y, z) dz = \int\limits_{e}^{\varphi(x,y)} F_1(x, y, z)\, dz + \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} F_1(x, y, z) dz +$$

$$+ \iiint_{\psi(x,y)}^{k} F_1(x,y,z)dz.$$

Көмекші $F_1(x,y,z)$ функцияның қалай құрылғанын еске алсақ сонда

$$\int_{e}^{k} F_1(x,y,z)dz = \int_{\varphi(x,y)}^{\varphi(x,y)} F(x,y,z)\, dz.$$

Ендеше (6) теңдік мына түрге көшеді:

$$\iiint_{(R)} F_1(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{(E)} dx\, dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} F_1\,(x,y,z)\ dz. \quad (7)$$

(7) теңдіктің оң жағында тұрған қос интеграл $XOУ$ жазықтығындағы тік төртбұрыш $(E)$ бойынша алынған. Ал $(D)$ облысы осы $(E)$ тік төртбұрыштың ішінде жатыр. Мына интегралды

$\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} (x,y,z)\, dz$ уақытша $\varPhi(x,y)$ арқылы белгілейік,

$$\text{яғни} \quad \varPhi(x,y) = \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} F\,(x,y,z)\, dz.$$

Сонда

$$\iiint_{(R)} F_1(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{(E)} \Phi\,(x,y)dx\, dy. \quad (8)$$

Енді тағы да көмекші $\Phi_1(x,y)$ функцияны былай құрамыз:

$$\varPhi_1(x,y) = \begin{cases} \varPhi(x,y), \text{егер нүкте } (x,y), (D) \text{ облысында жатса,} \\ 0, \text{егер нүкте } (x,y), (D) \text{ облысының сыртында} \\ \text{болса, бірақ } (E) \text{ тік төртбұрштың ішінде жатса.} \end{cases}$$

Онда

$$\iint_{(E)} \Phi\,(x,y)dx\, dy = \iint_{(D)} \Phi(x,y)dx\, dy$$

болатыны бізге қос интеграл теориясынан белгілі. Сондықтан

$$\iiint\limits_{(R)} F_1(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(D)} \Phi\,(x,y)dx\,dy = \qquad (9)$$

$$= \iint\limits_{(D)} dx\,dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} F(x,y,z)dz.$$

(5) теңдіктің сол жағын (9) теңдіктің сол жағымен салыстырсақ, сонда:

$$\iiint\limits_{(T)} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(D)} dx\,dx \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} F\,(x,y,z)\;dz. \quad (4)$$

Сонымен, (4) формула дәлелденді.

Егер облыс $(D)$ мына $y = y_1(x), y = y_2(x)$ үздіксіз қисықтармен және $x = a, x = b$ түзулермен қоршалынса (мұнда $a$ мен b-нің арасындағы барлық $x$-тер үшін $y_1(x), \leq y_2(x)$), онда

$$\iiint\limits_{(T)} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{(a)}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} F\,(x,y,z)\;dz. \quad (10)$$

(4) немесе (10) формуланы қалай пайдалану керек, соны көрсету үшін бір мысал келтірейік.

Мысал. Мына $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сфераның бірінші октантта жатқан бөлігі бойынша алынған келесі

$$\iiint\limits_{(T)} z\,d\,x\,d\,y\,d\,z$$

үш еселік интегралды есептеп шығару керек.

Бұл есепті шығару үшін (10) формуланы қолданамыз. Ол формула бойынша алдымен $z$, онан кейін $y$, ең ақырында $x$ бойынша интегралдау керек. Сондықтан интегралдау шектері мынадай: егер $x$ пен $y$-ті тұрақты деп қарасақ, онда айнымалы $z$ нольден $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$-қа дейін өзгереді; сонан кейін $x$-ті тұрақты деп қарасақ, онда айнымалы $y$ нольден $\sqrt{R^2 - x^2}$-қа дейін өзгереді, ал $x$-тің өзі нольден $R$-ге дейін өзгереді.

Сонымен

$$\iiint\limits_{(T)} z\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{R^2-x^2-y^2} z\,dz.$$

Алдымен ішкі интегралды алайық:

$$\int_{0}^{R^2-x^2-y^2} z\,dz = \frac{1}{2}(R^2-x^2-y^2),$$

онан кейін

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} (R^2-x^2-y^2)\,dy = \left[\frac{1}{2}(R^2-x^2)y - \frac{1}{6}y^3\right]^{\sqrt{R^2-x^2}} 0 =$$

$$= \frac{1}{3}(R^2-x^2)^3/_2,$$

бұдан соң

$$\frac{1}{3}\int_{0}^{R} (R^2-x^2)^3/_2\,dx,$$

бұл интегралдағы айнымалы $x$-ті былай ауыстырамыз:
$x = R\,cos\varphi,$ сонда

$$\frac{1}{3}\int_{0}^{R} (R^2-x^2)^3/_2\,dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} R^4\,sin^4\varphi d\varphi = \frac{\pi R^4}{16}.$$

Ақырында

$$\iiint\limits_{(T)} z\,dx\,dy\,dz = \frac{\pi R^4}{16}.$$

2. Материалды дененің нүктені өзіне тарту күші келесі үш еселік интегралдармен

$$F_x = \iiint\limits_{(T)} \frac{x-\xi}{r^3}dv;\ Fy = \iiint\limits_{(T)} \frac{y-\eta}{r^3}dv;\ F_z = \iiint\limits_{(T)} \frac{z-\varsigma}{r^3}dv$$

анықталады; ал дененің нүктеге әсер ететін ньютондық потенциалы былай анықталады:

$$H(\xi,\eta,\varsigma) \iiint\limits_{(T)} \frac{dv}{r}.$$

Осы келтірілген формулалардағы

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}.$$

## § 4. Остроградский формуласы

$OZ$ осіне параллель әрбір түзумен тек екі-ақ (екіден артық емес) нүктеде қиылысатын тұйық $(S)$ бетті қарайық. $(T)$ – осы бетпен қоршалынған облыс болсын.

Тұйық $(C)$ контурмен қоршалынған $(D)$ облысы $XOY$ жазықтығына түскен $(S)$ беттің ортогональ проекциясы болсын. $(T)$ облысында анықталған және осы облыста өзінің $z$ бойынша алынған дербес туындысымен бірге үздіксіз $R(x, y, z)$ функцияны қарайық. Сонда $(D)$ облысының әрбір $(x, y)$ нүктесіне $(S)$ беттің екі нүктесі сәйкес келеді, олардың біреуінің апликатасы $z_1 = \varphi_1(x, y)$, ал екіншісінің апликатасы $z_2 = \varphi_2(x, y)$. Сонымен, бет $(S)$ екі $(S_1)$ және $(S_2)$ бөлікке бөлінетін болды; $z_1 < z_2$ болсын деп ұйғардық.

Мына үш еселік интегралды қарастырайық:

$$\iiint\limits_{(T)} \frac{\partial R}{\partial z} dx\, dy\, dz.$$

Осы параграфтың алдындағы үшінші параграф бойынша

$$\iiint\limits_{(T)} \frac{\partial R}{\partial z} dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(D)} dx\, dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_{(D)} [R(x, y, \varphi_2(x, y) - R(x, y, \varphi_1] dxdy.$$

Ал

$$\iint\limits_{(D)} R[x, y, \varphi_2(x, y)] dx\, dy = \iint\limits_{(s_2)} R(x, y, z) dxdy,$$

$$\iint\limits_{(D)} R[x, y, \varphi_1(x, y)] dx\, dy = - \iint\limits_{(s_1)} R(x, y, z)\, dxdy.$$

Кейінгі теңдіктің оң жағындағы беттік интегралдың алдында минус тұрған себебі, интеграл $(S)$ беттің төменгі жағы бойынша алынады. Сонымен,

$$\iiint\limits_{(T)} \frac{\partial R}{\partial z} dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(s_1)} R(x, y, z) dx\, dy + \iint\limits_{(S_2)} R(x, y, z)\, dy\, dz$$

немесе

$$\iiint\limits_{(T)} \frac{\partial R}{\partial z} dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(s)} R(x,y,z) dxdy \qquad (11)$$

(11) теңдіктің оң жағында тұрған беттік интеграл $(S)$ беттің сыртқы жағы бойынша алынған.

$P(x,y,z), Q(x,y,z)$ осы $(T)$ облысында берілген үздіксіз және үздіксіз бірінші ретті дербес туындылары бар функциялар болсын. Сонда (11) формуладағы тәсілмен

$$\iiint\limits_{(T)} \frac{\partial P}{\partial x} dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(s)} P\,(x,y,z)\; dy\, dz \qquad (12)$$

$$\iiint\limits_{(T)} \frac{\partial Q}{\partial y} dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(s)} Q(x,y,z)\, dz\, dx \qquad (13)$$

табамыз.

Енді (11), (12), (13) формулаларды қосып, төмендегі Остроградский формуласын табамыз.

$$\iiint\limits_{(T)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint\limits_{(s)} P(x,y,z)\, dy\, dz + Q(x,y,z) dx\, dz + R(x,y,z) dx\, dy. \qquad (14)$$

Остроградский формуласы $(S)$ бет бойынша алынған II типті беттік интгералды, осы беттің өзі қоршап тұрған облыс бойынша алынған үш еселік интегралмен ұштастырады.

Егер I типті беттік интегралға көшсек, онда Остроградский формуласы мына түрде жазылады:

$$\iiint\limits_{(T)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint\limits_{(s)} P(x,y,z)\, cos\, \lambda\; + Q(x,y,z)\, cos\, \mu + R(x,y,z)\, cos\, v]\, ds. \; (15)$$

(14) формуладағы функцияларды былай ұйғарсақ: $P = x, Q = R = 0$ немесе $Q = y, P = R = 0$ немесе $R = z, P = Q = 0$, онда

$$\iiint\limits_{(T)} dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(S)} xdy\, dz; \;\; \iiint\limits_{(T)} dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(S)} y\, dz\, dx,$$

$$\iiint\limits_{(T)} dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy$$

Осы шыққан интегралдарды қоссақ, сонда

$$v = \iiint\limits_{(T)} dx\,dy\,dz = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy. \quad (16)$$

$(S)$ бетпен қоршалынған дененің көлемі $v$ (16) беттік интегралға тең болатын болды. Мұның алдындағы үш беттік интегралдың қай-қайсысы болса да осы беттің өзімен қоршалған дененің көлемін береді.

## § 5. Үш еселік интеграл арқылы дененің көлемін табу

1. Алдымен біз қисық сызықты координаталарда дененің көлемі қалай өрнектеледі, соны көрсетейік.

Екі координаталар системасын алайық: біреуі $XУZ$, екіншісі $\xi\eta\varsigma$.

$(D)$ – $XУZ$ кеңістіктегі $(S)$ бетпен қоршалынған, $(E)$ – $\xi\eta\varsigma$ кеңістіктегі $(\sigma)$ бетпен қоршалынған облыстар болсын.

Келесі формулалар:

$$x = f(\xi\eta\varsigma), \qquad y = \varphi(\xi\eta\varsigma), \qquad z = \psi(\xi\eta\varsigma) \qquad (17)$$

$(E)$ облысын $(D)$облысына түрлендірсін (бейнелесін).

(17) формулалар $\xi\ \eta\ \varsigma$ арқылы бірмәнді түрде шешіледі деп ұйғарамыз:

$$\xi = \xi(x, y, z), \qquad \eta = \eta(x, y, z), \qquad \zeta = \zeta(x, y, z). \qquad (18)$$

Олай болса, $(E)$ облысы мен $(D)$ облысының арасында өзара – бірмәнді сәйкестілік тағайындалды деп есептейміз.

$\xi, \eta, \varsigma$ – айнымалыларды $(D)$ облысы нүктелерінің қисық сызықты координаталары деп атайды. Егер осы үш координаталардың біреуін, мәселен $\zeta$-ны тұрақты деп қарасақ, яғни $\zeta = \zeta_0$, онда (17) формулалар мына түрге көшкен болар еді:

$$x = f(\xi, \eta, \zeta_0), \qquad y = \varphi(\xi, \eta, \zeta), \qquad z = \psi(\xi, \eta, \zeta_0). \qquad (19)$$

(19) теңдеулер бетті кескіндейді, былайша айтқанда, олар беттің параметрлік теңдеулері болып табылады. Бұл бетті координаталық бет деп атайды.

Дәл осы жолмен келесі координаталық беттерді

$$x = f(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = \varphi(\xi_0, \eta, \zeta), \qquad z = \psi(\xi, \eta, \zeta)$$

мұнда $\xi = \xi_0$,

$$x = f(\xi, \eta_0, \zeta), \qquad y = \varphi(\xi, \eta_0, \zeta), \qquad z = \psi(\xi, \eta_0, \zeta),$$

мұнда $\eta = \eta_0$

құруға болады.

Ендігі мақсат (17) формулалар және белгілі $(E)$ облысы бойынша $(D)$ облысының көлемін табу.

Осы алдымызға қойылған мәселені шешу үшін келесі шарттардың орындалуын талап етеміз: а) (17) теңдіктердің оң жағында тұрған функциялардың өздері және олардың бірінші ретті дербес туындылары, екінші ретті аралас туындылары $(E)$ облысында үздіксіз болсын; б) $(E)$ облысында якобиан

$$J = (,\eta, \zeta) = \frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$$

өзінің таңбасын өзгертпейтін болсын (облыстың кейбір жеке нүктелерінде оның нольге тең болуы мүмкін); в) $(\sigma)$ беттің әрбір нүктесіне $(S)$ беттің бір ғана нүктесі сәйкес келсін және керісінше; г) осы айтылған беттерде ерекше нүктелер жоқ болсын. Іздеп отырған көлемді мынадай беттік интеграл

$$v = \iint\limits_{(S)} z\, dx\, dy$$

арқылы өрнектеуге болатынын мұның алдында өткен параграфта айттық. Бұл интегралды І типті беттік интеграл арқылы өрнектейтін болса, онда

$$v = \iint\limits_{(S)} z \cos v\, ds,$$

мұнда $v - (S)$ бетке жүргізілген сыртқы нормальмен $OZ$ осінің арасындағы бұрыш.

Бет $(\delta)$ төмендегі параметрлік теңдеулермен

$$\xi = \xi(u, v), \qquad \eta = \eta(u, v), \qquad \zeta = \zeta(u, v) \tag{20}$$

берілсін, мұндағы $u, v$ параметрлер $uov$ жазықтығындағы бір *(G)* облысында өзгереді.

(17) формулаларға сүйеніп, *(S)* беттің параметрлік теңдеулерін табуға болады:

$$x = f[\xi(u,v), \eta(u,v), \zeta(u,v)], \qquad y = \varphi[\xi(u,v), \eta(u,v), \zeta(u,v)], \tag{21}$$
$$z = \psi[\xi(u,v), \eta(u,v), \zeta(u,v)].$$

Осы тараудың § 1 (3) формула бойынша

$$v = \iiint\limits_{(G)} z\cos v \cdot \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv, \qquad (22)$$

мұнда $EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2,\ \cos v = \mp \frac{c}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (осы тарау §8, (3) формула).

Осы өрнектерді (22) теңдіктің оң жағына қойсақ, онда

$$v = \iint\limits_{(G)} z\, c\, d\, u\, d\, v. \qquad (23)$$

Бұл интегралдың ішіндегі *с* белгілі, ол былай өрнектеледі:

$$c = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{du} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{D\,(x,y)}{D\,(u,v)}.$$

(21) формулалар бойынша *x* пен *y* айнымалы *u* мен $v$-нің күрделі функциясы, сондықтан

$$c = \frac{D\,(x,y)}{D\,(u,v)} = \frac{D\,(x,y)}{D\,(\xi,\eta)} \cdot \frac{D\,(\xi,\eta)}{D\,(u,v)} + \frac{D\,(x,y)}{D\,(\eta,\zeta)} \cdot \frac{D\,(\eta,\zeta)}{D\,(u,v)} + $$

$$+ \frac{D\,(x,y)}{D\,(\zeta,\xi)} \cdot \frac{D\,(\zeta,\xi)}{D\,(u,v)}.$$

с-нің бұл ернегін (22) теңдіктің оң жағына қойсақ, сонда:

$$v = \pm \iint\limits_{(G)} \psi\,[\xi(u,v),\eta(u,v),\zeta(u,v)] \cdot \left[\frac{D\,(x,y)}{D\,(\xi,\eta)} \cdot \frac{D\,(\xi,\eta)}{D\,(u,v)} + \right.$$

$$\left. + \frac{D\,(x,y)}{D\,(\eta,\zeta)} \cdot \frac{D\,(\eta,\zeta)}{D\,(u,v)} + \frac{D\,(x,y)}{D\,(\zeta,\xi)} \cdot \frac{D\,(\zeta,\xi)}{D\,(u,v)}\right] du\, dv. \qquad (24)$$

Енді осы (24) қос интегралды келесі I типті беттік интегралмен

$$\iint\limits_{(\sigma)} \psi\,(,\eta,\zeta)\ \left[\frac{D\,(x,y)}{D\,(\eta,\zeta)}\cos l + \frac{D}{D\,(\zeta,\xi)}\cos m + \right.$$

$$\left. \frac{D\,(x,y)}{D\,(\xi,\eta)}\cos n\right] d\sigma \qquad (25)$$

салыстырайық. Мұнда *l, m, n* – $(\delta)$ бетке жүргізілген сыртқы нормальдың $o\xi, o\eta, o\zeta$ координаталық осьтермен құрайтын бұрыштары.

(24) интеграл мен (25) интегралдың бір-бірінен айырмасы тек таңбада ғана, олай болса,

$$\upsilon = \pm \iint\limits_{(\sigma)} \psi\,(\xi,\eta,\zeta)\,\left[\frac{D\,(x,y)}{D\,(\eta,\zeta)}\cos l + \frac{D\,(x,y)}{D\,(\zeta,\xi)}\cos m + \right.$$

$$\left. + \frac{D\,(x,y)}{D\,(\xi,\eta)}\cos n\right] d\sigma.$$

Енді осы интегралға Остроградский формуласын қолдансақ, сонда

$$\upsilon = \pm \iiint\limits_{(\mathrm{E})} \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\psi\cdot\frac{D\,(x,y)}{D\,(\eta,\zeta)}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\psi\frac{D\,(x,v)}{D\,(\zeta,\xi)}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\psi\cdot\frac{D\,(x,y)}{D\,(\eta,\zeta)}\right]\right\} d\xi d\eta d\zeta. \qquad (26)$$

(26) интеграл таңбасы ішіндегі өрнек келесі анықтауышқа немесе якобианға

$$J(\xi,\eta,\zeta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial x}{\partial\zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial\xi} & \frac{\partial z}{\partial\eta} & \frac{\partial z}{\partial\zeta} \end{vmatrix} = \frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(\xi,\eta,\zeta)}$$

тең болатынына көз жеткізу қиын емес.

Сонымен,

$$\upsilon = \pm \iiint\limits_{(\mathrm{E})} \int \frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}\, d\xi d\eta d\zeta.$$

Қойылған шарттардың бірі бойынша якобиан $J(\xi,\eta,\zeta)$ таңбасын өзгертпейді және көлем $y$ әрқашан да оң сан болады, сондықтан

$$\upsilon = \iiint\limits_{(\mathrm{E})} \frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} d\xi d\eta d\zeta = \iiint\limits_{(\mathrm{E})} |J(,\eta,\zeta)|\, d\xi d\eta d\zeta. \qquad (27)$$

(27) үш еселік интеграл таңбасы ішінде тұрған өрнекті көлем элементі дейді және оны былай белгілейді:

$$d\upsilon = |J(\xi,\eta,\zeta)| d\; d\eta\; d\zeta.$$

(27) интегралға үш еселік интегралдың орта мәні турасындағы теореманы қолдансақ, сонда:

$$\upsilon = J(\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{\zeta})\omega \qquad (28)$$

мұнда $(\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{\zeta}) -$ (E) облысының бір тиянақты нүктесі, ал $\omega -$ бұл облыстың көлемі.

2. Тәжірибеде көп қолданылатын екі түрлі қисық сызықты координаталарды қарайық. Олар: цилиндрлік және сфералық координаталар.

ХОУ жазықтығындағы поляр координаталар мен декарттық апликата z-тің бірігіп қаралуы цилиндрлік координаталарды құрады.

Цилиндрлік координаталар мен декарттық координаталардың арасындағы байланыс төмендегі формулалармен беріледі:

$$x = p\cos\theta, \qquad y = p\sin\theta, \qquad z = z.$$

Бұл формулалар мына облыстарды

$$0 \leq p \leq \infty. \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \qquad -\infty \leq z \leq \infty$$

бүкіл *XYZ* кеңістігіне түрлендіреді (бейнелейді). Жазықтық $p = 0, (0{,}0{,}0)$ бас нүктеге бейнеленеді және бұл жерде бірмәнді сәйкестік бұзылады, бірақ дегенмен (27) формула бұл жағдайда да дұрыс болып қалады.

Координаталық беттер мынадай болады:

а) $p = a$ бұл жасаушылары *oz* осіне параллель, бағыттаушысы центрі бас нүктеде жатқан, радиусы $a$-ға тең шеңбер $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндрлік беттер болады;

б) $\theta = a$ бұл *oz* осі арқылы өтетін жарты жазықтықтар $y = xtg\alpha$.

в) *z=c* бұл *ХОУ* жазықтығына параллель жазықтықтар. Енді якобианды табайық:

$$J(p,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & p\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = p$$

Ендеше цилиндрлік координаталарда дененің көлемі мына формула арқылы өрнектеледі:

$$\upsilon = \iiint\limits_{(E)} p\, d\, p\, dz\, d\theta. \qquad (29)$$

3. Сфералық координаталар бізге мұнан бұрын белгілі

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta \qquad (30)$$

мұнда

$$0 \leq r < +\infty, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Координаталық беттер мыналар:

а) $r = a -$ бұл центрі бас нүктедегі радиусы $a$ сфералық бет $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

б) $\varphi = \alpha -$ бұл $OZ$ осін баса жүретін жарты жазықтық

$$y = x\, t\, \mathrm{g}\, \alpha;$$

в) $\Theta = \beta -$ бұл осі $OZ$ конустық бет

$$(x^2 + y^2) sin^2\beta - z^2 cos^2\beta = 0.$$

Енді (30) түрлендірудің якобианын табайық:

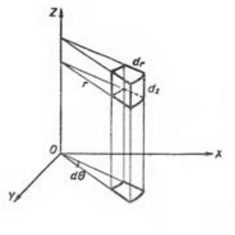
$$J(r, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Сфералық координаталарда дененің көлемі келесі формуламен өрнектеледі:

$$v = \iiint\limits_{(E)} r^2 \sin\theta\; d\, r\; d\theta\; d\,\varphi. \tag{31}$$

Жалпыланған сфералық координаталар деп аталатын қисық сызықты координаталар кеңістікте былай анықталады:

$$x = a\, r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = b\, r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = c\, r\cos\theta.$$



149-чертеж

Бұл системада координаталық беттер мыналар болады. Эллипсоидтар, эллипстік конустар және жазықтықтар. Ал якобиан

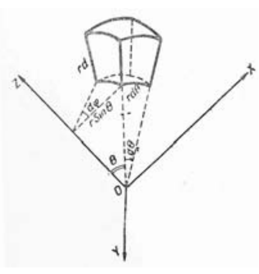
$$J(r, \theta, \varphi) = a\, b\, c\, r^2 \sin\theta.$$

149 және 150-чертеждерде цилиндрлік және сфералық координаталардағы «көлем элементі» көрсетілген.

Цилиндрлік координаталарда бұл элементті тік бұрышты параллелепипед деп қарап, оның көлемін белгілі жолмен есептеп табамыз:

$$p\; d\, p\; d\,\theta\; d\, z.$$

Сфералық координаталарда элементтің көлемін былай есептеуге тура келеді: $\theta$ бұрышына (ендікке) сәйкес келетін параллель радиусы мына $rsin\Theta$ санына тең шеңбер болады, бұл шеңбердің доғасының элементі $rsin\Theta\; d\varphi$ болады.



150-чертеж

Элементті тік бұрышты параллелепипед деп қарап, оның көлемін белгілі жолмен есептеп табамыз, сонда

$$(rsin\Theta\; d\varphi)r\; d\;\theta\; d\;r = r^2\sin\theta\; d\theta\; d\;r\; d\;\varphi$$

Жоғарыда келтірілген формулаларды қалай пайдалануды көрсету үшін бір мысал келтірейік.

*Мысал* Мынадай $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=\frac{y}{b}$ теңдеумен берілген бетпен қоршалынған дененің көлемін табу керек

Бұл дене *XOУ* және *УOZ* жазықтықтарына қарағанда симметриялы түрде орналасқан, өйткені $x$ пен $z$ теңдеуде жұп дәрежелі. Теңдеудің сол жағы оң болғандықтан, $y \geq 0$ болуы керек, олай болса, қарастырылып отырған дене *XOZ* жазықтығының оң жағын ала орналасқан.

Осы ескертпеге сүйеніп, іздеп отырған көлемнің төрттен бірін, яғни бірінші октантта жатқан бөлігінің көлемін тапсақ та болады.

Берілген теңдеуді сфералық координаталарға көшіреміз, ол үшін былай ұйғарамыз:

$$x = a\,r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = b\,r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = c\,r\cos\theta$$

Сонда

$$r^3(sin^4\theta + cos^4\theta) = \sin\theta\sin\varphi,$$

бұл арадан

$$r = \sqrt[3]{\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}},$$

ал дененің ішінде

$$0 \leq r < \sqrt[3]{\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin\theta+\cos^4\theta}}$$

Бірінші октант мына теңсіздіктермен

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

сипатталынады

$$J(r,\theta,\varphi) = a\,b\,c\,r^2\sin\theta;$$

$$\frac{v}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}}} a\,b\,c\;r^2\sin\theta\,d\,r$$

немесе

$$v = \frac{4}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\, d\,\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}.$$

Бұл интегралды шығару үшін былай ұйғарамыз:

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2};\ \ \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2},$$ сонда

$$v = \frac{4}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos^2 2\theta}d\theta = \frac{4}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{1+\cos^2 2\theta},$$

өйткені

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\theta\, d\theta}{1+\cos^2 2\theta} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin 2\,\theta)}{2-\sin^2 2\theta} = 0.$$

Енді былай $2\,\theta = t$ ұйғарсақ, сонда

$$v = \frac{2}{3}abc\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+cos^2t} = \frac{2}{3}abc\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1-cos^2t} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dt}{1+cos^2t}\right).$$

Жақшалардың ішінде тұрған екінші анықталған интегралдағы айнымалыны былай $t = \pi - \pi$ ауыстырып, көлемді мына түрге келтіреміз

$$v = \frac{4}{3}abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+cos^2t} = \frac{4\,abc}{3\sqrt{2}}a\,r\,c\,t\,g\frac{tgt}{\sqrt{2}}\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}abc.$$

## § 6. Үш еселік интегралдағы айнымалыларды ауыстыру

Кеңестіктегі екі координаталық системаны қарайық, оның біреуі *XУZ*, екіншісі $\xi, \eta, \zeta$. Осы екі координаталық системадағы *(D)* мен *(E)* облысының арасындағы өзара бірмәнді сәйкестік (17) формулалармен іс жүзіне асатын болсын. *(D)* облысында анықталған және осы облыста интегралданатын $F(x, y, z)$ функцияның үш еселік интегралын қарайық:

$$\iiint\limits_{(D)} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Егер (17) теңдіктің оң жағында тұрған функциялар 5-параграфтағы келтірілген шарттардың барлығын қанағаттандыратын болса, онда

$$\iiint\limits_{(D)} F(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{(E)} F[(f(\xi,\eta,\zeta),\varphi(\xi,\eta,\zeta),\psi(\xi,\eta,\zeta)] \cdot$$

$$\cdot \left|\frac{D(f,\varphi,\psi)}{D(\xi,\eta,\zeta)}\right| d\xi d\eta d\zeta. \tag{32}$$

Бұл формуланы үш еселік интегралдағы айнымалыларды ауыстыру формуласы деп атайды.

(32) формуланың дұрыстығын дәлелдеу үшін *(D)* және $(E)$ облыстарды бөлшек $(D_i)$ жне $(E_i)$ облыстарға жіктейміз де, мына қосындыны құрамыз:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} F(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i)v_i \tag{33}$$

(28) формула бойынша

$$v_i = \left|J\left(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i\right)\right|\omega_i.$$

(33) қосындыдағы $(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i)$, *(D)* облысының кез келген нүктесі, сондықтан оны былай сайлап алайық:

$$\overline{x_\iota} = f\left(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i\right), y_i = \varphi\left(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i\right), \overline{z_\iota} = \psi\left(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i\right).$$

Сонда

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} F\Big[f\Big(\left(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i\right),\varphi\Big(\left(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i\right),\psi\Big(\left(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i\right)\Big)\Big] \cdot$$

$$\cdot J\Big(\left(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i\right)\Big)\omega_i$$

Барлық $(D_i)$, $(E_i)$ бөлшек облыстардың диаметрлерін нольге ұмтылтып, кейінгі қосындының екі жағынан шек алып (32) формуланың дұрыстығын дәлелдейміз.

Енді (32) формуланы пайдалану жөнінде бір-екі мысал келтірейік.

1-мысал. Мына интегралдың

$$\iiint\limits_{(\mathrm{T})} \frac{x\,y\,z}{x^2+y^2}dxdydz$$

мәнін табу керек. (T) – жоғарғы жағынан $(x^2+y^2+z^2) = a^2\,x\,y$ бетпен, төменгі жағынан *z=0* жазықтықпен қоршалынған дене.

Денені қоршап тұрған беттің теңдеуін және интеграл таңбасы ішіндегі функцияны сфералық координаталарға көшіреміз, ол үшін былай ұйғарамыз

$$x = r\sin\theta\sin\varphi;\;\; y = r\sin\theta\sin\varphi; z = r\cos\theta.$$

Сонда

$$r^2 = a^2 sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi.$$

Дененің ішінде

$$0\le r\le a\sin\theta\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi};\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2};\;\; 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

Енді

$$\iiint\limits_{(T)}\frac{x\,y\,z}{x^2+y^2}dxdydz =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{asin\theta\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}} r^3\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi dr =$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3\varphi\; cos^3\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5\theta\cos\theta d\theta =$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3\varphi(1-sin^2\varphi)dsin\,\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^5\theta\; d\sin\theta = \frac{a^4}{144}.$$

2-мысал. Келесі интегралды

$$\iiint\limits_{(T)} x^p y^q z^r(1-x-y)^s dxdydz$$

есептеп шығару керек. (T) – төмендегі жазықтықтармен $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ қоршалынған тетраэдр.

Берілген интегралды *Дирихле интегралы* деп атайды. Есепті шешу үшін, интегралдағы айнымалыларды былай ауыстырамыз:

$$x+y+z=\xi,\quad y+z=\xi\eta,\quad z=\xi\eta\xi.$$

Бұл арадан

$$\xi = x+y+z,\quad \eta=\frac{x+z}{s},\quad \eta=\frac{z}{x+z};$$

$$x=\xi(1-\eta),\quad y=\xi\eta(1-\xi),\quad z=\xi\eta\xi. \qquad (34)$$

Егер $x, y, z$ оң болса және олардың қосындысы $x+y+z$ бірден аз болса, онда

$$0 \le \xi \le 1; \quad 0 \le \eta \le 1; \qquad 0 \le \zeta \le 1. \qquad\qquad (35)$$

Керісінше, егер айнымалылар $\xi, \eta, \zeta$ ноль мен бірдің арасында өзгерсе, онда $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ және $x + y + z < 1$.

Сонымен, тетраэдр *(T),* (34) формулалардың көмегімен (35) теңсіздіктермен сипатталынатын кубқа түрленетін болды.

Енді якобианды іздейміз:

$$J(\xi, \eta, \varsigma) = \begin{vmatrix} 1-\eta & -\xi & 0 \\ \eta(1-\varsigma) & \varsigma(1-\varsigma) & -\xi\eta \\ n\varsigma & \xi\varsigma & \xi\eta \end{vmatrix} = \xi^2\eta.$$

Бұдан кейін

$$\iiint\limits_{(\mathrm{T})} x^p y^q z^r (1-x-y)^s dxdydz$$

$$= \int_1^0 d\xi \int_0^1 d\eta \int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s \eta^{q+r+1}(1-\eta)^p \varsigma^r (1-\zeta)^q d\zeta =$$

$$= \int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s d\xi \int_0^1 \eta^{q+r+1}(1-\eta)^p d\eta \int_0^1 \varsigma^4 (1-\varsigma)^q d\varsigma.$$

Егер екінші текстес Эйлер интегралын, немесе гамма-функцияны еске түсіретін болсақ, онда

$$\iiint\limits_{(\mathrm{T})} x^p y^q z^r (1-x-y)^s dxdydz = \frac{\Gamma(p+q+r+3)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)} \cdot$$

$$\frac{\Gamma(q+r+2)\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+3)} \cdot \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+r+2)}.$$

Теңдіктің оң жағында тұрған бөлшектерді қысқартқаннан кейін, ең ақырында мына формулаға келеміз:

$$\iiint\limits_{\mathrm{T}} x^p y^q z^r (1-x-y)^s dxdydz =$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}$$

# § 7. Жоғары еселік интегралға келетін бір физикалық мысал

Біз өткен тарауларда түрлі интегралдар, мәселен қос, үш еселік т.т. интегралдар ұғымын бердік. Үш еселіктен артық еселік интегралдар ұғымын енгізудің мағынасы бар ма деген сұрақ туады.

Математикалық анализдің тәжірибеде қолданылуы тек сол қаралған интегралдарға келтірілетін физикалық есептермен ғана бітіп қоймайды, бұл пәннің практикалық мәселелерге қолданылуы тіпті тереңде жатыр. Екі немесе үш еселік интегралдар түгіл, төрт, бес, алты, жеті, тіпті оннан артық еселік интегралдар ұғымын енгізуге болады және мұны тәжірибелік мәселелер талап етеді.

Осы айтылған пікірді сипаттау үшін келесі мысалды қарайық.

Айталық, кеңістікте екі әртектес материалды дене (*D*) және (*E*) берілсін. Бірінші дененің тығыздығы $m\,(x, y, z)$ екіншінікі $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ болсын.

Дене (*D*) мына (*E*) денені өзіне тартатын болсын.

(*D*) дененің тарту күшінің шамасын табу керек. Бұл күштің координаталық осьтерге түсетін проекцияларын $F_x, F_y, F_z$ арқылы белгілейік.

Берілген (*D*) және (*E*) денелерден $dx\,dy\,dz$ және $d\xi\,d\eta\,d\zeta$ элементтерді сайлап алайық. Бұл элементтердің массалары

$$m\,(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \text{ және } \mu(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

болады.

Ендеше $dx\,dy\,dz$ элементтің, $d\xi\,d\eta\,d\zeta$ элементті өзіне тарту күші Ньютон заңы бойынша тең:

$$\frac{m\,(x, y, z)\mu(\xi, \eta, \zeta)dxdydzd\xi d\eta d\zeta}{r^2},$$

мұнда $r$ осы екі элементтің арақашықтығын көрсетеді, яғни

$$r = \sqrt{1\,(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - (z-\varsigma)^2}.$$

Тарту күш $(\xi, \eta, \zeta)$ нүктеден $(x, y, z)$ нүктеге қарай бағытталған, сондықтан осы күш векторының бағыттаушы косинустары тең $\frac{x-\xi}{r}, \frac{y-\eta}{r}, \frac{z-\varsigma}{r}$.

Олай болса, элементтердің тартылыс күштерінің *OX* осіне проекциясы

$$m\,(x,y,z)\mu(\xi,\eta,\zeta)\frac{x-\xi}{r^3}\,dxdydzd\xi d\eta d\zeta.$$

Осы табылған өрнектерді, екі дененің барлық элементтері бойынша қосындыласақ, онда бүкіл күштің ОХ осіне проекциясы $F_x$ тең болған болар еді:

$$F_x=\iiint\limits_{(D)}\iiint\limits_{(E)} m(x,y,z)\mu(\zeta,\eta,\varsigma)\frac{x-\xi}{r^3}\,dxdydzd\zeta d\eta d\varsigma.$$

Дәл осы сияқты

$$F_y=\iiint\limits_{(D)}\iiint\limits_{(E)} m(x,y,z)\mu(\zeta,\eta,\varsigma)\frac{y-\eta}{r^3}\,dxdydzd\zeta d\eta d\varsigma.$$

$$F_z=\iiint\limits_{(D)}\iiint\limits_{(E)} m(x,y,z)\eta(\zeta,\eta,\varsigma)\frac{z-\zeta}{r^3}\,dxdydzd\zeta d\eta d\varsigma. \quad (36)$$

Осы үш өрнекті квадраттап қоссақ, онда тарту күштің шамасын табамыз.

Мына шаманы $\frac{m\,(x,y,z)\ \ (\xi,\eta,\zeta)dxdydzd\xi d\eta d\zeta}{r}$, бір элементтің екіншісіне потенциалы деп атайды.

Осы өрнектерді екі дененің барлық элементтері бойынша қосындылап табамыз:

$$\iiint\limits_{(D)}\iiint\limits_{(E)}\frac{m\,(x,y,z)\mu(\xi,\eta,\zeta)dxdydzd\xi d\eta d\zeta}{r}. \quad (37)$$

Кейінгі алты еселік интегралды бірінші дененің екіншісіне потенциалы деп атайды.

Жоғарыда келтірілген формулаларды пайдалану жөнінде бір мысал келтірейік.

Біртектес куб өзінің төбелерінің біреуінде орналасқан, массасы бірге тең материалды нүктені өзіне қандай күшпен тартады?

Куб біртектес болғандықтан, оның тығыздығы $\mu=cons\,t$ (тұрақты). Сонда тарту күштің ОХ осіне түскен проекциясы (36) формулалар бойынша

$$F_{x=\mu}\int_0^a\int_0^a\int_0^a\frac{xdxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\,3/2}}=$$

$$= \mu \int_0^a \int_0^a dydz \int_0^a \frac{xdx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= \mu \int_0^a \int_0^a \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\Bigg|_0^a dydz =$$

$$= \mu \int_0^a \int_0^a dydz\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}}\right) =$$

$$= \mu\int_0^a dz\int_0^a \frac{dy}{\sqrt{y^2+z^2}} - \mu\int_a^0 dz\int_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^2+y+z^2}} =$$

$$= \mu\int_0^a ln\left(a+\sqrt{a^2-z^2}\right)dz - \mu\int_0^a lnzdz - \mu\int_0^a ln(a +$$

$$+\sqrt{2a^2+z^2}\Big) dz + \mu\int_0^a ln\sqrt{a^2+z^2}dz.$$

Бөлімшелеп интегралдасақ, сонда:

$$F_x = \mu\big[aln\big(a-a\sqrt{2}\big) - alna - aln\big(a+a\sqrt{3}\big) - aln\sqrt{2} +$$

$$a - \int_0^a \frac{\left(\sqrt{a^2+z^2}a -\right)}{\sqrt{a^2+z^2}}dz + \int_0^a \frac{\left(\sqrt{2a^2+z^2}-a\right)z^2}{(a^2-z^2)\sqrt{2a^2+z^2}}dz -$$

$$-\int_0^a \frac{z^2dz}{a^2+z^2}\Bigg] = \mu\Bigg[aln\big(1+\sqrt{2}\big) - aln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + a -$$

$$-\int_0^a \frac{\sqrt{a^2+z^2}-a}{\sqrt{a^2+z^2}}dz + \int_0^a \frac{\left(\sqrt{2a^2+z^2}-a\right)z^2 - z^2\sqrt{2a^2+z^2}}{(a^2+z^2)\sqrt{2a^2+z^2}}dz] =$$

$$= \mu\Bigg[aln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{4}} + a\int_0^a \frac{dz}{\sqrt{a^2+z^2}} -$$

$$-a\int_0^a \frac{z^2dz}{(a^2+z^2)\sqrt{2a^2+z^2}}\Bigg] = \mu\Bigg[aln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} + aln\big(1+\sqrt{2}\big) -$$

$$-a\int_0^a \frac{z^2dz}{(a^2+z^2)\sqrt{2a^2+z^2}}\Bigg] = \mu\Bigg[aln\frac{\big(2+\sqrt{2}\big)\big(1+\sqrt{2}\big)}{1+\sqrt{3}} -$$

$$-a\int_0^a \frac{dz}{\sqrt{z^2+2a^2}} + a^3\int_0^a \frac{dz}{(a^2+z^2)\sqrt{2a^2+z^2}}\Bigg] =$$

$$= \mu\left[aln\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{3}} - aln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} +\right.$$

$$\left.+a^3\int_0^a \frac{dz}{(a^2+z^2)\sqrt{2a^2+z^2}}\right].$$

Енді мынадай ауыстыру $z = a\sqrt{2tg\varphi}$ жасап, төмендегіні табамыз

$$F_x = \mu a\left(2ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}\right)$$

немесе

$$F_x = \frac{2\mu a^3}{a^2}\left(\frac{\pi}{12} + ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)' \text{ ал } \mu a^3 = M - \text{кубты}$$

массасы. Сонымен,

$$F_x = \frac{2M}{a^2}\left(\frac{\pi}{12} + ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right), \text{ дәл осы сияқты}$$

$$F_y = \frac{2M}{a^2}\left(\frac{\pi}{12} + ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right), \quad F_z - \frac{2M}{a^2}\left(\frac{\pi}{12} + ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right).$$

Бүкіл тарту күш

$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2 + Fz^2} = \frac{2\sqrt{3}M}{d^2}\left(\frac{\pi}{12} + ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right).$$

### *Жаттығулар*

Төмендегі беттермен қоршалынған денелердің көлемдерін табу керек

1. $(x^2+y^2)^2 + z^2 = a^3z$

Жауабы: $\frac{\pi^2 a^3}{6}$.

2. $(x^2+y^2+z^2)^2 = az(x^2+y^2)$.

Жауабы:$\frac{\pi a^2}{60}$

3. $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^3z(x^2+y^2)$.

Жауабы:$\frac{a^2}{3}$.

4. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^2}\right)^3 = \frac{x^2z}{h^3}$. Жауабы: $\frac{\pi}{12}\frac{a^3b\,c^2}{h^3}$.

5. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3=\frac{x\,y\,z}{h^3}$ Жауабы: $\frac{(a\,b\,c)^2}{6\,h^3}$.

6. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$ *Жауабы*: $\frac{\pi}{3}\frac{a^2b\,c}{h}$.

7. $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2b^2z(x^2+y^2)}{a^2x^2+b^2y^2}$

*Жауабы*: $\frac{\pi\,a\,b}{48}(3a^4+3b^4+2a^2b^2)$.

8. $x^2+y^2+z^2 = 2Rz, x^2+y^2=z^2\mathrm{tg}^2\alpha, x^2+y^2=z^2\mathrm{tg}^2\beta.\ (\alpha>\beta)$

Шешуі. Бұл есептің мазмұнын түсіну керек. Ауданы ізделініп отырған дене радиусы $R$ сферамен және осы сфераға іштей сызылған төбелеріндегі бұрыштары $\alpha$ *және* $\beta$ конустармен қоршалынған.

Сфералық координаталарға көшеміз

$$x=r\,sin\theta cos\varphi,\qquad y=r\,sin\theta\,sin\varphi,\qquad z=r\,cos\theta.$$

Сонда бұл системада сфераның теңдеуі болады $r=2\,R\cos\theta$

Дененің ішінде $0\le r\le 2R\cos\theta,\ \beta\le\theta\le\alpha,\ 0\le\varphi\le 2\pi.$

Енді

$$v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_\beta^\alpha d\,\theta\int_0^{2Rcos\theta}r^2\sin\theta dr=2\pi\int_\beta^\alpha\sin\theta\,d\,\theta\int_0^{2Rcos\theta}r^2dr=$$

$$=-\frac{16\pi R^3}{3}\int_\beta^\alpha cos^3\theta\,d\cos\theta=\frac{4\pi R^3}{3}(cos^4\beta-cos^4\alpha).$$

9. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^3=\frac{x\,y\,z}{h^3}$. *Жауабы*: $\frac{1}{360}\frac{a^4b^4c^4}{h^9}$.

10. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^2}=\frac{x}{h}$. *Жауабы*: $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\frac{a^2b\,c}{h}$.

11. Келесі теңдеумен $x^2+y^2+z^2=2az$ берілген сфераның массасын табу керек,

*Жауабы*: $\frac{4}{3}\pi\,a^3$.

12. Мына

$$\iiint_{(T)}\frac{x\,y\,z}{x^2+y^2}dx\,dy\,dz$$

интегралды есептеп шығару керек, егер $(T)\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$ эллипсоидтың жоғарғы жартысы болса.

Жауабы: $\frac{\pi}{4}\ a\,b\,c^2$.

13. Мына

$$\iiint_{(T)}z\,dx\,dy\,dz$$

интегралдың мәнін табу керек, егер облыс (T):$z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ конуспен және $z=h$ жазықтықпен қоршалынған дене болса

Жауабы:$\frac{\pi R^2 h^4}{4}$.

14. Мына

$$\iiint\limits_{(T)} z^2\, dx\, dy\, dz$$

интегралды есептеп шығару керек, егер облыс $(T)$ келесі сфераларға $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ және $x^2 + y^2 + z^2 = 2\,R\,z$ ортақ бөлікпен қоршалынған дене болса.

*Нұсқау.* Есепте айтылған екі сфера мына $z = \frac{R}{2}$ жазықтық бойынша қиылысады.

Жауабы:$\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right)$.

15. OZ осінің бойында жатқан $A(0{,}0, z_0)$ нүкте үшін мына теңдеумен $x^2 - y^2 - z^2 = R^2(z \geq 0)$ берілген шардың потенциалын табу керек.

*Нұсқау.* (37) формула бойынша потенциал

$$v = \mu \iiint\limits_{(T)} \frac{dx\, dy\, dz}{r}$$

Мұнда $\mu = const$ шардың тығыздығы, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}$.

# XXIII ТАРАУ
# ӨРІС ТЕОРИЯСЫНАН КЕЙБІР МӘЛІМЕТТЕР

## § 1. Векторды дифференциалдау

Математикада, физикада, механикада және техникада екі текті шамалармен айналысуға тура келеді. Кейбір физикалық шамалардың сандық мәнін білу жеткіліксіз, олардың кеңістіктегі бағытын да білу керек. Мысалы, мұндай шамаларға жататындар: жылдамдық, үдеу, күш, магниттік және электрлік өріс кернеуліктері т. т.

Әрі сандық мәндерімен, әрі бағыттарымен сипатталынатын шамаларды *векторлар* деп атайды.

Векторлық шамаларды бағытталған (стрелкамен көрсетілген) кесінділермен бейнелейді. Стрелка шаманың қалай қарай бағытталғанын көрсетеді, ал кесіндінің ұзындығы шаманың сандық мәнін береді. Ол *модуль* деп аталады.[1]

Бағытқа байланыссыз, тек өздерінің сандық мәндерімен ғана сипатталынатын шамаларды *скаляр* деп атайды. Мысалы, бұларға жататындар: температура, масса, тығыздық, көлем, энергия т. т.

Скаляр аргументке тәуелді $\bar{A}$ векторды қарайық.

Егер скаляр тәуелсіз айнымалы $t$-нің әрбір мәніне айнымалы $\bar{A}$ вектордың белгілі бір тиянақты мәні (модулі және кеңістіктегі бағыты) сәйкес келсе, онда $\bar{A}$ векторды скаляр $t$ аргументтің *векторлық функциясы* немесе *вектор-функциясы* деп атайды және оны былай жазады:

$$\bar{A} = \bar{A}(t).$$

Механикада скаляр аргумент $t$ әдетте уақыттың ролін атқарады.

$\bar{A}(t)$ вектор-функцияның берілуі келесі үш $A_x(t)$, $A_y(t)$, $A_z(t)$ скаляр функциялардың берілуімен пара-пар. Мына $A_x(t)$, $A_y(t)$, $A_z(t)$ функцияларды координаталар осьтеріне түскен $\bar{A}(t)$ вектордың проекциялары, немесе компоненттері, немесе құраушылары деп атайды.

Әрбір векторды өзінің құраушылары бойынша мына түрде

$$\bar{A}(t) = A_x(t)\bar{\imath} + A_y(t)\bar{\jmath} + A_x(t)\bar{k}, \qquad (1)$$

(мұнда $\bar{\imath}, \bar{\jmath}$, $\bar{k}$ координаталық осьтер бойынша бағытталған бірлік векторлар) жазу бізге векторлық алгебрадан белгілі. $\bar{A}(t)$ вектордың ұзындығы немесе модулі

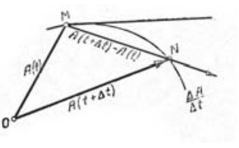
$$\bar{A} = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + Az^2} \qquad (2)$$

болады.

$\bar{A}(t)$ скаляр $t$ аргументтің функциясы деп ұйғарайық.

Скаляр аргумент $t, (\alpha, \beta)$ аралығында өзгергенде $A(t)$ вектордың ұшы бір үздіксіз қисық сызықты сызады. Осы қисық сызықты $A(t)$ вектордың *годографы* деп атайды.

Енді скаляр аргумент $t$-ге еркімізше $\Delta t$ өсімшені берейік, сонда аргументтің жаңа мәні $t + \Delta t$ болады, ал $\bar{A}(t)$ вектор-функцияның бұған сәйкес мәні $\bar{A}( t + \Delta t)$



151-чертеж

---

[1] Бұл кітапта стрелка орнына сызықша қойылып отыр.

болады. Вектор-функцияның өсімшесі (151-чертеж)

$$\Delta A = \bar{A}(t + \Delta t) - \bar{A}(t).$$

болады.

Енді төмендегі қатынасты

$$\frac{\Delta \bar{A}}{\Delta t} = \frac{\bar{A}(t - \Delta t) - \bar{A}(t)}{\Delta t}$$

құрып, сонан кейін $\Delta t$-ні нольге ұмтылтып, шекке көшейік:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4(t - \Delta t) - A(t)}{\Delta t}.$$

Егер осы шек бар болатын болса, онда оны $A(t)$ вектор-функция функцияның скаляр аргумент $t$ бойынша алынған туындысы деп атайды және оны былай белгілейді:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{t} = \frac{dA}{dt} = \overline{A^1}(t) = A(t)$$

(1) теңдіктен табамыз:

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} i + \frac{dA_y}{dt} \bar{j} + \frac{dA_z}{dt} k. \qquad (3)$$

Бұл арадан

$$\left|\frac{d\bar{A}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dA_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dA_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dA_z}{dt}\right)^2}$$

Функцияларды дифференциалдау ережелерін бұл жерде де мүлтіксз қолдануға болады.

## § 2. Скалярлық және векторлық өрістер

1. Егер біз осыған дейін скаляр аргументтің (уақыттың) функциясын қараған болсақ, енді бұдан былай қарай кеңістіктің әрбір нүктесімен мәндері байланысты скаляр немесе вектор шамаларды қараймыз.

Кеңістіктің физикалық құбылыс немесе процесс болып жатқан бөлігін *физикалық өріс* деп атайды.

Физикалық құбылыс скаляр шамамен сипатталса, онда өрісті скалярлық өріс деп атайды; егер физикалық құбылыс вектормен сипатталса, онда өрісті векторлық өріс дейді. Мәселен, атмосфераны алсақ, ондағы қысым скалярлық өрісті құрады, бір қызған денені қарасақ, онда оның температурасы скалярлық өріс жасайды. Өзендегі немесе каналдағы ағын суды қарасақ, онда оның бөлшектерінің жылдамдығы векторлық өрісті құрады:

жерлік магнетизм, электрленген дене т.т. векторлық өріске мысал болып табылады. Өрістің әрбір нүктесін оның $(x, y, z)$ координаталарымен немесе $\bar{r}$ радиус-векторымен анықтауға болады (бұл бізге аналитикалық геометриядан белгілі). Радиус-вектор былай өрнектеледі:

$$r = x \cdot \bar{\imath} + y \cdot i + z \cdot \bar{k},$$

бұл арадан

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Скалярлық немесе векторлық өрісті беру деген сөз – әрбір радиус-векторға скаляр $\upsilon(r)$ функцияның немесе $A(t)$ вектор-функцияның мәнін сәйкес келтіру деген сөз. Олай болса, радиус-вектор $\bar{r}$ тәуелсіз айнымалы болып табылады.

Скаляр $\upsilon(r)$ функцияның берілуі үш $x, y, z$ айнымалылардың функциясы $\upsilon(x, y, z)$ берілуі парапар да, ал $A(r)$ вектор-функцияның берілуі мына үш $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$, $A_z(x, y, z)$ скаляр функциялардың берілуімен парапар.

Көбінесе скалярлық функция немесе вектор-функция жалғыз радиус-векторға ғана тәуелді болып қоймайды, уақытқа да тәуелді болады: $\upsilon(\bar{r}, t), \bar{A}(\bar{r}, t)$. Осындай функциялармен сипатталатын өрістерді *айнымалы өрістер* деп атайды; егер өрістер уақыттың өзгеруіне тәуелді болмаса, онда мұндай өрістерді тұрақты немесе *стационар өрістер* деп атайды.

2. Айталық, қарастырылатын өріс стационар өріс болсын. Олай болса, ол скаляр $\upsilon(\bar{r}) = \upsilon(x, y, z) = \upsilon(\mu)$ функциямен сипатталады. Мәселен, электростатикалық өрістің потенциалын қарайық. Егер оны $\upsilon$ арқылы белгілесек, онда $\upsilon = \frac{e}{r}$ мұнда е заряд, ал r=$\sqrt{2 + y^2 + x^2}$ нүктенің зарядқа дейінгі қашықтығы. Сонымен электростатикалық өрістің потенциалы скалярлық өрісті құрады және ол өріске, жалғыз координаталардың бас нүктесінен басқа, кеңістік түгелімен жатады.

$\upsilon(x, y, z)$ скаляр функцияны бірмәнді үздіксіз және үздіксіз дербес туындылары бар деп ұйғарайық. Өрістің, функциясы $\upsilon(x, y, z)$ ылғи бірдей мәнді қабылдайтын нүктелерін қарайық, яғни мұндай нүктелерде

$$\upsilon(x, y, z) = c = const \qquad (4)$$

(4) теңдеу кеңістікте бетті кескіндейді. Осы теңдеудегі параметр $c$-ге түрлі $c_1$, $c_2, \dots, c$ мәндерді беріп, бірнеше беттерді табамыз; бұл беттердің әрқайсысында құбылыс бірдей өтеді.

Мұндай беттерді *эквипотенциал* беттер деп атайды.

Өрістің әрбір $P(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы бір эквипотенциал бет өтеді және оның теңдеуі мынадай

$$v(x, y, z) = v(x_0, y_0, z_0)$$

болады.

Мәселен, скалярлық өріс мынадай $v = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$ функциямен сипатталсын. Эквипотенциал бетті табайық. Ол былай болады: $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} = C$ немесе $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 - C^2$. Сөйтіп, бұл өріс үшін эквипотенциал беттер ортақ центрлі сфералар тобы болатын болады.

Айталық, тағы да скалярлық өріс мынадай

$$v = arc\sin\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

функциямен сипатталсын. Осы өріс үшін эквипотенциал беттерді табайық. Анықтама бойынша

$$arc\sin\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C;$$

бұл арадан

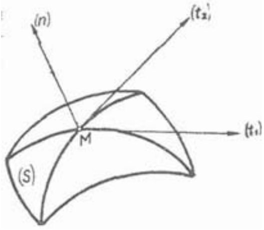
$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = sin\, C,$$

немесе

$$z^2 = (x^2 - y^2)sin^2 C.$$

Сонымен, өрістің эквипотенциал беттері төбелері ортақ, бас нүкте жатқан дөңгелек конустар тобы болды.

## § 3. Скалярлық өрістің градиенті



152-чертеж

Алдымен біз бағыт бойынша алынған туындыны еске түсірейік. Скалярлық өріс $U(x, y, z) = U(M)$ функциямен сипатталсын. Мәселен, қызған денені алып қарайтын болсақ, оның температурасы $U(M)$ скалярлық өріс жасайды деп біз жоғарыда айттық.

$M(x, y, z)$ нүкте арқылы бағытталған ($l$) түзуді жүргізейік (152-чертеж). Осы түзудің бойынан $M$ нүктесіне өте жуық $M_1(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z)$ нүктені алайық та, келесі қатынасты

$$\frac{U(M)\quad U(M)}{\overline{MM_1}}=\frac{U(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-U(x,y,z)}{p}$$

құрып, шек алайық; яғни

$$\lim_{M_1\to M}\frac{U(M_1)-U(M)}{\overline{MM_1}}=\lim_{0\to O}\frac{U(x+\Delta x,y-\Delta y,z+\Delta z)-U(x,y,z)}{P}.$$

Егер осы шек бар болатын болса, онда оны $U(x,y,z)$ скаляр функцияның $M(x,y,z)$ нүктедегі ($l$) бағыты бойынша алынған туындысы деп атайды және оны былай белгілейді:

$$\frac{dU(M)}{dl}=\frac{dU(x,y,z)}{dl}.$$

Бұл туындыны $U(M)$ скаляр функцияның $M$ нүктесіндегі ($l$) бағыты бойынша өзгеру жылдамдығын сипаттайды.

Бағыттанған түзу ($l$) координаталар осьтерімен сәйкес $(\widehat{l,x}),(\widehat{l,y}),(\widehat{l,z})$ бұрыштар жасасын. Егер $MM_1$ вектордың ұзындығын (модулін) $\varrho$ деп белгілесек, онда

$$\Delta x=\varrho\, Cos\,(\widehat{l,x}),\ \ \Delta y=\varrho\, Cos\,(\widehat{l,y}),\qquad \Delta z=\varrho\, Cos\,(\widehat{l.z}).$$

Функцияның толық өсімшесі $\Delta U$ төмендегі теңдікпен

$$\Delta U=\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\Delta y+\frac{dU}{dz}\Delta z+\varepsilon p$$

өрнектелетіні бізге белгілі, мұнда $p=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2,}$

$\varepsilon-$ шексіз аз шама.

Ендеше

$$\Delta\, U(M)=\frac{\partial U}{\partial x}pCos(\widehat{l,x})\ +\frac{\partial U}{\partial y}pCos(\widehat{l,y})+\frac{dU}{dz}pCos(\widehat{l,z})+\varepsilon p.$$

Осы теңдіктің екі жағын $\varrho$-ға бөліп жіберіп, сонан кейін $\varrho$-ны нольге ұмтылтып шек алсақ, онда

$$\lim_{p\to 0}\frac{\Delta_1 U(M)}{p}=\frac{\partial U}{\partial x}Cos\,(\widehat{l,x})+\frac{\partial U}{\partial y}Cos(\widehat{l,y})+\frac{dU}{dz}Cos(\widehat{l,z})$$

немесе

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{\partial U}{\partial x}Cos(\widehat{l,x})+\frac{\partial U}{\partial y}Cos(\widehat{l,y})+\frac{dU}{dz}Cos(\widehat{l,z})\qquad(5)$$

Кеңістіктің $(M)$ нүктесі арқылы өтетін эквипотенциал (S) бет берілсін. Осы беттің бойында жатқан $M$ нүктесі арқылы өзара перпендикуляр үш бағытталған түзу жүргіземіз, олар мыналар $(\overline{n}),(\overline{t_1})$ және $(\overline{t_2})$ (152-чертеж). Мұнда $(\overline{n})$ бетке оның $M$ нүктесінде жүргізілген нормальдың бағытын көрсетеді, ал $(\overline{t_1})$ мен $(\overline{t_2})$ бағыттар $M$ нүктесінде ($S$) бетке жүргізілген жанама жазықтықта жатады. Сондықтан кейінгі екі бағыт ($S$) беттің бойында жатқан белгілі бір ($L_1$) және ($L_2$) қисық сызықтарға жанама болып табылады. Бет ($S$) эквипотенциал болғандықтан, $U(M)$ скаляр функцияның жаңағы қисықтар бойымен алынған туындылары нольге тең, олай болса,

$$\frac{dU}{dt_1} = \frac{dU}{dt_2} = 0.$$

Еркімізше кез келген $(\bar{l})$ бағытты алайық. Құрылған өзара перпендикуляр үш ($\bar{n}$), ($\overline{t_1}$), ($\overline{t_2}$) бағыттарды координаталық система деп қарауға болады. Осы система үшін (5) формуланы қолдансақ, онда

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{dU}{dt_1} Cos(l, t_1) + \frac{dU}{dt_2} Cos(l, t^2) + \frac{\partial U}{\partial n} Cos(l, n)$$

немесе

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial n} Cos(l, n). \qquad (6)$$

(6) теңдіктен біз мынадай қорытындыға келеміз: егер ($\bar{n}$) нормальдың бойына ұзындығы (модулі) $\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|$-ге тең вектор салсақ, онда бұл вектордың $(\bar{l})$ бағытына түскен проекциясы $\frac{\partial U}{\partial l}$ дербес туындыны береді. Осылай етіп құрылған векторды $U(M)$ функцияның *градиенті* дейді.

Сонымен, скалярлық өрістің градиенті деп эквипотенциал бетке жүргізілген нормальдың бойына салынған, ұзындығы (модулі) $U(M)$ функцияның осы нормаль бағыты бойынша алынған дербес туындысына тең векторды айтады және мұны былай белгілейді: $gradU = \left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|$.

Осының негізінде (6) теңдікті былай жазуға болады:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = grad_1 U \qquad (7)$$

мұнда $grad_1 U$ – мына $gradU$ вектордың ($l$) бағытына түскен проекциясы. (5) теңдік бойынша

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x} Cos(n, x) + \frac{\partial U}{\partial y} Cos(n, y) + \frac{\partial U}{\partial z} Cos(n, z).$$

Бұл теңдіктен мынадай қорытындыға келеміз:

$$grad_x U = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad grad_y U = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad grad_z U = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Сондықтан $gradU = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{\imath} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k} = \nabla U.$ (8)

Сөйтіп, $gradU$ вектордың $OX$ осіне проекциясы $\frac{\partial U}{\partial x}$, $OY$ осіне – $\frac{\partial U}{\partial y}$ $OZ$ осіне $\frac{\partial U}{\partial z}$ болатын болды. Олай болса,

$$|gradU| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

## § 4. Векторлық өріс

1. Айталық, векторлық өріс, $\bar{A}(x, y, z) = \bar{A}(M)$ вектор-функциямен сипатталатын болсын.

Кеңістіктегі $(L)$ қисықты қарайық. Егер осы қисықтың әрбір нүктесінде оған жүргізілген жанаманың бағыты $\bar{A}(M)$ вектордың бағытымен дәлме-дәл келсе, онда $(L)$ сызықты векторлық сызық деп атайды.

$\bar{A}(M)$ вектор-функцияның координаталық осьтерге проекцияларын $A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z)$, арқылы белгілейік.

Векторлық өрістен тұйық ($S$) бетпен қоршалынған көлемді бөліп алайық та, беттің бір нүктесінде оған нормаль жүргізейік, бұл нормальдың бағытын $(\bar{n})$ деп белгілейік. Сонда Остроградский формуласы бойынша

$$\iiint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dv =$$

$$\iint\limits_{(S)} [A_x(x, y, z)Cos(n, x) + A_y(x, y, z)Cos(n, y) +$$

$$+A_z(x, \widehat{y}, z)Cos\left(n, \widehat{\ } z\right)\Big]ds \qquad (9)$$

$\bar{A}(M)$ вектордың нормаль $(\bar{n})$ бағытына түскен проекция болады:

$A_n = |\bar{A}|cos\left(\bar{n}, \widehat{\ } \bar{A}\right)$. Екінші жағынан

$$Cos\left(\bar{n}, \widehat{\ } \bar{A}\right) = Cos(\bar{n}, x)Cos(\bar{A}, \hat{x}) + Cos(\bar{n}, \hat{y})Cos\left(A, \widehat{\ } y\right) +$$

$+Cos\ (\bar{n}, \bar{z})Cos(\bar{A}, z)$. Ендеше

$$A_n[\bar{A}\ Cos(\bar{A}, x)Cos(\bar{n}, x) + |\bar{A}|Cos(\bar{A}, \bar{y})Cos(\bar{n}, y) +$$

$$+|\bar{A}|Cos(\bar{A}, z)Cos\ (n, z)$$

немесе $A_n = A_x(x, y, z)Cos(\bar{n},\ \bar{x}) + A_y(x, y, z)Cos(\bar{n}, \bar{y}) +$

$$+A_z(x, y, z)Cos(\bar{n}, \bar{z}) \qquad (10)$$

Бұдан кейін Остроградский формуласы мына түрге көшеді:

$$\iiint\limits_{(\mathrm{v})} \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dv = \iint\limits_{(S)} A_n ds. \qquad (11)$$

(11) теңдіктің оң жағында тұрған беттік интегралды өрістің бет арқылы өтетін *ағыны* деп атайды. Бұл теңдіктің сол жағында тұрған үш еселік немесе көлемдік интегралдың ішіндегі өрнекті векторлық өрістің таралуы немесе *дивергенциясы* деп атайды және оны былай белгілейді:

$$div\bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Енді Острограский формуласын былай жазуға болады:

$$\iiint\limits_{(\upsilon)} div\bar{A}dv = \iint\limits_{(S)} A_n ds \qquad (12)$$

Осы қорытылып шыққан формуланы Остроградскийдің *векторлық түрдегі* фомуласы деп атайды.

Бұл формула $\bar{A}(M) -$ вектордың дивергенциясынан алынған көлемдік интегралды векторлық өрістің беті $(S)$ арқылы ағынынан (тасқынынан) алынған беттік интегралмен ұштастыратын болды.

$(S)$ беттің бойындағы $M$ нүктені $(S_1)$ бетпен қоршайық. Осы $(S_1)$ беттің ішіндегі көлемді $(\upsilon_1)$ арқылы белгілейік. Сонда (12) формула бойынша

$$\iiint\limits_{(\upsilon_1)} div\bar{A}dv = \iint\limits_{(S_1)} A_n ds. \qquad (13)$$

(13) теңдіктің сол жағында тұрған үш еселік интегралға, оның орта мәні турасындағы теореманы қолданып, мынаны табамыз:

$$div\bar{A}\,\Big|_{M_1} \upsilon_1 = \iint_{(S_1)} A_n ds \ \text{ немесе } \ div\bar{A}\,\Big|_{M_1} = \frac{\iint_{(S_1)} A_{\text{ц}} dS}{\upsilon_1},$$

мұнда $M_1(\upsilon_1)$ облысының ішінде жатқан нүкте, ал $\upsilon_1 -$осы облыстың көлемі.

Егер көлем $\upsilon_1$ нольге ұмтылса, немесе бәрібір $M_1 \to\ M$, онда

$$div\bar{A} = \lim_{\upsilon_1 \to 0} \frac{\iint_{(S_1)} A_n ds}{\upsilon_1} \qquad (14)$$

(14) формуладан мынадай қорытындыға келеміз: $M$ нүктесіндегі векторлық өрістің дивергенциясы осы нүктені қоршап соған бет арқылы өтетін ағын мен сол беттің өзімен қоршалынған көлемнің қатынасының шегіне тең болатын болды.

Тағы да еске сала кететін мәселе мынау: векторлық өрістің дивергенциясы вектор емес, скаляр.

Енді Стокс формуласын пайдалансақ, сонда

$$\int\limits_{(L)} A_x(x,y,z)dx + A_y(x,y,z)dy + A_z(x,y,z)dz =$$

$$\iint\limits_{(S)} \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) Cos(\overline{n},\overline{x}) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) Cos(\overline{n},\overline{y}) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) Cos(\overline{n},\overline{z})\right] ds \qquad (15)$$

(13) теңдіктің сол жағындағы II типті қисық сызықты интегралды бірінші типке көшірсек сонда

$$\int\limits_{()} A_x(x,y,z)dx + A_y(x,y,z)dy, + A_z(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{(1)} \left[A_x(x,y,z) Cos\ (\overline{t},x) + A_y(x,y,z) Cos(\overline{t},y) + \right.$$

$$\left. + A_z(x,y,z) Cos(\overline{t},z)\right] \mathrm{d}\sigma \qquad (16)$$

мұнда $\left(\overline{t},\ \widehat{}\ x\right)$, $\left(\overline{t},\ \widehat{}\ y\right)$ және $\left(\overline{t},\ \widehat{}\ z\right) - (L)$ қисыққа жүргізілген жанама мен сәйкес координаталар осьтерінің арасындағы бұрыш.

Егер $(L)$ қисықтың $d\sigma$ элементін бағытталған кесінді деп қарасақ, онда (10) формула бойынша

$$A_\sigma = A_x(x,y,z) Cos(\overline{t,x}) + A_y(x,y,z) Cos(\overline{t,y}) +$$
$$+ A_z(x,y,z) Cos(\overline{t,z}).$$

Олай болса,

$$\int\limits_{(L)} A_x(x,y,z)dx + A_y(x,y,z)dy + A_z(x,y,z)dz = \int\limits_{(1)} A_\sigma d\sigma. \qquad (17)$$

мұндағы $A$-ны $\bar{A}(M)$ вектордың жоғарыда айтылған жанамаға (($\bar{t}$ баытына) түскен проекциясы деп карауға болады.

*OX* осіне түскен проекциясы $\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$ айырмаға, *OУ* осі түскен проекциясы $\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$ айырмаға және *OZ* осіне түскен проекциясы $\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$ айырмаға тең векторды қарайық.

Осындай вектормен сипатталатын өріс *үйірім* деп аталынады және оны былай белгілейді: $rot\bar{A}$ немесе *Curl* (ртор *A* деп оқылады).

Сонымен,

$$rot_x\bar{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z};\ rot_y\bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x};$$

$$rot_z\bar{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

(17) және (18) формулаларды еске алып төмендегіні табамыз.

$$\iint\limits_{(1)} A\delta d\delta = \iint\limits_{(S)} \left[rot_x\bar{A}Cos(\overline{nx}) + rot_y\bar{A}Cos(n,y) + \right.$$

$$\left. +rot_z\bar{A}Cos(\overline{n,z})\right]ds.$$

(10) формула бойынша интеграл таңбасы ішіндегі өрнек тең $rot_n\bar{A}$ (бұл $rot\bar{A}$ вектордың нормальға түскен проекциясы). Олай болса

$$\int\limits_{(L)}^{B\delta d\delta} \iint\limits_{(S)}^{rot_n\bar{A}ds.} \tag{19}$$

(19) теңдіктің сол жағында тұрған қисық сызықты интегралды $\bar{A}$ вектордың контур $(L)$ бойындағы циркуляциясы деп атайды.

(19) теңдіктің өзі Стокстың вектор түріндегі формуласын береді.

(19) формуланы сөз жүзінде былай тұжырымдауға болады: *векторлық өрістің бетті қоршап тұрған қисық бойындағы циркуляциясы үйірімнің нормальға түскен проекциясынан алынған беттік интегралға, яғни үйірімнің осы бет арқылы өтетін ағынына тең болады.*

3. Скаляр $U(M)$ функцияның градиенті векторлық өріс құрады деп біз 3-параграфта айттық.

Скаляр $U(M)$ функцияның градиенті болып табылатын векторлық өрісті потенциалдық өріс деп атайды. Осы анықтама бойынша потенциалдық өрісті сипаттайтын вектор $\bar{A} = grad\,U$. Сондықтан

$$A_x = \frac{\partial U}{\partial x};\ A_y = \frac{\partial U}{\partial y};\ A_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Ендеше мына өрнек $A_x(x,y,z)dx + A_y(x,y,z)dy + A_z(x,y,z)dz$ бір функцияның толық дифференциалы болып табылады. Ал бұл өрнек толық дифференциал болу үшін келесі шарттардың

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0. \qquad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$$

орындалуы да қажетті және жеткілікті. Осы үш шарттың орындалуы мына теңдікпен $rot\bar{A}$=0 парапар.

Сонымен, *векторлық өріс потенциалдық өріс болу үшін оның үйірімі нольге тең болу қажетті және жеткілікті.*

4. Енді жоғарыда көрсетілген векторлық операциялардың (дивергенция, градиент, ротор) арасындағы байланысты қарайық. Потенциалдық өрістің анықтамасы бойынша

$$rot\ grad\ U = 0. \tag{20}$$

Енді

$$div\,rot\,\bar{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = 0.$$

Сонымен, $div\,rot\,\bar{A} = 0.$ Енді

$$div\ grad\ U = \frac{\partial}{\partial x} grad_x U + \frac{\partial}{\partial x}\ grad_y U + \frac{\partial}{\partial z}\ grad_z U =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) \text{ немесе}$$

$$div\ grad\ U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \tag{21}$$

Төмендегі дифференциалдық операторды

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \tag{22}$$

Лаплас операторы деп атайды.

Барлығының бірдей дәлелдеулерін келтірмей төмендегі формулаларды көрсетуге болады:

$$rot\ rot\ \bar{A} = grad\ div\ \bar{A} - \Delta\bar{A}, \tag{23}$$

$$div\,(f\,\bar{A}) = f div\bar{A} + grad\,f \cdot \bar{A}, \tag{24}$$

$$div\,[\bar{A} \cdot \bar{B}] = \bar{B}\,rot\bar{A} - \bar{A}rotB, \tag{25}$$

$$rotf\bar{A} = gradf \cdot \bar{A} + frot\bar{A}. \tag{26}$$

Осы формулалардың біріншісінің дәлелдеуін көрсетейік:

$$rot_x rot\bar{A} = \frac{\partial}{\partial y} rot_z\bar{A} - \frac{\partial}{\partial z} rot_y\bar{A} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) -$$

$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$ немесе

$$rot_x rot\bar{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} =\right.$$

$= \frac{\partial}{\partial x} divA - \Delta A_x$. Дәл осы сияқты

$rot_y rot\bar{A} = \frac{\partial}{\partial y} div\bar{A} - \Delta A_y,$

$rot_z rot\bar{A} = \frac{\partial}{\partial z}\, div\bar{A} - \Delta A_z$. Екінші жағынан

$$rot\,rot\,\bar{A} = rot_x rot\bar{A} \cdot \bar{\imath} + rot_y \cdot rot\bar{A} \cdot \bar{J} + rot_z rot\bar{A} \cdot k =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} div\bar{A}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial y} div\bar{A}\right)\bar{J} + \left(\frac{\partial}{\partial z} div\bar{A}\right)\bar{k} -$$

$$-\left(\Delta A_x \bar{\imath} + \Delta A_y \bar{\imath} + \Delta A_z \bar{k}\right) = grad\,div\bar{A} - \Delta\bar{A},$$

мұнда $\Delta\bar{A}$ − Лаплас операторы: $\Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial\, x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial\, y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial\, z^2}$

$$\Delta A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial\, x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial\, y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial\, z^2},$$

$$\Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial\, x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial\, y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial\, z^2}.$$

## § 5. Беттегі бағытталған элемент

1. Берілген $(S)$ беттен *ds* элементті қарайық. Егер бір жақты бетті қарайтын болсақ, онда мұндай беттің әрбір нүктесінде оған жүргізілген нормальдың екі, бір-біріне қарама-қарсы бағыты бар.

Егер берілген бет $(S)$ тұйық болса, онда осы бетпен қоршалып тұрған көлемге қарағанда екі нормаль болады: біреуі ішкі нормаль, екіншісі сыртқы нормаль.

Доғаның элементін бағыттағандай, беттің де элементін бағыттауға болады

Ұзындығы (модулі) элементтің ауданына тең, бағыты осы элементке жүргізілген нормальдың белгілі бағытымен дәлме-дәл келетін векторды беттің бағытталған элементі деп атайды және оны былай белгілейді: *ds*

$\overline{ds}$ вектордың координаталық осьтерге түскен проекциялары элемент ауданының координаталық жазықтықтарға түскен проекцияларын береді. Бұл проекциялардың таңбалары плюс немесе минус болады: егер нормаль $(\overline{n})$ координаталық осьпен сүйір бұрыш құрса, онда жаңағы проекцияның таңбасы оң да, ал доғал бұрыш құрса, онда проекцияның таңбасы теріс болады.

$U(M)$ скаляр функция, ал $\bar{A}(M)$ – вектор-функция болсын. Келесі өрнектерді қарайық.

$$\iint\limits_{(S)} U(M)d\overline{s}, \qquad (27) \qquad\qquad \iint\limits_{(S)} \bar{A}\,(M)\overline{ds}, \qquad (28)$$

$$\iint\limits_{(S)} \bar{A}\,(M)\;x\;\overline{ds}. \qquad (29)$$

Осы жазылған өрнектердің ішіндегі (27) өрнек векторлық шаманы береді. Бұл вектордың құраушылары:

$$\iint\limits_{(S)} U(M)Cos(\overline{n,x})ds; \qquad \iint\limits_{(S)} U(M)\;Cos(\overline{n,y})ds,$$

$$\iint\limits_{(v)} U(M)\;Cos(\overline{n,z})ds.$$

(28) өрнек скаляр шаманы береді:

$$\iint\limits_{(S)} \bar{A}(M)\;\overline{ds} = \iint\limits_{(S)} A_n ds.$$

(29) өрнек векторлық шаманы береді, бұл вектордың проекциялары мынадай:

$$\iint\limits_{(S)} \big[A_y(x,y,z)Cos(\overline{n,z}) - A_z(x,y,z)Cos(\overline{n,y})\big]ds,$$

$$\iint\limits_{(S)} [A_z(x,y,z)Cos(\overline{n,x}) = A_x(x,y,z)Cos(\overline{n,z})]ds,$$

$$\iint\limits_{(S)} [A_x(x,y,z)Cos(\overline{n,y}) - A_y(x,y,z)Cos(\overline{n,x})]ds.$$

2. Тұйық $(S)$ бетпен қоршалынған $(v)$ облысын қарайық. Функциялар $U(M)$ және $A(M)$ осы облыста анықталсын. Остроградский формуласына сүйеніп, келесі формулалардың

$$\iint\limits_{(S)} U\overline{ds} = \iiint\limits_{(v)} g'radU\,dv, \qquad (30)$$

$$\iint\limits_{(S)} \bar{A}d\bar{s} = \iiint\limits_{(v)} div\bar{A}dv, \qquad (31)$$

$$\iint\limits_{(S)} \bar{A}xd\bar{s} = -\iiint\limits_{(v)} rot\bar{A}dv. \qquad (32)$$

дұрыстығын дәлелдеуге болады.

(30) формуланың дұрыстығын дәлелдеу үшін $U(M)$ скаляр функцияның үздіксіз $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ туындылары бар деп ұйғарамыз. Мына үш еселік интегралды

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial U}{\partial x} dv$$

қарайық, Остроградский формуласы бойынша

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial U}{\partial x} dv = \iint\limits_{(S)} U(M)Cos(n,x)ds. \qquad (33)$$

Дәл осы сияқты

$$\iiint\limits_{(v)} \frac{\partial U}{\partial y} dv = \iiint\limits_{(s)} U(M)Cos(n,G)ds, \qquad (34)$$

$$\iiint\limits_{(U)} \frac{\partial U}{\partial z} dv = \iint\limits_{(S)} U(M)Cos(n,z)ds. \qquad (35)$$

(33) формуланы бірлік вектор $\bar{\imath}$-ге, (34) формуланы $\bar{\jmath}$-ге, (35) формуланы $\bar{k}$-ға көбейтіп, осыдан шыққан нәтижелерді бір-бірімен қосайық, сонда

$$\iint\limits_{(S)} [\bar{\imath}Cos(\overline{n,x}) + \bar{\imath}Cos(\overline{n,y}) + \bar{k} \cdot Cos(\overline{n,z})]U(M)ds =$$

$$= \iiint\limits_{(v)} \left(\bar{\imath}\frac{\partial U}{\partial x} + \bar{\jmath}\frac{\partial U}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial U}{\partial z}\right) dv. \quad \text{Ал}$$

$$\bar{\imath}Cos(\bar{n}, x) + \bar{\jmath}Cos(\overline{n, y}) + \bar{k}Cos(\overline{n, z}) = \bar{n},$$

$$\bar{\imath}\frac{\partial U}{\partial x} + \bar{\jmath}\frac{\partial U}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial U}{\partial z} = \nabla U = gradU,$$

мұнда $\bar{n} -$ нормаль бойынша бірлік вектор. Ендеше

$$\iint\limits_{(S)} U(M)\bar{n}ds = \iiint\limits_{(v)} gradUdv.$$

Осы кейінгі формуладағы $\bar{n}ds -$ бағытталған элемент, сондықтан

$$\iint\limits_{(S)} U(M)d\bar{s} = \iiint\limits_{(v)} gradUdv.$$

Сонымен, (30) формула дәлелденді.

(31) формула (12) формуламен дәлме-дәл келеді.

Енді (32) формуланың орын алатындығын былай дәлелдеуге болады: осы теңдіктің сол және оң жақтарының *OX* бойынша проекциялары

$$\iint\limits_{(S)} \left[A_y Cos(\overline{n, z}) - A_z Cos(\overline{n, y})\right] ds; \qquad (36)$$

$$-\iiint\limits_{(v)} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dv. \qquad (37)$$

болады.

Бұл екі интеграл шамасы жөнінде бір-біріне тең. Оны мынадан байқауға болады: Остроградский формуласын пайдаланып, (36) беттік интегралды үш еселік интегралға түрлендіретін болсақ, онда ол (37) үш еселік интегралға тең болады.

# МАЗМҰНЫ

## *Бірінші бөлім*
## АНАЛИЗГЕ КІРІСПЕ

## *Екінші бөлім*
## Б1Р АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАРЫНЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУІ

### *Үшінші бөлім*
## Б1Р АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАРЫНЫҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУІ

## *Алтыншы бөлім*
## АЙНЫМАЛЫЛАР ФУНКЦИЯЛАРЫНЫҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУІ

**О. А. ЖӘУТІКОВ**

# МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ КУРСЫ

*Оқулық*

Басуға 30.06.14 қол қойылды. Қағазы офсеттік.
Қаріп түрі «Times New Roman». Пішіні 60х90$^1/_{16}$. Баспа табағы 52,0.
Таралымы: Мемлекеттік тапсырыс бойынша – 1000 дана.
Тапсырыс №3/76-14.

ISBN 978-601-225-671-0

9 786012 256710